

受入ID-1519990906B00050



話 の 表 穫 收



02000-00044317-4

林業試験場測定研究室長

大 友 栄 松

收穫表の話

林業試験場 大友 栄松

目 次

序

收穫表の意義、目的	1
收穫表調製のための標準地選定及び調査	3
資料の整理	5
資料の吟味及び棄却	6
地位の決定	8
構成数値の決定	10
主 林 木	10
副 林 木	15
表の作製	17

附 録

- (1) 統計用語
- (2) 自由曲線
- (3) 実験式
- (4) 最小自乗法
- (5) その他

序 收穫表の意義、目的

收穫表とは、一定の樹種について、一定の作業法の下における地位別の成長関係の諸因子の数値を令階別に示した表である。

收穫表の編製は、ドイツに端を発し、ドイツの林業試験場はこのために建てられ、同所では造林、土壌、その他の林業の諸部門の研究は、收穫表編製の必要性に伴って、漸次行われ発達して行つたものである。(註 1777年 *Späth* 1788年 *Leutner* 樹木成長図録 1824年 *Huber-Hunderscagen*)

林業経営においては、生産の保続ということが最も重要な原則の一つになつてゐるが、この基礎をなす收穫保続の原則に則して、森林計画を樹立し、経営を進めて行く場合、或は、現在の森林経営を生産技術的に批判し、より良き方向へ推進しようとする場合、基準となるものが望ましい。この基準を与えるものが收穫表である。さらに具体的に收穫表の任務を述べると

1) 林令の将来の成長諸因子の予測

国有林では、将来の收穫保続の関係を検討するにはすべて、一応收穫表、收穫予想表のごときものに基いて、施策期決定を行つてゐる。(勿論、保続のみから決定するわけではないが、決定の有力な因子である)

2) 現在林の材積推定

年令と平均樹高立木度かわかる場合は、材積表がなくとも大体の材積が推定できる。

3) 地位の判定

4) 間伐の指針

知上のように收穫表は経営の一つの基準、指針として利用されるものであるから、所謂現実收穫表であつては、余り役に立たない。現在ある林令の平均状態を示すにすぎない。このような收穫表は、森林が常に成長し、変化している現在、その時点の平均状態のみを示

すが、将来の成長或いは各成長諸因子（例えば立木度）の変化に基いて、成長因子（例えば材積）が如何に変化するが推測することができない。応用ということを中心にして行けば、矢張り従来通り法正（正常）収獲表というものが今後も収獲表研究の中心的位置を占めるであろう。

収獲表調製のデータの収集の方法としては、通常次の二方法が行われている。

1 固定標準地法

2 暫定標準地法

1は、現在、日本以外の諸外国、特に欧州各国で用いられている方法である。種々の年令の林令を、地位とときには施業法毎に設定して5年又は10年毎に伐期迄測定する方法で、この方法は現在最もよいとされている。ドイツではこの方法で70年余も測定して *Wiedemann* が従来の収獲表を改訂している。このためのドイツの固定標準地千数ヶ所もあつた。現在英国でこの方法を実行中で既に数種にわたる収獲表が完成している。

この方法の欠点は、長期間を必要とすること、そのため経営上の方針に変化があつたり被害があつたりした場合、標準地が使えなくなることで、標準地であるため施業者が意識的に他と異なつた施業をしたりすることである。

2の方法は、現在日本や米国で用いられている方法であるが、短期間に調製する必要のある今日やむを得ないとしても漸次前者の方法に移行すべきであろう。何となればこの方法は単なる統計処理で異なる標準地の各数値を平均的に結合したものを成長曲線としたもので、決して一林分に関する成長過程を表わしているものではないし、その保証は与えられない。

1, 2の方法については、別々に説明を要するが、大体2の方法の説明が1にも適用できるし、又、日本では一般に、現在のところ2の方法によらざるを得ないので、これから2の方法を中心として述べる。

又調製法としては、指林木法と、成長関係を考慮し下ら統計的処理により調製する方法があるが、指林木法は種々の欠点があるので今日全く用いられないから、今日の話よりは省いて、後者についての述べざる。

標準地の選定及び調査

標準地は、林令構成が同一で且、被害その他の故障がなく、健全に成育している必要がある。最も大切なのは、林冠に大きな孔がないことである。もつともどうしてもさけられないときは、仮懸木を補填することもあるができるだけこれはさけなければならぬ。従つて当然、過疎林、過密林をさけなければならぬ。この観点から収獲表調査は、所謂ランダムサンプリングは不可能であつて、適当な標準地を探し出さなければならぬ。

標準地の数は、区分する地位の数や、令階数により異なるので一概にいえないが、100〜300は必要であろう。民有林の場合伐期が低いから、地位三階級にわけた場合は100〜150でよいのではなかろうか。尚林令範囲は、伐期の10年後のもの位に欲しい。

尚、調査の際は、地位の不良なもの或は幼令のもの高令のものが少く調査され、非令林令地位中程度のものが余計に調査されるおそれがあるから、この点計画的に行わなければならぬ。

標準地の形は測量面積計算の上からできるだけ四角形がよいが、もしそうでない場合でも各辺の挟角が 60° 以下にしてはいけない。尚この際尤も大切なことは境界を正しくとること、境界が丁度樹間の中央を通るよう又樹冠の内部或は側根の内側に境界が来ないようにしなければならない。この面積の過少推定は、標準地面積が小さいために収獲表の値に重大な誤をもたらしものである。

標準地の面積は $0.20 \sim 0.25$ でよいが、面積を一定にするよりも本数をできるだけ一定にした方がよい。本数は200〜300本がよい。従つて、幼令林令では、面積は 0.1 以下になる場合もある。上述のように誤差という点から考えれば面積は大きな程よいが、大きき

すれば、法正生長状態の林木のみを含むということが不可能になる。余り面積のみにこだわると不法正なヶ所を含んだりして却つて所期の目的に及ぶことになるから注意を要す。

又、標準地の選定方法、調査の方法が収穫表調製の最も重要な段階であつて、この方法が誤つていれば、尔後の統計的処理が如何に立派でも完成した収穫表は使いものにならぬであらう。

標準地の周囲はできれば角地に松をたてて、コンパス測定を行う。製図は縮尺は $1/500$ 程度がよい。面積は経緯法計算か、三斜法がよい。

林令は既往の厂史が明確であれば直ちに判明することか不明な場合は成長錐に又は伐根により査定する。

次に毎木について、樹高と胸高直径を測定する。

直径は、胸高直径(4尺)を直角二方向測定しその平均を取る。分の位まで止め以下四捨五入する。

樹高は、尺位にとどめ尺未満四捨五入する。

樹高はワイセの測高器、麻生式測高器又は竹さおを利用するのがよいが、毎木測定しなくて、サンプリングを行い、樹高曲線をフリーバンドで作製して、それにもとづいて、樹高をさめるのもよい。この場合は同令単純林の水面積の標準地では直径に対する樹高の式は一次式 $y = a + bx$ が又は $y = \left(\frac{x}{ax+b} \right)^2 + c$ が適合する。

次に枝下層も調査しておくこともよい。

毎木調査がすめば、主副林木の判定を行う。現実林は同令、同直径、同樹高でも同伐直後の林令もあれば、全然同伐していない林令もある。大体法正に近い林令を選ぶのであるが、現実には中々そういかないのいろいろな場合が含まれてくるのが当然である。この場合各林令を比較したり、吟味したりするには、副林木を含めると全く混乱して收拾がつかなくなる場合が多い。

その地方で最も普遍に行われる同伐法を行う場合当然除かれるべき林木を副林木とする。日本では一般に寺断博士のB種同伐を基準としている。この判定は相当の熟練を要し、殊に選定のみで実際に

伐採しないので果して妥当な選木であるか否かの判断が難しく、これが暫定標準地法の最大の欠点の一つである。

以上に附帯して、標準地の標高、傾斜度(森林計画の細則による)

方位、隣の状態、基岩、土性(砂土、砂壤土、壤土、植壤土)

深度、結合度、堅軟鬆

深 (2尺以上)

中 (1尺〜2尺)

浅 (1尺以下)

湿度、乾

適

湿

地床植生の状態

既往の伐採の記録

尚所屬小班の毎町、蓄積、本数をも調査しておく。

資料の整理

調査が終了する度毎に、各標準地についてデータを資料し、附帯調査事項と共に附表に取りまとめる。

平均直径は、全林の直径の総計を総本数で割ったものであるが、この平均直径を有する木は材積においては必ずしも全林の平均木とはなり得ない。この点は寧ろ平均断面積より出した平均直径を有する木の方が平均に近いので欧米では平均直径としては平均断面積に基づくものをさしているが日本では直径の算術平均を用いている。日本の場合後述の断面積による吟味の場合に些か困る。この問題については尚今後研究を要する。尚断面積による平均直径は、直径の算術平均より標準偏差次第に大きい。

平均樹高は、全林の樹高の平均だが、英国その他では断面積を重みとして平均樹高を出しているが単なる平均で差支えないだろう。

材積は、単木材積表により主副林木別に拾約した直径階樹高階を用いて、これを合計して夫々の級幹材積とし、平均幹材積は総本数

で除して計算する。

胸高断面積は、主副林木ごと、直径階別にその中央値に対する断面積を本数倍して合計して総胸高断面積を算出する。

この外毎町本数を計算し、地位別に標準地調査一覧表にまとめる。尚、又直径・林樹高の相関表を作製しておくとかと参考になる。

資料の吟味

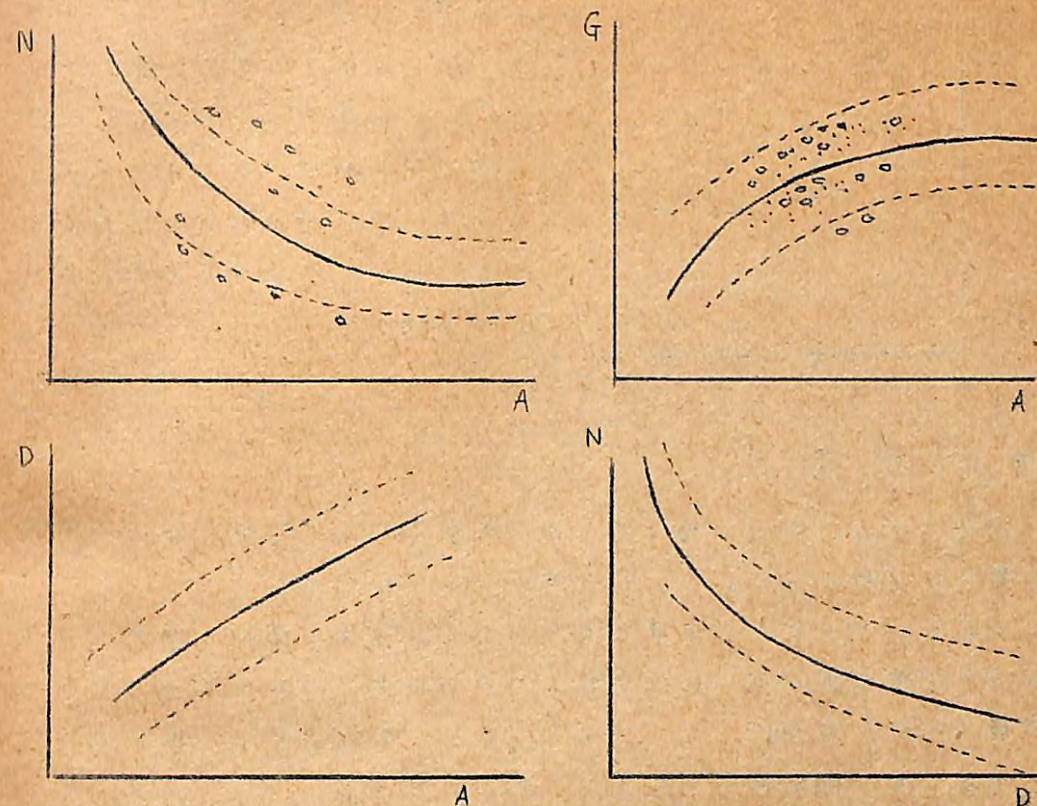
収集した資料の中には、相当吟味して調査したと思つても、異常なものが入ってくる場合がある。これらのデータは吟味のし棄却するものであるがこれらの吟味の要素は次の諸項である。（但しすべて主林木のみについてである）

- 1) 毎町本数：林令
- 2) 毎町胸高断面積：林令
- 3) 毎町材積：林令
- 4) 平均直径：林令
- 5) 本数：平均胸高直径

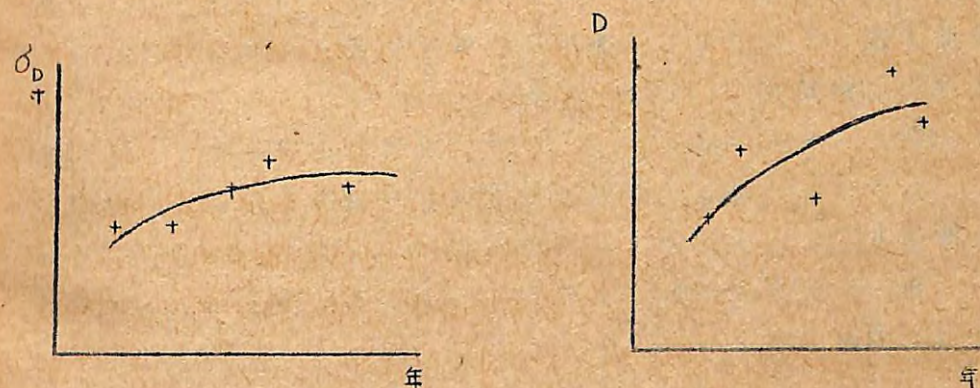
上記の諸項目中、最も重要なものは1) 2) 5) である。この吟味は法正でないものを除くためのものであるが、作製しようとする收穫表は、年令・地位別に記載されるが、この場合すべて法正立木度が条件となつてゐる。立木度の法正が否かは、林令：本数・林令：断面積、或はウイメナウエルの法則より本数と平均直径が或る関係をもつていて、この関係から著しくかけ離れているものは除外しなければならぬ。

さて上記の関係を吟味するには図による方法と数式法がある。

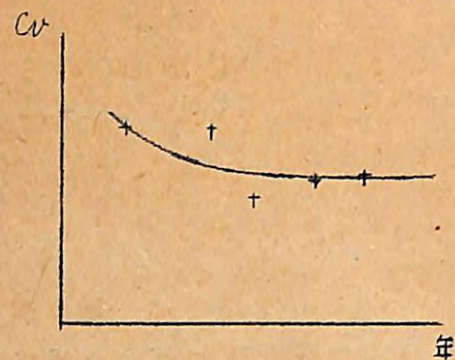
図による方法は、まづ資料全体の中心を通る曲線を引き、さらに目測で資料の上限・下限を通る限界の曲線を引きこの線外の点は、更に吟味のし棄却するか否かきめる。



数式法は、適当な実験式を採用し、最小自乗法でその曲数を決定し、中心線を描く、さらに各階毎の標準偏差を計算し、この標準偏差を図上で適当なカーブを適合し平滑にする。



更に変動係数のカーブを描き



両者をクロス、チェックする

$$D \times C.D. = \sigma.D.$$

次に中心線の上下に σ の2~3倍の巾を附け、この帯外のデータは、更に他の観点から吟味する。而して不適当とわかれれば之を棄却する。

地位の決定

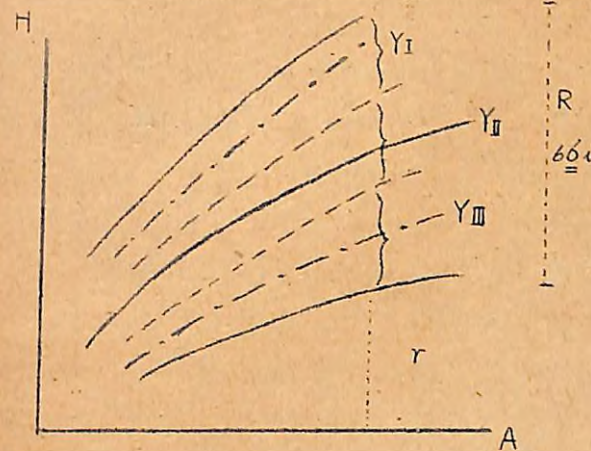
地位の決定の方法は種々あるが、樹高を判定の基準に用いる方法が最も応用性が広いのでこの方法について述べる。

地位は土地生産力を示すものであるが、極端に疎疎、過密の林令を除けば、樹高は地位に比例することが知られている。又一方樹高と材積も一次の関係にある。これらの点から樹高をもつて地位の指数とすること一般に承認されているところである。

地位は普通Ⅲ~Ⅶの等級に区分される。この区分を行うには所謂 *Baur* の曲線法と数式法が用いられる。

Baur の曲線法は林令に対する樹高分布図を圍き、上下の界線をこれら分布点を全部含めように引き、この間を3~5等分し、各帯の中心線を書いて、これらを各地位の標準樹高とする。

数式法は、実験式 $H = \frac{A^2}{\alpha A^2 + \beta A + \gamma}$, $H = \alpha e^{-\frac{\beta}{A}}$, $H = \alpha A^\beta$, $H = 10 \frac{A}{\alpha + \beta A}$, $H = \left(\frac{A}{\alpha A + \beta} \right)^2 + \gamma$ 等により常数を決定して、中心線を引く。一方林令に対し、樹高の標準偏差の曲線を書いて、各年令毎の標準偏差(σ_i)を決定する。中心線の上下に $\pm 3\sigma_i$ の所に界線を圍く。而して上下の線内を3等分し、その中心線を以て、夫々の地位を示す樹高とする。



$$Y_{II} = r + \frac{R}{2}$$

$$Y_I = r + \frac{5}{6}R = Y_{II} + \frac{R}{3}$$

$$Y_{III} = r + \frac{R}{6} \equiv Y_I - \frac{R}{3}$$

$$|Y_I - Y_{II}| = |Y_{III} - Y_{II}| = \frac{R}{3} = 2\sigma_i$$

この方法には、樹高成長曲線は各地位とも同じ傾向があること、各地位の偏差率が同じで令階による差異がないことを前提

としている。この仮定は、果して妥当であるか否かは固定標準地のデータにより将来検討される必要があろう。何れにしても従来の暫定標準地にするすべての方法は、何れもこの仮定の下に実行されて来ている。

尚米国の方法は *Reference age* (通常50年、伐期の年令の年)の平均樹高を用いる。今この時の全Plotの主林木の平均樹高を H_{r0} とする。このとき 50ft 60ft 70ft 80ft 90ft 100ft の樹の x 年における樹高 (H_{xi}) は変動係数が一定の場合は

$$H_{xi} = H_{ri} + k H_{ri} \quad \text{但し } k = \frac{H_{x0} - H_{r0}}{H_{r0}}$$

変動係数が異なる場合は

$$H_{xi} = H_{ri} + k \sigma_i \quad \text{但し } k = \frac{H_{x0} - H_{r0}}{\sigma_0}$$

により定める。

(註) 各年令を直交坐標軸の横軸上にとつて対応する樹高の大きさを縦軸上にとり、描いた各成長曲線において

り、樹高のように発芽と同時にその成長を開始すると考えられるものの総成長曲線は原点から始まり、常に上昇曲線を描き、極大又は極小を示さない。

- 2) 総成長曲線は始め横軸に対し凸で後反して凹となる。即ち曲線は一の反曲点を有し且つ一つに限る。
- 3) 総成長曲線は年令が高くなるに従つてその上昇度が次第に衰え殆んど直線変化をなし、遂に或る一定値に達して止むという傾向がある。換言すると、曲線の上方において、横軸に平行な漸近線を有する。
- 4) 従つて連年成長曲線も、原点より起り、始め横軸に対し凸に始まり、反曲して凹となり極大値に達して尔后速に下降するが、その成長量減小度は次第に小となるから、曲線は再び反曲して横軸に対して凸となり、高令となるにつれて次第にその変化が微弱となり遂に横軸に切して消滅する。
- 但し幼令における成長旺盛で連年成長量極大に達することの速かな樹高のようなものでは、曲線は始めから横軸に凹に始まるような傾向をもつ。要するに連年成長曲線は、唯一の極大及びその前後に各一つ宛の反曲点を有するか、或はより多くの場合極大の後において唯一つの反曲点を有する。

収穫表構成数値の決定

国有林の収穫表様式 令階 地位毎

主 林 木

平均 { 胸高直径 cm
樹高は同範囲 m

ha当 { 本 数
胸高断面積 m^2
幹材積 m^3

幹材積連年成長量 m^3
幹材積平均 m^3

副 林 木

平均胸高直径 cm

ha当 { 本数は総林木に対する比率
幹材積は m^3
幹材積累計 m^3
同上主林木幹材積に対する比率

主副林木合計

本 数
幹材積 m^3
幹材積連年成長量 m^3
ha当 { 幹材積平均成長量 A, B m^3
総収穫量 m^3
副林木幹材積累計の総収穫量に対する比率
成長率

民 有 林

主副林木合計

平均 { 胸高直径 幹材積
樹 高
本 数 平均成長量
1町歩 { 胸高断面積 成長率
当 り { 幹材積
連年成長量

ドイツの例. トウリの収穫表 (1945 Krenn)

令階 5年毎	20% 間伐
中央高 m	{ 同 前
総材積 $f m$	
平均成長量 $f m$	30% 間伐
連年成長量 $f m$	{ 同 前
形状高 m	
10% 間伐	40% 間伐
{ 蓄 積 $f m$	{ 同 前
{ 断面積 $g m$	
{ 平均直径 cm	50% 間伐
{ 本 数	{ 同 前

トウヒの収穫表 (1947 Zimmerle)

令 階

主 林 木

高 m

本 数

直 径 cm 断面積 gm 成材々積 fm 立木材積 fm 枝条率 $\%$ 成材形数 $\%$

副 林 木

樹 長 m 直 径 cm 断面積 gm 成材材積 fm 立木材積 fm

枝条率

英 国 の 例

令 階

主 林 木

中 央 高

本 数

平均直径

断面積

成材形数

成材材積

間 収 穫 累 計

断面積 gm 成材々積 fm 立木材積 fm

総 収 穫

断面積 gm 成材々積 fm 立木材積 fm

連 年 成 長 量

断面積 gm 成材々積 fm

平 均 成 長 量

成材々積 fm 立木材積 fm

副 林 木

平 均 高

本 数

成材々積 (皮無)

成材総成長量

以上のように各国或は各人夫々の取まとめ方があるが、ここでは
一応我国国有林の方法に準じて説明する。

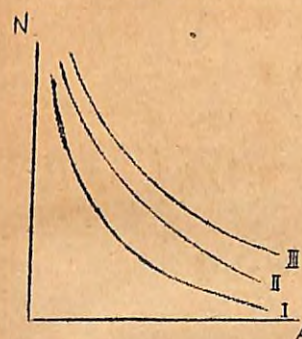
成長諸因子を地位毎、令階毎に決定するには自由曲線法 数式法
折衷法あるが、通常数式法により大体の形を定め、次に数式法では
表わしえないような箇所が通常生ずるので自由曲線により修正する
のが普通である。

主副林木は別々に数値を決定し、最後に両者を合せて、全林の数
値を決定する。

主林木については

1) 林令に対する毎所本数の決定

$$N = aA^{-b} \quad \text{又は} \quad N = \frac{g(A^2+P)}{A^2+Y} \quad \text{の式が通常用いられる。}$$



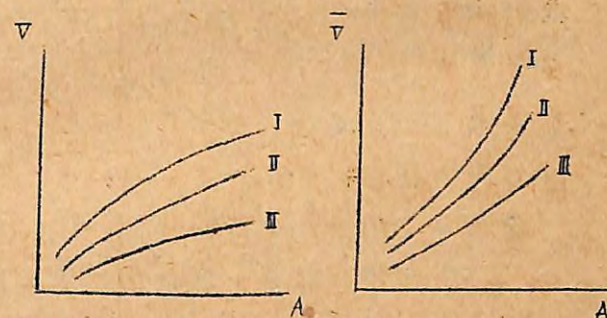
これらの式に地位別に区分した標準地
のデータの値を代入し、最小自乗法に
より常数を決定する。而して各地位毎
に実験式は決定される。

2) 林令対主林木毎町幹
材積

$$V = \frac{A^2}{PA^2 + gA + Y} \quad \text{又は}$$

$$V = \frac{A^3}{PA^3 + gA^2 + Y}$$

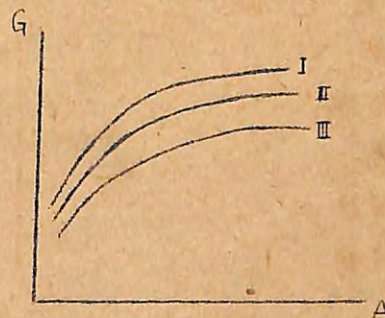
$$V = ae^{-\frac{b}{A}} \quad \text{又は} \quad V = aA^b$$



3) 林令対毎町胸高断面積

$$G = \frac{A^2}{PA^2 + gA + Y}$$

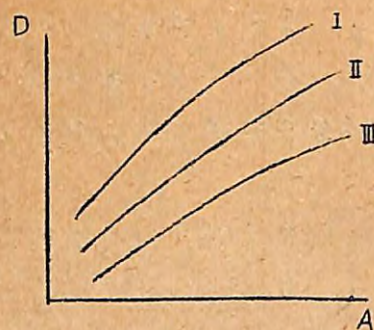
$$G = 10 \frac{A}{a+bA}$$



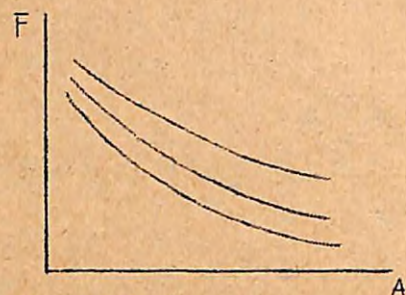
4) 林令対平均胸高直径

$$D = \frac{A^2}{PA^2 + gA + Y}$$

$$D = \frac{A}{10(a+bA)}$$



5) 林令対林令形数



次にこれらの算出値を下記の観点より修正する。

1) 平均断面積 × 本数 = 林令断面積

検定方法

$$\frac{\text{実測断面積}}{\text{各地位の算出値}} = \frac{\text{実測総本数}}{\text{地位本数}} \frac{\text{実測平均断面積}}{\text{地位平均断面積}} \quad \text{が成立すればよい}$$

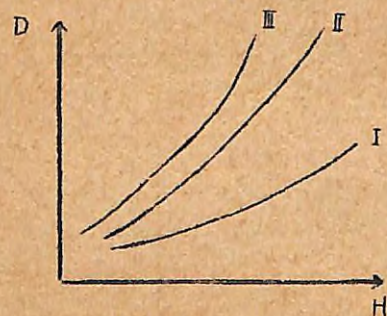
検定法

平均幹材積とその林の平均直径を有する木の材積の差の百分率をプロット毎に計算しその直径に対してかく

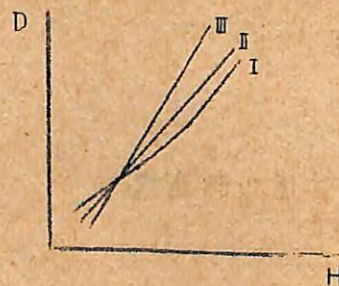
$$\frac{\text{単木材積} \times \text{総本数} \times \frac{\text{平均材積}}{\text{平均直径を有する木の材積}}}{(\text{平均直径、樹高の木の})} = \text{総材積}$$

以上が済めば今度は、各成長因子間の従来より知られた関係より因子相互間の数値に矛盾を生じないように修正をする。

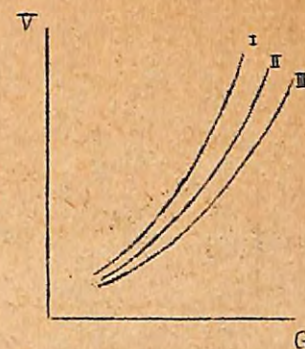
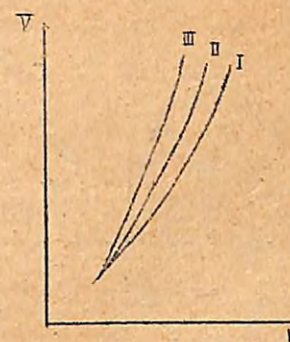
1) 直径は、樹高との関係式 $D = aH^b$ 等の式によりその常数をデータを使用し、最小自乗法で決定し、林令 → 樹高 → 直径と林令 → 直径の二数値に相互に矛盾を生じないようにフリーハンドで修正し、平均樹高直径を決定する。



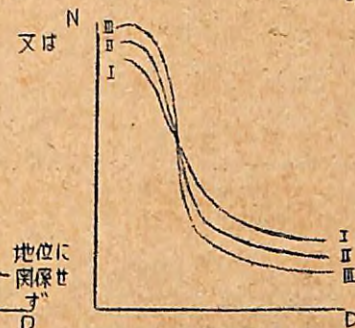
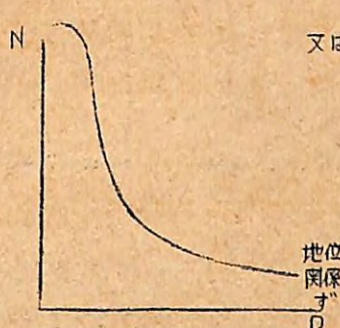
Hの小さな時はI II IIIはなる場合がある。



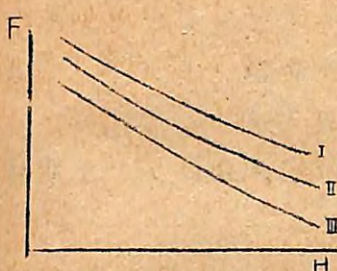
2) 幹材積は既述の方法を行うと共に $V = aH^d$ 等により検討する。



3) 本数も既述の方法を行うと共に $N = aD^{-c}$ 等の式により検討する。



4) 平均樹高と林令形数との関係

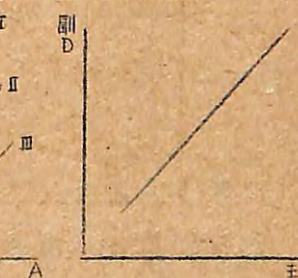
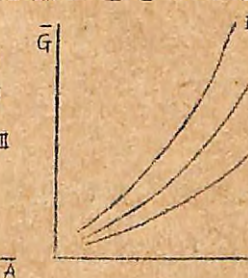
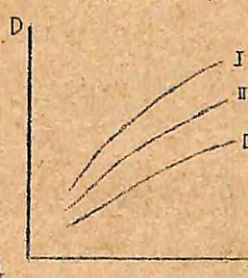


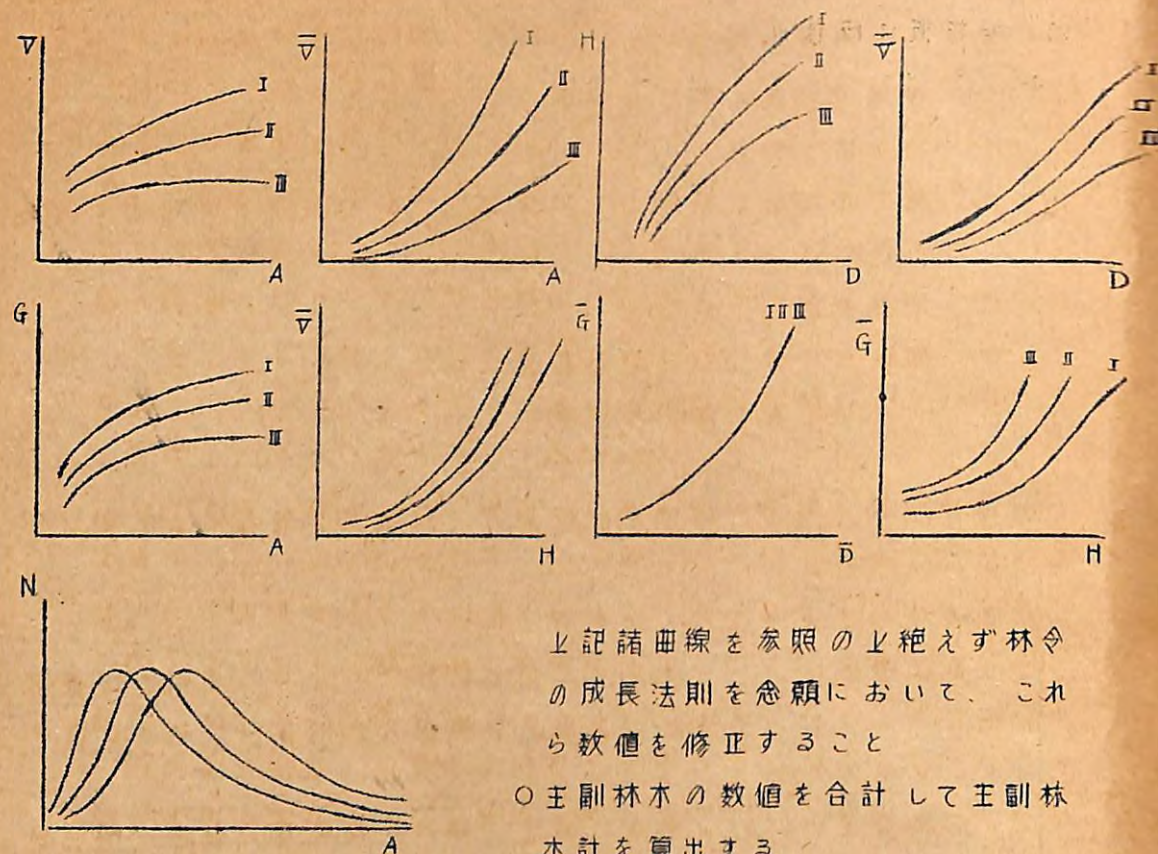
副林木

副林木についても、樹高、直径、幹材積、断面積等の成長諸因子につき吟味をし、不適当な資料は棄却する。

棄却した資料について、四項目について主林木の対応する因子（例主林木樹高、副林木樹高）に対し、殆んど一次の相関々係を有するので之を利用して決定する。

尚本数については主林木の前後期の差を以て副林木の本数とする。





上記諸曲線を参照の上絶えず林令の成長法則を念願において、これら数値を修正すること

○主副林木の数値を合計して主副林木計を算出する

連年成長量

前期後期の主林木幹材積の差に期間内の副林木材積を加えて期間年数で除す

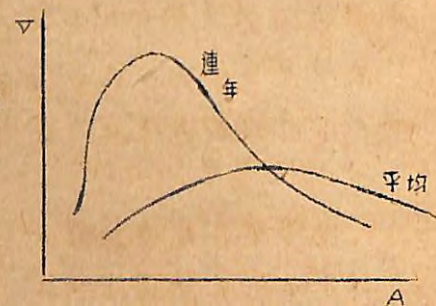
平均成長量

その年迄の主副林木合計材積を年数で除したもの

成長率

複利算公式(ライプニッツ式)又は
フレスラー式により算出

$$P = \left(\sqrt[n]{\frac{M}{m}} - 1 \right) \times 100 \quad P = \frac{M - m}{M + m} \times \frac{200}{n}$$



収穫表を調製した場合、調製説明書を添製しおくとよい。その内容は国有林の場合は次の通りである。

- (1) 地域決定の根拠
- (2) 標準地選定に関する事項
- (3) 標準地一覧表
- (4) 標準地調製に使用した計算方法、吟味方法及実測値に対する精密度
- (5) 収穫表使用上の注意
- (6) 調製年月日及調製担当者官氏名
- (7) その他必要と認める事項

標準地調査一覧表、標準地地況林況一覧表及収穫表のヒナ型は別表(1)(2)(3)にある。

収穫表使用上の注意の一例を示す。

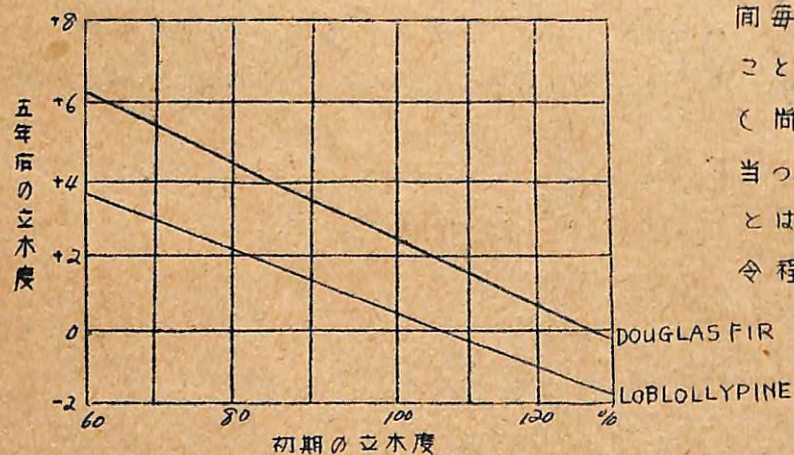
- (1) 本収穫表は、一地区すぎ人工植栽林において、正常な成長過程にあるものの各種の成長因子の数値を令階毎、地位毎に表示したものである。
- (2) 本表は主として、地位の判定、材積及収穫量の査定、成長量の想定、向伐の指針等を使用するものとする。
- (3) 本表において、主林木とは、樹種、地位相当の向伐を施行した際残存される林木をい、副林木とは、その際伐採される林木をいう。
向伐は寺崎式B種を基準とする。
- (4) 平均胸高直径は、平均胸高断面積に対応するものをもつてした。
- (5) 連年成長量の計算は、後期の主副林木合計材積と、前期の主林木年数を期間年数で除して求めた。
成長率の計算には、一式を用いた。
平均成長量は、主副林木合計材積をその年数で除したものである。
- (6) その他、欄内の項目で特に説明を要するものについて記載する(林令等)

(7) 与えられた林令の地位を判定しようとする場合は、林令を先づ査定し、次に主林木の平均樹高を求め、これが收穫表の地位何等地に属するかを定める。

但し、主林木の平均樹高を求めるには若干本の平均胸高直径に近い木を抽出し、その平均によつて求めるか、直径に対する樹高の曲線を描き、平均胸高直径に相当する樹高を求めてもよい。

(8) 材積を査定しようとする際は、(7)により求めた平均樹高から使用すべき地位の表を定め、その表から現実林の年令に対応した材積を求める。現実林に丁度対応する年令が表に示されていないときは、補間して求める。この値に現実林と表の樹高の比を乗じ、さらに立木度を乗じて決定する。立木度は、現実林の毎町胸高断面面積と表のそれとの比とする。立木度はもし本数比で現わすとすれば断面面積や材積の場合より多少下廻る。(10%内外)から注意を要する。

(9) 将来の收穫量、成長量を推定する場合、(8)の要領で行うか必ず表の期間をこえた推定を行わないこと。もし、8年とか14年表の期間をこえて推定を行う必要がある場合は、表の期間毎に区切つて行うことが肝要である。



に増加する率が大であることである。この面の研究は未だ日本ではなされてない。

Gehrhardt 式 $G = dZ(2-d)$ 陰樹
 $G = dZ(1.7-0.7d)$ 陽樹

G : 10年間の定期成長 (現実林)

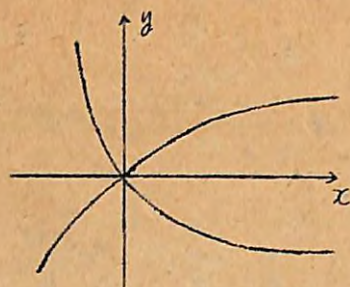
Z : (法正林)

d : 立木度

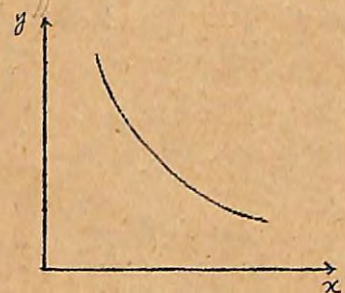
() : 修正項

(9) 間伐の指針として利用するときは現実林の林令、主林木の平均胸高直径に対応する表の本数を求める。表に丁度示されていず中間の値の時は補間して求める。而してこの本数に対する現実林の本数を比較して、間伐の基準とする。

(10) その他必要事項を記載する。



拋物線状又は双曲線状曲線 $y = a + bx^2$
 $x^2 = x$ とすれば 一次式



拋物線又は双曲線 $y = ax^b + c$
 $y - c = ax^b$
 $\log(y - c) = \log a + b \log x$
 対数方眼紙上で直線

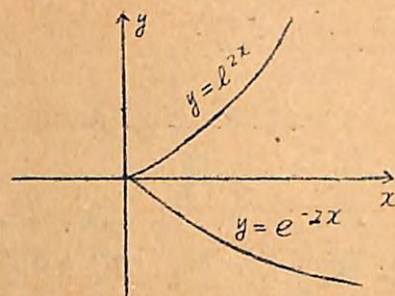
Cのきめ方 実験値を現す曲
 線上で二点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) を選び、更にこの曲線上第三の点
 (x_3, y_3) を $x_3 = \sqrt{x_1 x_2}$ ならしめるように選定し y_3 の値を定める。
 これら三点は曲線上にあるから原方程式を満足しなければならぬ。
 即ち

$$y_1 = ax_1^b + c, \quad y_2 = ax_2^b + c, \quad y_3 = ax_3^b + c$$

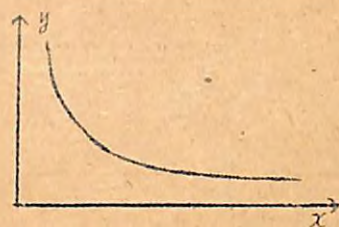
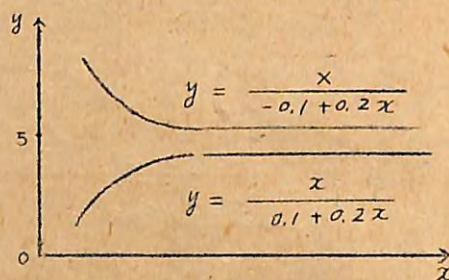
$$x_3 = \sqrt{x_1 x_2} \text{ だから } x_3^b = \sqrt{x_1^b x_2^b} \quad ax_3^b = \sqrt{ax_1^b ax_2^b}$$

$$y_3 - c = \sqrt{(y_1 - c)(y_2 - c)} \quad \therefore C = \frac{y_1 y_2 - y_3^2}{y_1 + y_2 - 2y_3}$$

このようにして C を定めた後 $\log x$, $\log(y - c)$ のグラフを描いて
 略直線となれば常法により a, b を決定する

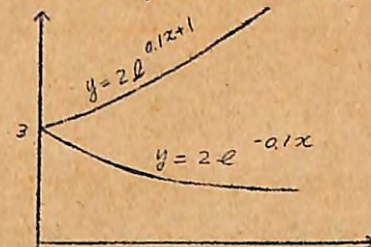


双曲線 $y = \frac{x}{a+bx}$ 又は $\frac{x}{y} = a+bx$
 漸近線は $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{1}{b}$ とな
 る。
 $(x, \frac{x}{y})$ 又は $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ のグ
 ラフを描けば直線となる。



指数曲線 $y = ae^{bx} + c$
 漸近線は $y = c$ となる。

$$\log(y - c) = \log a + bx \log e$$



曲線上に (x_1, y_1) , (x_2, y_2) をとり
 $x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ なるように原曲
 線上にとつて y_3 をきめる。

$$y_1 = ae^{bx_1} + c, \quad y_2 = ae^{bx_2} + c, \quad y_3 = ae^{bx_3} + c$$

$$(b \log e)x_3 = \frac{1}{2} \{ (b \log e)x_1 + (b \log e)x_2 \}$$

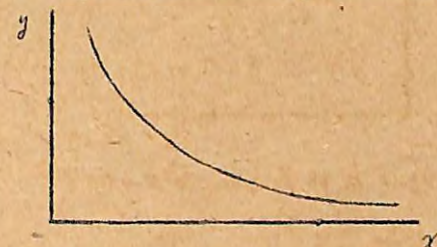
$$\log \frac{y_3 - c}{a} = bx_3 \log e = \frac{1}{2} \{ (b \log e)x_1 + (b \log e)x_2 \}$$

$$= \log \sqrt{\frac{(y_1 - c)(y_2 - c)}{a^2}}$$

$$y_3 - c = \sqrt{(y_1 - c)(y_2 - c)}$$

$$C = \frac{y_1 y_2 - y_3^2}{y_1 + y_2 - 2y_3}$$

$y = a + bx + cx^2$ 拋物線



(1) 描かれた実験値の曲線上の任意の一点 (x_0, y_0)

をとれば $y_0 = a + bx_0 + cx_0^2$

$$y - y_0 = b(x - x_0) + c(x^2 - x_0^2)$$

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = (b + cx_0) + cx$$

この式は $\frac{y - y_0}{x - x_0}$ と x について直線式である。

(2) もし x が等間隔即ち公差 h をもつ等差級数ならば

$$y' = a + b(x + h) + c(x + h)^2$$

$$\Delta y = y' - y = (bh + ch^2) + 2chx$$

x と Δy についての一次式

$$\text{双曲線 } y = \frac{x}{a+bx} + c$$

曲線上の任意の一点 (x_0, y_0) をと
 れば



$$y - y_0 = \frac{a(x - x_0)}{(a + bx)(a + bx_0)}$$

$$\frac{x - x_0}{y - y_0} = (a + bx_0) + \frac{b}{a}(a + bx_0)x$$

$(x, \frac{x - x_0}{y - y_0})$ のグラフが略直線

$$y = a + bx + ce^{dx}$$

x が等間隔 h の場合

$$y' = a + b(x + h) + ce^{d(x+h)}$$

$$\Delta y = y' - y = bh + ce^{dx}(e^{dh} - 1)$$

Δy と $\Delta y'$ が隣りの値とすると

$$\Delta y' = bh + ce^{d(x+h)}(e^{dh} - 1)$$

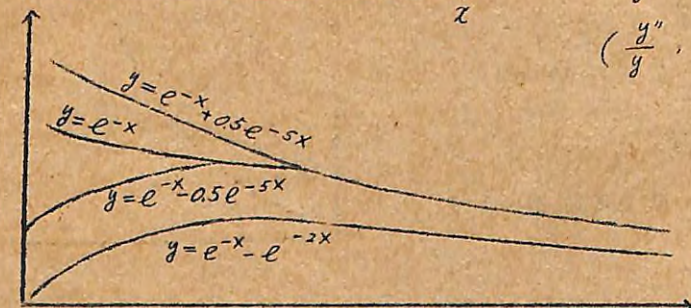
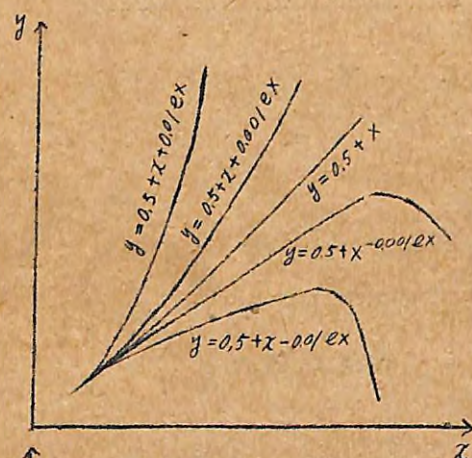
$$\Delta^2 y = \Delta y' - \Delta y = ce^{dx}(e^{dh} - 1)^2$$

$$\log \Delta^2 y = \log C + x \cdot d \log e + \log (e^{dh} - 1)^2 \quad (*)$$

x と $\log \Delta^2 y$ の一次式

(*) により C, d を定め 次に $y - ce^{dx} = a + bx$ とし

$(x, y - ce^{dx})$ の直線をかき a, b をきめる



$$y = ae^{bx} + ce^{dx}$$

x が等間隔 h の場合

$$y = ae^{bx} + ce^{dx}$$

$$y' = ae^{bx}e^{bh} + ce^{dx}e^{dh}$$

$$y' = ae^{bx}e^{2bh} + e \cdot e^{dx}e^{2dh}$$

この三式から e^{bx}, e^{dx} を消去すれば

$$\frac{y''}{y} = (e^{bh} + e^{dh}) \frac{y'}{y} - e^{(b+d)h}$$

$(\frac{y''}{y}, \frac{y'}{y})$ は一次式

多項式 $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$

x が等間隔

$$\Delta y = (bh + ch^2 + dh^3) + (2bh + 3dh^2)x + 3dhx^2$$

$$\Delta^2 y = (2bh^2 + 6dh^2) + 6dhx$$

$$\Delta^3 y = 6dh^3$$

x と $\Delta^2 y$ の図は直線, $\Delta^3 y$ の値は定数

$$y = \frac{x^n}{px^n + qx^{n-1} + r} \quad \text{式 } n \text{ の定め方}$$

$$px^n + qx^{n-1} + r = \frac{x^n}{y}$$

n の略近値を求めるには 任意の公比 $R (> 1)$ を有する等比級

数をなす x_1, x_2, x_3, x_4 (年令) を選び、之に対する測定値

y_1, y_2, y_3, y_4 と共に原方程式に代入し、四個の方程式を依り

P, Q, R を消去すると次式が得られる

$$R^n = \frac{(x_2 - x_1) \frac{x_3}{y_3} + (x_3 - x_2) \frac{x_1}{y_1} - (x_3 - x_1) \frac{x_2}{y_2}}{(x_2 - x_1) \frac{x_3}{y_4} + (x_3 - x_2) \frac{x_1}{y_2} - (x_3 - x_1) \frac{x_2}{y_3}}$$

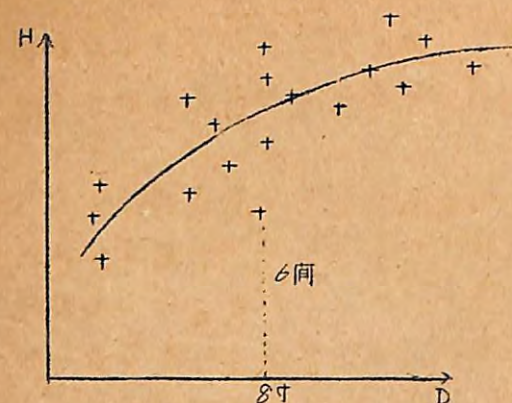
或は

$$R^n = \frac{(\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2}) - R(\frac{1}{y_2} - \frac{1}{y_3})}{(\frac{1}{y_2} - \frac{1}{y_3}) - R(\frac{1}{y_3} - \frac{1}{y_4})}$$

n を算出し、 n の値を小数以下四捨五入し、整数としたものを確定値として用いる。原式は P, Q, R の一次式となる。但し、実測値、殊に y_1 及び y_4 に着しい異常値のあるときは n が突飛な値をとることが多いから、この場合は適当な方法で異常値に修正を施すか或は一組以上の測定値により算出平均するのがよい。

曲線図法及フリー・ハンド曲線について

林分より若干の林木を抽出してその直径及び樹高を測定し、直径を横軸、樹高を縦軸にとり、点を落して最小自乗法或は徒手法により曲線をひき、そしてその林分内の他の直径のみをはかった林木の樹高を推定するのに利用するということはよく林学で行われることである。



この方法の長所

- (1) 樹高はその木の直径の測定値により定まるのみならず、他のすべての測定値にも影響をうける。特に隣の直径階に影響をうける。上図で実測値が径8寸、高6向に対し曲線の値ははるかに大きい。この

値は絶対的に正しくはないが、この場合の実測値よりは確からしい。即ち標本値に誤差があることがいることも考えられるが、樹高と直径にある関係を律する法則があるように思われ、しかもこの法則によるときは、その法則を考えると全体形から或は前後の値等の関係から曲線の値が正しいように見える。而してこの関係から収集するデータが比較的少くとも合理的な結果が得られる。

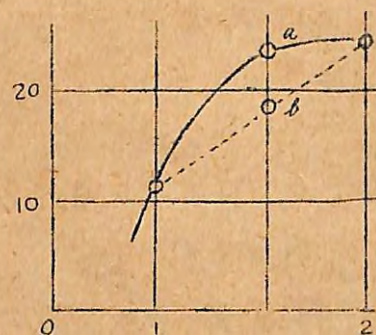
- (2) 図の曲線の形から直径成長と樹高成長の関係が一見して判然とする。直径の小なる向は樹高成長は早いが大になると樹高成長は殆んど増加しない等。

- (3) 補間によりデータにおいてなかつた直径の林木が出現し、その直径を測り、樹高を推定することができる。さらに目分量で8,8寸等に対する樹高もわかる。しかも計算するより正確である。

- (4) 補外もできるが余り長いところを行くと危険である。

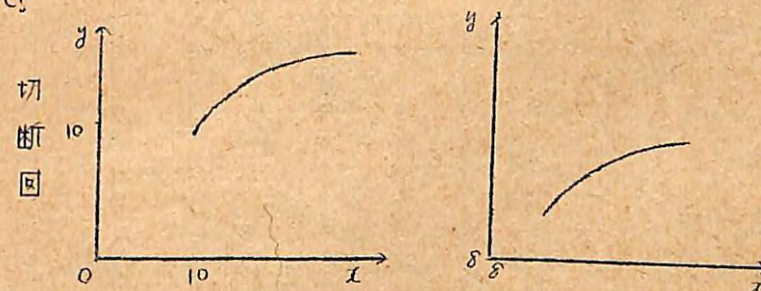
作図について

方眼紙大きさは四六倍判程度。色は緑が写真にもよいし、目も疲れない。目盛は1mm



独立変数は横軸に従属変数を縦軸にとり、即ち推定するものを縦軸にとること。もし反対にしたら大変な間違いを惹起することがある。

縮尺はy軸はできるだけ精度と一致させる。もし尺迄正確に測つたなら線の間隔を尺に取ればよい。図はできるだけ傾斜が急にならぬよう横に長くするのがよいからx軸の方は、そのようにして目盛をきめる。尚使用単位に対してまず目が1,2,5又は10あてるのがよい。



両者の関係の全貌をつかむことができない。

曲線のかき方

正確にきれいにかくこと。

データに忠実なること。

徒手曲線の正確さを判断するための基準

- (1) 曲線から正負の偏差の和が0になること。
- (2) 偏差の絶対値の和ができるだけ小さいこと。
- (3) 曲線の形が過去の経験或は基礎となる法則に一致すべきこと。

- (1) 曲線の吟味は推定値と実測値の差をもつて行う。

直 径	樹 高		差	
	実測値	推定値	+	-
6寸				
...				
20寸				
計				
(+) (-) の和				

又先づ、曲線と上の点のますの計をかきえ、更に下の点のますの計をかきえてその差をしらべる。この際必ず曲線のまゝの方向にかきえること。

この差が正だったら曲線を上に多少ずらす 負だったら下げる

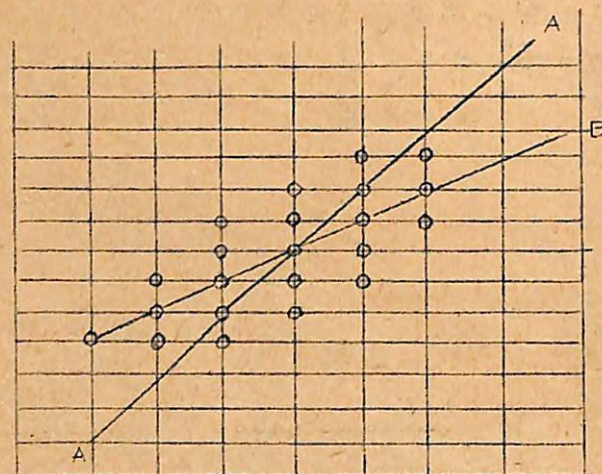
- (2) 正負の偏差の和が 0 であることは必ずしも曲線が正しくあらわされていることにはならない。一端の正が他端の負を打ち消しているように傾いている場合がそうである。

(図参照)

AA 不正確

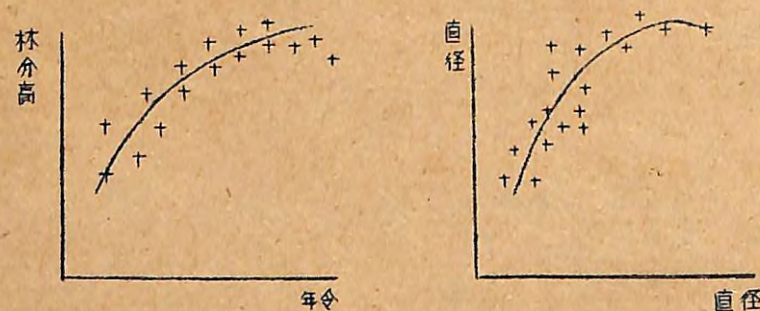
BB の方が不正確

この場合曲線の上部中部下部にわけて (1) の計算を行うのもよいが、簡便法としては曲線の上部の点と下部の点の箇数が同一数であるかどうか



かを見る。この方法は曲線のまわりの点の分布が対称であるときはよい。又一般に点の数が多いたときは簡単で有効である。併し点の数が少いたときは困るので、偏差の絶対値の和が最小になるよう調整するのがより正確な方法である。

- (3) 平均偏差の和が最小か必ずしも妥当といえないことがある。

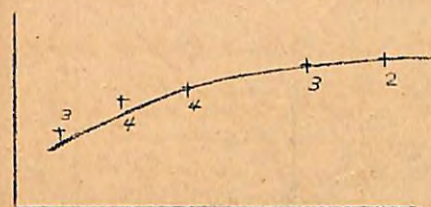


測定値が少く、過去の経験より曲線型か不明で且つ実測値が直線状に分布しているときはできるだけ直線をおてはめた方がおとの操作がやり易い。併し、関係が直線であると速断することは危険である。眞の直線関係は自然界には稀である。

平均値によつて図をかくこと

データが多いときは便利 点のそばに平均した箇数をかいておくこと。

このような曲線の吟味の際は 残差を箇数倍する必要がある



データが誤差が多いとかららばりが大なときは、x軸の方の階級の中を大きくするとよい。

クロスチェックによる吟味

同一データがこの曲線図法で二つ以上の関係の研究に用いられる場合はクロスチェックによつて曲線の適合性を吟味することができる。

直径によつて、林木の全高と利用高を推定しようとする場合、サンプリングで若干本につき三高を測定し直径対全樹高曲線、直径対利用高曲線をかいた。全高-利用高を梢端長とすると直径対梢端長の曲線をかけば、この三者は夫々一致しなければならない。即ち全樹高の曲線値から利用高の曲線値をひいたものは梢端長の曲線値に一致すればよく適合しているといえる。もしあわないときはこの差を三曲線に等しく分配する。勿論この三曲線の一つのみを修正すべき充分の理由があれば、その一つのみを修正すればよからう。

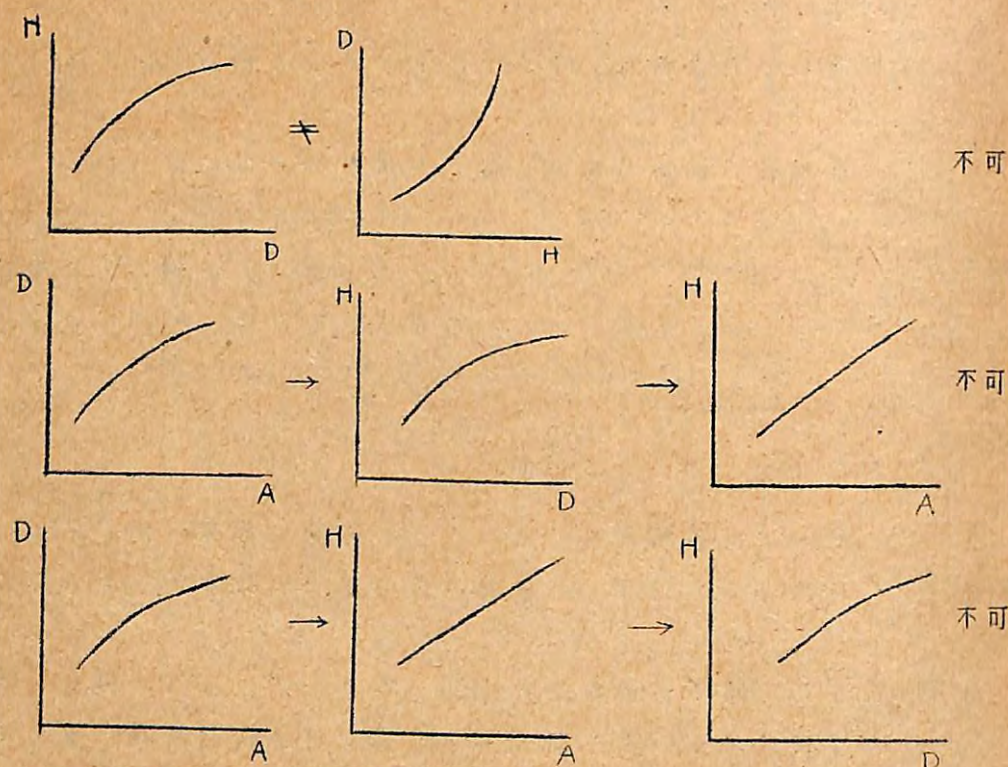
比を利用してクロスチェックする場合もある

立木材積 × 利用率 = 丸太材積

$$M \times R = V$$

直径に対して R の曲線をかき、これに相当するよう M、V の直径に対する曲線を修正する。

曲線についての注意



(地位別年令別) 毎町断面積(G) = 本数(N) × 単水平均断面積(G')
 大文字は収穫表数値 これに対し各標準値の実測値を対応する小文字で表わすと $g = n \times g'$

$$\frac{g}{G} = 1.20 \quad \frac{n}{N} = 0.96 \quad \frac{g'}{G'} = 1.25$$

$0.96 \times 1.25 = 1.20$ になつていればよい。

推定値の標準誤差

残差 残差平方和

正規方程式の解法

§1 M, N が相互に独立なる場合 M, N の積の分散

観測値 M, N が夫々誤差 G_M, G_N を含み M, N の母集団の真の特性値を μ_M, μ_N とすれば

$$M = \mu_M + G_M$$

$$N = \mu_N + G_N$$

真の誤差 G_M, G_N は相互に独立で各正負同様の起り易さとする。そうすれば積は

$$\begin{aligned} MN &= (\mu_M + G_M)(\mu_N + G_N) \\ &= \mu_M \mu_N + \mu_M G_N + \mu_N G_M + G_M G_N \end{aligned}$$

積の誤差 G_{MN} は

$$G_{MN} = (MN - \mu_M \mu_N) = \mu_M G_N + \mu_N G_M + G_M G_N$$

上式の自乗の平均値の積の分散である。

G_M, G_N の平方の平均値は μ_M, G_N の自乗の平均値 μ_N, G_N のそれと比較して、無視出来。誤差が独立であるので

$$\sigma_{MN}^2 = \mu_M^2 \sigma_N^2 + \mu_N^2 \sigma_M^2$$

実際に M, N は μ_M, μ_N の推定値である。もし M, N が独立に分布していれば、標本分散の推定値を $V(M), V(N)$ とせば $V(MN) = M^2[V(N)] + N^2[V(M)]$ $V(MN)$ は MN の標本分散の推定値である。

§2. 正規方程式の誘導

観測値 y に対応する、推定値 Y が三箇の独立変数 x_1, x_2, x_3 により $Y = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$ で表はされるとすれば、 b_1, b_2, b_3 なる回帰係数の値は最小自乗法により計算される。最小自乗法の応用は未知の b_1, b_2, b_3 を残差平方和 $\sum (y - Y)^2$ を最小ならしめるよう決定することである。母集団の観測値 (y, x_1, x_2, x_3) の独立な n の組がある場合

はこのことは $S^2[(y-b_1x_1-b_2x_2-b_3x_3)^2] \dots\dots\dots (1)$
 を最小ならしめることである。又、もし観測値の全部が同じ重さ
 をもたす各 w なる重みを有する場合は重み付残差平方和

$$S^2[w(y-b_1x_1-b_2x_2-b_3x_3)^2] \dots\dots\dots (2)$$

を最小とすることである。(1)及び(2)の方程式では、三ヶの未知
 数を有するので、その平方和に関する自由度は $(n-3)$ である。
 その結果この場合にあつては残差の平均平方を与えるためには
 n ヶの観測方程式は3以上なければならぬ。(1)式は(2)式に於て
 $w=1$ の特別な場合であるから後者について説明する。

微分學から知られるように(2)式の最小値はその b_1, b_2, b_3
 に関するオ一次導函数を0に等しいとおいて得られる。順々に各
 未知係数に関して(2)式を微分して各オ一次導函数を0に等しいと
 おくと

$$2 \frac{\partial}{\partial b_1} [w(y-b_1x_1-b_2x_2-b_3x_3)(-x_1)] = 0$$

$$2 \frac{\partial}{\partial b_2} [w(y-b_1x_1-b_2x_2-b_3x_3)(-x_2)] = 0$$

$$2 \frac{\partial}{\partial b_3} [w(y-b_1x_1-b_2x_2-b_3x_3)(-x_3)] = 0$$

を得る。

2で割って積と和で整頓すれば

三つの正規方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} b_1[S(w x_1^2)] + b_2[S(w x_1 x_2)] + b_3[S(w x_1 x_3)] &= [S(w x_1 y)] \\ b_1[S(w x_1 x_2)] + b_2[S(w x_2^2)] + b_3[S(w x_2 x_3)] &= [S(w x_2 y)] \\ b_1[S(w x_1 x_3)] + b_2[S(w x_2 x_3)] + b_3[S(w x_3^2)] &= [S(w x_3 y)] \end{aligned} \right\} (3)$$

観測から得られた数量は〔 〕内に入れられる。未知の b_1, b_2, b_3 がこの三式を同時に満足する様に解くとよい。

観測方程式の重みが同じように定められている場合は w は1
 に等しいと考えてもよいから(3)式の各項から除いて差支へない。
 そうすると(1)式より直接得た式と同じになる正規方程式が

$$Y = b_1 X_1 + b_2 X_2 \dots\dots\dots (4)$$

の形を取るように、未知定数が二ヶしかない場合は(3)式から第
 三列と第三行を除けばよいだらう。此の場合の正規方程式として

は次の二を得る。

$$\left. \begin{aligned} b_1[S(w x_1^2)] + b_2[S(w x_1 x_2)] &= [S(w x_1 y)] \\ b_1[S(w x_1 x_2)] + b_2[S(w x_2^2)] &= [S(w x_2 y)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

§3. 回帰に独立な平方和

これは上の(1)又は(2)式に示される平方和である。(2)式を展開す
 ると、

$$\begin{aligned} S^2[w(y-b_1x_1-b_2x_2-b_3x_3)^2] &= S^2(wy^2) + b_1^2 S^2(wx_1^2) \\ &+ b_2^2 S^2(wx_2^2) + b_3^2 S^2(wx_3^2) - 2b_1 S^2(wx_1 y) - 2b_2 S^2(wx_2 y) \\ &- 2b_3 S^2(wx_3 y) + 2b_1 b_2 S^2(wx_1 x_2) + 2b_1 b_3 S^2(wx_1 x_3) \\ &+ 2b_2 b_3 S^2(wx_2 x_3) \end{aligned}$$

これは多小扱い難い。幸いかなり簡単になる。上式を次のよう
 に書き直せる

$$\begin{aligned} S^2[w(y-b_1x_1-b_2x_2-b_3x_3)] &= S^2(wy^2) + b_1 \{b_1 S^2(wx_1^2) \\ &+ b_2 S^2(wx_1 x_2) + b_3 S^2(wx_1 x_3)\} \\ &+ b_2 \{b_1 S^2(wx_1 x_2) + b_2 S^2(wx_2^2) + b_3 S^2(wx_2 x_3)\} \\ &+ b_3 \{b_1 S^2(wx_1 x_3) + b_2 S^2(wx_2 x_3) + b_3 S^2(wx_3^2)\} \\ &- 2b_1 S^2(wx_1 y) - 2b_2 S^2(wx_2 y) - 2b_3 S^2(wx_3 y) \end{aligned}$$

右辺の括弧内の各項は §2 の(3)式の左辺と同じものであるから

$$\begin{aligned} S^2[w(y-b_1x_1-b_2x_2-b_3x_3)] &= S^2(wy^2) + b_1 S^2(wx_1 y) \\ &+ b_2 S^2(wx_2 y) + b_3 S^2(wx_3 y) - 2b_1 S^2(wx_1 y) \\ &- 2b_2 S^2(wx_2 y) - 2b_3 S^2(wx_3 y) \end{aligned}$$

となり残差の重み付平方和は次のようになる

$$\begin{aligned} S^2[w(y-b_1x_1-b_2x_2-b_3x_3)^2] &= S^2(wy^2) - b_1 S^2(wx_1 y) \\ &- b_2 S^2(wx_2 y) - b_3 S^2(wx_3 y) \end{aligned}$$

此の形から次のことが明らかになる。自由度 n の y の重み付平方和 $S^2(wy^2)$ は回帰に基づく部分(自由度3)即ち
 $b_1 S^2(wx_1 y) + b_2 S^2(wx_2 y) + b_3 S^2(wx_3 y)$ と自由度 n
 $(n-3)$ の回帰に關係のない残りの部分即ち

$$S^2[w(y-b_1x_1-b_2x_2-b_3x_3)] \text{ とに分かれる。}$$

次にフィッシャの所謂C乗数(フィッシャー著 統計的方法 29
29, ノ節参照)を述べるが、これは独立変量のみに依存するもので、
この意味、使用法を示すために、§4, §5, §6, §7, 節を順
次説明する。

§4. 行列式による正規方程式の解法

回帰方程式 $Y = b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3$ が与えられたとす
る。簡単にするために次のようにおく。

0, 1, 2, 3で夫々 Y, X_1, X_2, X_3 を現はし

$$\bar{S}(Y^2) = (0,0) : \bar{S}(YX_1) = (0,1) : \bar{S}(YX_2) = (0,2) : \bar{S}(YX_3) = (0,3)$$

$$\bar{S}(X_1^2) = (1,1) : \bar{S}(X_1X_2) = (1,2) : \bar{S}(X_1X_3) = (1,3)$$

$$\bar{S}(X_2^2) = (2,2) : \bar{S}(X_2X_3) = (2,3)$$

$$\bar{S}(X_3^2) = (3,3)$$

右辺の丸括弧は n の独立な組の和を意味する。この表示法によ
れば回帰方程式は次のように現はされる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{I} \quad b_1(11) + b_2(12) + b_3(13) = (01) \\ \text{II} \quad b_1(12) + b_2(22) + b_3(23) = (02) \\ \text{III} \quad b_1(13) + b_2(23) + b_3(33) = (03) \end{array} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

独立変数式で行列式をつくると

$$D = \begin{vmatrix} (11) & (12) & (13) \\ (12) & (22) & (23) \\ (13) & (23) & (33) \end{vmatrix} = (11)A_{11} + (12)A_{12} + (13)A_{13} \dots\dots(2)$$

A_{11}, A_{12}, A_{13} は夫々元 $(11), (12), (13)$ の余因子である。

(1) の I, II, III に夫々 A_{11}, A_{12}, A_{13} を乗ずると、

$$\left. \begin{array}{l} b_1(11)A_{11} + b_2(12)A_{11} + b_3(13)A_{11} = (01)A_{11} \\ b_1(12)A_{12} + b_2(22)A_{12} + b_3(23)A_{12} = (02)A_{12} \\ b_1(13)A_{13} + b_2(23)A_{13} + b_3(33)A_{13} = (03)A_{13} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

この(3)式を加えると

$$b_1[(11)A_{11} + (12)A_{12} + (13)A_{13}] + b_2[(12)A_{11} + (22)A_{12} + (23)A_{13}] \\ + b_3[(13)A_{11} + (23)A_{12} + (33)A_{13}] = (01)A_{11} + (02)A_{12} + (03)A_{13}$$

第2, 第3の括弧の項は一行が同じ行列式となるから0となり、
(3)式は次のようになる。

$$b_1[(11)A_{11} + (12)A_{12} + (13)A_{13}] = (01)A_{11} + (02)A_{12} + (03)A_{13}$$

$$\therefore b_1 = \frac{(01)A_{11} + (02)A_{12} + (03)A_{13}}{(11)A_{11} + (12)A_{12} + (13)A_{13}}$$

又は、

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} (01) & (12) & (13) \\ (02) & (22) & (23) \\ (03) & (23) & (33) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (11) & (12) & (13) \\ (12) & (22) & (23) \\ (13) & (23) & (33) \end{vmatrix}} = \frac{\text{ " }}{D}$$

回帰係数 b_2, b_3 も同様にして得られる。(2)式は又次の形
にあらはされる。

$$D = (12)A_{12} + (22)A_{22} + (23)A_{23}$$

$$D = (13)A_{13} + (23)A_{23} + (33)A_{33}$$

$$\therefore b_2 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} (11) & (01) & (13) \\ (12) & (02) & (23) \\ (13) & (03) & (33) \end{vmatrix} \quad b_3 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} (11) & (12) & (01) \\ (12) & (22) & (02) \\ (13) & (23) & (03) \end{vmatrix}$$

直接使用の便を考慮して次のように変形しておいてもよい。

$$b_1 = \frac{1}{D} [(01)A_{11} + (02)A_{12} + (03)A_{13}] \dots\dots\dots (4a)$$

$$b_2 = \frac{1}{D} [(01)A_{12} + (02)A_{22} + (03)A_{23}] \dots\dots\dots (4b)$$

$$b_3 = \frac{1}{D} [(01)A_{13} + (02)A_{23} + (03)A_{33}] \dots\dots\dots (4c)$$

§5. C乗数の計算

C乗数を上に用いた記号を用いて定義する

$$C_{11} = \frac{A_{11}}{D} ; \quad C_{12} = \frac{A_{12}}{D} ; \quad C_{13} = \frac{A_{13}}{D}$$

$$C_{22} = \frac{A_{22}}{D} ; \quad C_{23} = \frac{A_{23}}{D}$$

$$C_{33} = \frac{A_{33}}{D}$$

上の (4a), (4b), (4c) の各式に夫々 C 係数を代入すると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= C_{11}(01) + C_{12}(02) + C_{13}(03) \\ b_2 &= C_{12}(01) + C_{22}(02) + C_{23}(03) \\ b_3 &= C_{13}(01) + C_{23}(02) + C_{33}(03) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

もし、C 係数の数値が分れば回帰係数 b_i は、このやうに簡単に計算できる。此れは上述の議論から推論出来る

(2) (3) 式より

$$(11) A_{11} + (12) A_{12} + (13) A_{13} = 0$$

$$(12) A_{11} + (22) A_{12} + (23) A_{13} = 0$$

$$(13) A_{11} + (23) A_{12} + (33) A_{13} = 0$$

此れらを D で除すと $\frac{A_{11}}{D} = C_{11}$, $\frac{A_{12}}{D} = C_{12}$, $\frac{A_{13}}{D} = C_{13}$ であるから

$$\left. \begin{aligned} C_{11}(11) + C_{12}(12) + C_{13}(13) &= 1 \\ C_{11}(12) + C_{12}(22) + C_{13}(23) &= 0 \\ C_{11}(13) + C_{12}(23) + C_{13}(33) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6a)$$

此れらの式は独立変数のみしか含まないからこの式によりて C_{11} , C_{12} , C_{13} の数値をきめることができる。同様に次のことが示される。

$$\left. \begin{aligned} C_{12}(11) + C_{22}(12) + C_{13}(13) &= 0 \\ C_{12}(12) + C_{22}(22) + C_{13}(23) &= 1 \\ C_{12}(13) + C_{22}(23) + C_{13}(33) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6b)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{13}(11) + C_{23}(12) + C_{33}(13) &= 0 \\ C_{13}(12) + C_{23}(22) + C_{33}(23) &= 0 \\ C_{13}(13) + C_{23}(23) + C_{33}(33) &= 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6c)$$

§6. 回帰係数の分散並びに共分散

例として b_1 の分散の推定値 $[V(b_1)]$ の求め方を詳説する。

回帰方程式 $Y = b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3$ に於て各観測値 (従属変数) は二成分の和とみなされる。即ち独立変数 $X_1, X_2,$

X_3 の一定の組に対応する従属変数 Y の真の値 $\mu_{0.123}$ 観測値の真の誤差 $\epsilon_{0.123}$ との和である。

$$Y = \mu_{0.123} + \epsilon_{0.123}$$

b_1 を上の §5 の (5) 式に従い定義する。即ち

$$b_1 = C_{11}(01) + C_{12}(02) + C_{13}(03)$$

此の式の中の積の和は次のようになる。

$$(01) = \sum [X_1(\mu_{0.123} + \epsilon_{0.123})] : (02) = \sum [X_2(\mu_{0.123} + \epsilon_{0.123})]$$

$$(03) = \sum [X_3(\mu_{0.123} + \epsilon_{0.123})]$$

故に、上の b_1 は次のようになる。

$$b_1 = [C_{11} \sum (X_1 \mu_{0.123}) + C_{12} \sum (X_2 \mu_{0.123}) + C_{13} \sum (X_3 \mu_{0.123})] + [C_{11} \sum (X_1 \epsilon_{0.123}) + C_{12} \sum (X_2 \epsilon_{0.123}) + C_{13} \sum (X_3 \epsilon_{0.123})]$$

上式でオノ項の括弧内は真の (母集団) 回帰係数 β_1 である。オノ項の括弧内は $b_1 - \beta_1$ に等しいから b_1 の真の誤差を表はしている。

$$\therefore (b_1 - \beta_1) = C_{11} \sum (X_1 \epsilon_{0.123}) + C_{12} \sum (X_2 \epsilon_{0.123}) + C_{13} \sum (X_3 \epsilon_{0.123})$$

而して之は次のやうにも書くことが出来る

$$(b_1 - \beta_1) = \sum \{ \epsilon_{0.123} [C_{11} X_1 + C_{12} X_2 + C_{13} X_3] \}$$

さて b_1 の分散は大きい n と此のような独立変数と同一分布を有するすべての標本のすべての組に対する $(b_1 - \beta_1)$ の平方の平均である。

上式を平方し独立なる値の和の平方はその平方の和に等しいから

$$(b_1 - \beta_1)^2 = \sum \{ \epsilon_{0.123}^2 [C_{11} X_1 + C_{12} X_2 + C_{13} X_3]^2 \}$$

展開すると

$$\begin{aligned} (b_1 - \beta_1)^2 &= \sum \{ \epsilon_{0.123}^2 [C_{11}^2 X_1^2 + C_{12}^2 X_2^2 + C_{13}^2 X_3^2 \\ &\quad + C_{12} [C_{11} X_1 X_2 + C_{12} X_2^2 + C_{13} X_2 X_3 \\ &\quad + C_{13} [C_{11} X_1 X_3 + C_{12} X_2 X_3 + C_{13} X_3^2] \} \end{aligned}$$

$\epsilon_{0.123}$ の個々の値は独立変数とは関係ないから、上式は $\epsilon_{0.123}^2$ の平均値、即ち $\sigma_{0.123}^2$ にその他の項の和を乗じたものとしてあ

らわされるだらう。

此の後者を上の §5 の記号即ち

$$\xi(X^2) = (11) : \xi(X, X_2) = (12) \quad \text{云々}$$

で表現すれば、上式は次のようにかゝれる

$$\begin{aligned} (b_1 - \beta_1)^2 &= \sigma_{a,123}^2 \{ C_{11}(11) + C_{12}(12) + C_{13}(13) \\ &\quad + C_{12}(22) + C_{13}(23) \\ &\quad + C_{13}(33) + C_{12}(23) + C_{13}(33) \} \\ &= C_{11} \sigma_{a,123}^2 \end{aligned}$$

何となれば §5 の (6a) 式よりオノ括弧は 1, 他は 0 となるからである。実際には、正確なる $\sigma_{a,123}^2$ はわからない。

回帰方程式の廻りの残差の平均平方即ち $S^2_{a,123}$ は、その不偏推定値である。それ故、回帰係数 b_1 の標本分散の推定値は、

$$V(b_1) = C_{11} S^2_{a,123} \quad \text{同様にして}$$

$$V(b_2) = C_{22} S^2_{a,123} \quad V(b_3) = C_{33} S^2_{a,123}$$

$$\text{Cov}(b_1, b_2) = C_{12} S^2_{a,123} \quad \text{Cov}(b_1, b_3) = C_{13} S^2_{a,123}$$

$$\text{Cov}(b_2, b_3) = C_{23} S^2_{a,123}$$

§7. 回帰函数の分散

回帰方程式 $Y = b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3$ に於いて計算した Y の分散は函数の分散で

$$V(Y) = V(b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3)$$

である。此れは必ずしも相互に独立でない三項の和との分散であるから次のように表はされる。

$$\begin{aligned} V(Y) &= V(b_1 X_1) + V(b_2 X_2) + V(b_3 X_3) + 2 \text{Cov} \\ &\quad (b_1 X_1)(b_3 X_3) + 2 \text{Cov}[(b_1 X_1)(b_2 X_2)] \\ &\quad + 2 \text{Cov}[(b_2 X_2)(b_3 X_3)] \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

X_1, X_2, X_3 の値には抽出誤差がないので

$$V(b_1 X_1) = X_1^2 [V(b_1)] = X_1^2 C_{11} S^2_{a,123}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}[(b_1 X_1)(b_2 X_2)] &= X_1 X_2 [\text{Cov}(b_1, b_2)] \\ &= X_1 X_2 C_{12} S^2_{a,123} \end{aligned}$$

その他の項も同様に表はされる。

各独立変数に抽出誤差がないときは回帰方程式

$$Y = b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 \quad Y \text{ の分散は}$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= S^2_{a,123} [C_{11} X_1^2 + C_{22} X_2^2 + C_{33} X_3^2 + 2 C_{12} X_1 X_2 \\ &\quad + 2 C_{13} X_1 X_3 + 2 C_{23} X_2 X_3] = S^2 \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

S^2 は重みが 1 で回帰とは独立な残差の平均平方を表はし、 R は [] 内の量を表はす。故に $S^2 R$ は回帰方程式そのものに帰せられる抽出誤差の $V(Y)$ への寄与を表す。

式中の独立変数に抽出誤差があればその分散は

$$V(X_1) : V(X_2) : \text{Cov}(X_1, X_2)$$

$$V(X_3) : \text{Cov}(X_1, X_3)$$

$$\text{Cov}(X_2, X_3)$$

(7) 式の各項は積の分散と共分散を表はし、その各因子は抽出誤差があるものとする。即ち

$$V(b_1 X_1) = X_1^2 [V(b_1)] + b_1^2 [V(X_1)]$$

$$\text{Cov}[(b_1 X_1)(b_2 X_2)] = X_1 X_2 [\text{Cov}(b_1, b_2)] + b_1 b_2 [\text{Cov}(X_1, X_2)]$$

其の他の項も全様に表はされる。右辺のオノ項は (8) 式に既に含まれている。右辺のオノ二項の和を S^2 とすれば

$$\begin{aligned} S^2 &= b_1^2 [V(X_1)] + b_2^2 [V(X_2)] + b_3^2 [V(X_3)] + 2 b_1 b_2 [\text{Cov}(X_1, X_2)] \\ &\quad + 2 b_1 b_3 [\text{Cov}(X_1, X_3)] + 2 b_2 b_3 [\text{Cov}(X_2, X_3)] \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

明らかに S^2 は独立変量の抽出誤差に基づくものである。

一般に $Y = b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3$ の分散は (8) に (9) を加えれば求められる

$$\text{即ち} \quad V(Y) = S^2 R + S^2$$

§8. 回帰函数に適當なC乗数

$Y = a + b_1 (X_1 - \bar{X}_1) + b_2 (X_2 - \bar{X}_2) + b_3 (X_3 - \bar{X}_3)$ なる回帰方程式は a なる常数がついていただけ異なる。併し $a = \bar{Y}$ であるから、回帰方程式は

$$(Y - \bar{Y}) = b_1 (X_1 - \bar{X}_1) + b_2 (X_2 - \bar{X}_2) + b_3 (X_3 - \bar{X}_3)$$

記号をかえ $(Y - \bar{Y})$ を 0 , $(X_i - \bar{X}_i)$ を 1 云々で表はせば
変数間の平方和・積和は次の様に表はされる。

$$\begin{aligned} \sum [(Y - \bar{Y})^2] &= (0, 0); \quad \sum [(Y - \bar{Y})(X_1 - \bar{X}_1)] = (0, 1) \quad \text{等} \\ \sum [(X_1 - \bar{X}_1)(X_2 - \bar{X}_2)] &= (1, 2) \quad \text{''} \end{aligned}$$

括弧は n の独立の組の総和を示す。回帰係数の解に必要な正規方程式は §4 の (1) 式と同一となり、その結果

$$\begin{aligned} \text{I} \quad b_1(11) + b_2(12) + b_3(13) &= (0, 1) \\ \text{II} \quad b_1(12) + b_2(22) + b_3(23) &= (0, 2) \\ \text{III} \quad b_1(13) + b_2(23) + b_3(33) &= (0, 3) \end{aligned}$$

C 乗数はそれで (6a), (6b), (6c) 式と同一の式により計算される。

§9. 回帰函数 $Y = a + b_1(X_1 - \bar{X}_1) + b_2(X_2 - \bar{X}_2) + b_3(X_3 - \bar{X}_3)$ の分散

与えられた回帰方程式が $Y = a + b_1(X_1 - \bar{X}_1) + b_2(X_2 - \bar{X}_2) + b_3(X_3 - \bar{X}_3)$ とすれば、 Y の分散は次のようになる。

$$V(Y) = V(a) + V[b_1(X_1 - \bar{X}_1) + b_2(X_2 - \bar{X}_2) + b_3(X_3 - \bar{X}_3)]$$

即ち常数 a はその他の項とは独立だから $V(Y)$ は a の分散と回帰方程式のその他の部分の分散の和であらはされる。さて a の分散は X_1, X_2 及び X_3 が夫々 $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3$ である時の Y の分散であるから

$$V(a) = \frac{S^2_{0,123}}{n}$$

但し、 $S^2_{0,123}$ は重みが一の場合の残差の平均平方である。回帰方程式の残りの部分の分散は即ち

$V[b_1(X_1 - \bar{X}_1) + b_2(X_2 - \bar{X}_2) + b_3(X_3 - \bar{X}_3)]$ は必ずしも相互に独立でない各項の和の分散であるから展開すると次の様になる。

$$\begin{aligned} V[b_1(X_1 - \bar{X}_1) + b_2(X_2 - \bar{X}_2) + b_3(X_3 - \bar{X}_3)] \\ + 2\text{Cov}[b_1b_2(X_1 - \bar{X}_1)(X_2 - \bar{X}_2)] + \text{Cov}[b_2b_3(X_2 - \bar{X}_2)(X_3 - \bar{X}_3)] \end{aligned}$$

回帰方程式中の X_1, X_2, X_3 の値が抽出誤差を有するときは、上の各項、両因子とも抽出誤差を有する積の分散（又は）共分散となる。故に

$$V[b_1(X_1 - \bar{X}_1)] = (X_1 - \bar{X}_1)^2 [V(b_1)] + b_1^2 [V(X_1)]$$

$$\begin{aligned} V[b_2(X_2 - \bar{X}_2)] &= (X_2 - \bar{X}_2)^2 [V(b_2)] + b_2^2 [V(X_2)] \\ V[b_3(X_3 - \bar{X}_3)] &= (X_3 - \bar{X}_3)^2 [V(b_3)] + b_3^2 [V(X_3)] \\ (1) \quad \text{Cov}[b_1b_2(X_1 - \bar{X}_1)(X_2 - \bar{X}_2)] &= (X_1 - \bar{X}_1)(X_2 - \bar{X}_2) [\text{Cov}(b_1b_2)] + b_1b_2 [\text{Cov}(X_1, X_2)] \\ \text{Cov}[b_1b_3(X_1 - \bar{X}_1)(X_3 - \bar{X}_3)] &= (X_1 - \bar{X}_1)(X_3 - \bar{X}_3) [\text{Cov}(b_1b_3)] + b_1b_3 [\text{Cov}(X_1, X_3)] \\ \text{Cov}[b_2b_3(X_2 - \bar{X}_2)(X_3 - \bar{X}_3)] &= (X_2 - \bar{X}_2)(X_3 - \bar{X}_3) [\text{Cov}(b_2b_3)] + b_2b_3 [\text{Cov}(X_2, X_3)] \end{aligned}$$

共分散を2倍し右辺の各列を加え合せ $V(b_1) = C_{11} S^2_{0,123}$;

$\text{Cov}(b_1b_2) = C_{12} S^2_{0,123}$ 等を思い出せば和は次のようになる。

$$\begin{aligned} S^2_{0,123} [C_{11}(X_1 - \bar{X}_1)^2 + C_{22}(X_2 - \bar{X}_2)^2 + C_{33}(X_3 - \bar{X}_3)^2 + 2C_{12}(X_1 - \bar{X}_1)(X_2 - \bar{X}_2) \\ + 2C_{13}(X_1 - \bar{X}_1)(X_3 - \bar{X}_3) + 2C_{23}(X_2 - \bar{X}_2)(X_3 - \bar{X}_3)] \end{aligned}$$

此れに a の分散 $V(a) = \frac{S^2_{0,123}}{n}$ を加えたものが式中の独立変数が抽出誤差のない時の回帰函数の分散である。合計すると

$$\begin{aligned} S^2R = S^2_{0,123} \left[\frac{1}{n} + C_{11}(X_1 - \bar{X}_1)^2 + C_{22}(X_2 - \bar{X}_2)^2 + C_{33}(X_3 - \bar{X}_3)^2 \right. \\ \left. + 2C_{12}(X_1 - \bar{X}_1)(X_2 - \bar{X}_2) + 2C_{13}(X_1 - \bar{X}_1)(X_3 - \bar{X}_3) + 2C_{23}(X_2 - \bar{X}_2)(X_3 - \bar{X}_3) \right] \end{aligned}$$

(1) 式の右辺のオ2項を2倍して作った列和は、独立変数の抽出誤差に帰因するもので S^2 で示すと

$$\begin{aligned} S^2 = b_1^2 [V(X_1)] + b_2^2 [V(X_2)] + b_3^2 [V(X_3)] + 2b_1b_2 [\text{Cov}(X_1, X_2)] \\ + 2b_1b_3 [\text{Cov}(X_1, X_3)] + 2b_2b_3 [\text{Cov}(X_2, X_3)] \end{aligned}$$

§10 同一の独立変数に対する回帰に独立な一対になった残差の共分散

X_H, X_P に対する Y_H の回帰が与えられその残差の平方和を

$$\sum [Y_H - h_H X_H - h_P X_P]^2$$

とし、展開すれば (§3 参照)

$$\sum (Y_H^2) - h_H \sum (X_H Y_H) - h_P \sum (X_P Y_H)$$

即ち残差の平方和は、 X_H と X_P に対する回帰に依る部分

$h_H \sum (X_H Y_H) + h_P \sum (X_P Y_H)$ を Y の総平方和から引いた残りに等しい。

対応する残差の積の和は

$$\sum [Y_H - h_H X_H - h_P X_P] (Y_P - p_H X_H - p_P X_P)$$

これは次の様になる。

$$\begin{aligned} & \bar{S}(y_H y_P) - k_H \bar{S}(x_H y_P) - k_P \bar{S}(x_P y_P) + k_H P_H \bar{S}(x_H^2) \\ & + k_P P_H \bar{S}(x_H x_P) - P_H \bar{S}(x_H y_H) - P_P \bar{S}(x_P y_H) \\ & + k_H P_P \bar{S}(x_P x_H) + k_P P_P \bar{S}(x_P^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{即ち } & \bar{S}(y_H y_P) + [k_H P_H \bar{S}(x_H^2) + k_P P_H \bar{S}(x_H x_P) - P_H \bar{S}(x_H y_H)] \\ & + [k_H P_P \bar{S}(x_P x_H) + k_P P_P \bar{S}(x_P^2) - P_P \bar{S}(x_P y_H)] \\ & - k_H \bar{S}(x_H y_P) - k_P \bar{S}(x_P y_P) \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

(1) の二つの [] 内は夫々 P_H , P_P をくくり出し、正規方程式と比較すれば 0 となる 故に

$$\begin{aligned} & \bar{S}[(y_H - k_H x_H - k_P x_P)(y_P - P_H x_H - P_P x_P)] \\ & = \bar{S}(y_H y_P) - k_H \bar{S}(x_H y_P) - k_P \bar{S}(x_P y_P) \\ & = \bar{S}(y_H y_P) - P_H \bar{S}(x_H y_H) - P_P \bar{S}(x_P y_H) \end{aligned}$$

(Kenny; Keeping: Mathematics of Statistics) ^{304 頁より}

S11 行列の元の小数点を異動させる方法

独立変数の測定が非常に異なる単位で行はれる時は、係数の行列の各元は数オーダーも大きいと異ってくる場合もある。こういう場合は計算は厄介になってくる。特に主対角線の各元は 0.1 と 1.0 の間にあるようにしたい。このためにまず 0 でない元を 1.0 の適当な巾となつてゐる対角行列 D を選んで A を $B (=DAD)$ に変換する。

列ベクトル y は $k = Dg\lambda$ に変換される。入は適当な 10 のスカラー巾であるが、この結果 k の元は大体 B と同じオーダーとなる。而して方程式 $Bu = k$ が解かれ、原方程式

$Au = y$ の解は

$$u = Dv\lambda^{-1} \dots\dots\dots (1)$$

となる。

A の逆行列は B の逆行列から

$$A^{-1} = DB^{-1}D \dots\dots\dots (2)$$

より求められる。

証明は次の通りである。

$$\begin{aligned} v &= B^{-1}k = (DAD)^{-1}k \\ &= D^{-1}A^{-1}D^{-1}Dg\lambda \\ &= D^{-1}A^{-1}g\lambda \\ &= D^{-1}u\lambda \end{aligned}$$

故に

$$v = Dv\lambda^{-1}$$

$A^{-1} = DB^{-1}D$ の証明は上の証明より容易にわかる。

例 与えられた正規方程式の組は

$$\begin{bmatrix} 68.654 & 25.61 & 338.8 \\ & 25.61 & 0.0892 & 0.178 \\ & 338.8 & 0.178 & 4.41 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19.8 \\ 0.0293 \\ 0.106 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ を選ぶと}$$

$$B = \begin{bmatrix} 6.86 & 2.56 & 3.38 \\ 2.56 & 8.92 & 1.78 \\ 3.39 & 1.78 & 4.41 \end{bmatrix}$$

となり、全部有効数字三桁に丸められる。

$$\text{次に } Dg = \begin{bmatrix} 0.198 \\ 0.293 \\ 0.106 \end{bmatrix}$$

その結果 λ の適当な値は 10 であるから

$$k = \begin{bmatrix} 1.98 \\ 2.93 \\ 1.06 \end{bmatrix}$$

となる。

交換された方程式の解は

$$v = [0.197, 0.277, -0.023]$$

である。

この場合

$$\mu = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.197 \\ 0.277 \\ -0.023 \end{bmatrix} \cdot 10^{-1}$$

となり、従つて $\mu' = [0.000197, 0.277, -0.0023]$ となる。

別の解法（実はガウスの消去法に等しく且つ平方根を求める必要がない）は、各対角要素が 1 に等しい三角行列 T と $T'DT=A$ となるような対角行列 D を求めることである。もし解くべき行列方程式が $A\mu = g$ であれば、 $T'DT\mu = g$ となり、これは次の三方程式に等しい。

$$T'\mu = g, \quad DK = g, \quad T\mu = K$$

これはすべて、三角（或は対角）行列である。

もし行列 T と D の形が

$$T = \begin{bmatrix} 1 & t_{12} & \dots & t_{1p} \\ 0 & 1 & \dots & t_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_p \end{bmatrix}$$

ならば、方程式 $T'DT=A$ 次のような関係を表はしている。

$$d_1 = a_{11}$$

$$t_{12} d_1 = a_{12}$$

$$t_{13} d_1 = a_{13}$$

$$t_{12}^2 d_1 + d_2 = a_{22}$$

$$t_{12} t_{13} d_1 + t_{23} d_2 = a_{23}$$

$$t_{13}^2 d_1 + t_{23}^2 d_2 + d_3 = a_{33}$$

方程式の全数は $\frac{1}{2}P(P+1)$ で、 t_{ij} の $\frac{1}{2}P(P-1)$ 個の値と d_i の P 個の値をきめるのに丁度十分である。

行列 A の逆行列は

$$A^{-1} = T^{-1} D^{-1} (T^{-1})'$$

により求められる。こゝで T と D は夫々三角及び対角行列でその逆行列は容易に求められる。

正規方程式の解法

正規方程式を解く基礎をなしている *matrix* については既に説明があり、C 係数その他の計算の数学的解明については十二分の解説があつたので、2.2 では実際にパラメータ C 係数を計算するのに便利なる Doolittle 法及び簡易 Doolittle 法につき実際の計算の手順及び簡単な説明をする。

I 正規方程式を作る準備

今重回帰方程式を

$$Y = b + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3$$

とする、平方和、積和及び相関係数は次表の如くして計算すれば、便利である。正規方程式を表の下に示す。（表 1）

II Doolittle 法

この方法は Fisher 及び Snedeca が用いたものである。（表 2）

- I) 原行列 A を左側に書き単位行列（対角線上的 1 以外は 0 なる行列）及び吟味らんを右側に書く。以下に行う計算は全て検算のらんの値と各行の計が一致するよう吟味しながら進めて行かねばならぬ。
- II) A 行列の C_3 列の要素で各行の値を割る。この場合商は最小 5 桁の有効数字で計算する必要ある。6 桁まで出しておけば尚よい。

このような計算で重要なのは有効数字の桁数であつて、小数点の位置ではないということをよく理解しておいて欲しい。

- III) C_3 列を消去する。このため次の如く計算する。

$$7 \text{ 行 } 4) - 6) \quad 8 \text{ 行 } 5) - 6)$$

- IV) このように新たに得られた行列につき C_3 列の要素で割る。

- V) 11 行は 9) - 10) により得られる。

- VI) $[a_{23}]$ で右側の 11) の要素を割る。12) は C_{12} を与える。

- VIII) C_{24} を決めるには上の IV に戻つて左側の行列の各線上的値に

C_{ij} の値を代入する。

以下の計算は例で示す。この場合計算資料の都合で 5 桁数のもの

を用いる。この場合には更に同様の計算をⅦ、Ⅷと行い、Ⅷで C_{ij} の値を与えられる。2)で逆行列の解である C_{ii} を行列で表わしたものと、本表から得られた C_{ii} を比較してみる。

C 係数の定義から

$$C_{ii} = \frac{A_{ii}}{D}$$

$$D = (aa)(bb)(cc) + (ac)(bc)(ca) + (ac)(cb)(ba) - (ac)(bb)(ca) - (aa)(bc)(cb) - (cc)(ab)(ba)$$

$$A_{ii} = (bb)(cc) - (bc)^2$$

本表から得られた C_{ii} は、

$$\begin{aligned} C_{ii} &= \frac{1}{(ac)(ab)(aa3)} \\ &= \frac{1}{(ac)} \cdot \frac{1}{(ab)} \cdot \frac{1}{(aa1)(bb2) - (ab1)(ab2)} \\ &= \frac{(bb)(cc) - (bc)^2}{(cc)(bc)} \\ &= \frac{((aa)(cc) - (ac)^2)((bb)(cc) - (bc)^2) - ((ab)(cc) - (ac)(bc))((ab)(cc) - (ac)(bc))}{((aa)(cc) - (ac)^2)((bb)(cc) - (bc)^2) - ((ab)(cc) - (ac)(bc))((ab)(cc) - (ac)(bc))} \\ &= \frac{(bb)(cc) - (bc)^2}{(aa)(bb)(cc) + (ac)(bc)(ca) + (ac)(cb)(ba) - (bb)(ac)^2 - (aa)(bc)^2 - (cc)(ab)^2} \end{aligned}$$

以下同様な 2 とかえる。

本文に戻って、例にすれば、

$$\begin{aligned} C_{21} &= \begin{Bmatrix} -2.01565 - (-14.08052)(.219015) \\ 0 - (-4.87726)(.219015) \end{Bmatrix} \\ &= 1.06819 \end{aligned}$$

四捨五入に 5 する誤差を除けば $C_2 = C_{12}$ となる。

$$\begin{aligned} C_{22} &= \begin{Bmatrix} 0 - (-14.08052)(1.06819) \\ 9.83081 - (4.87726)(1.06819) \end{Bmatrix} \\ &= 15.04066 \end{aligned}$$

Ⅴ) C_{ij} 及び C_{2j} をⅣ式に代入する。

例えば

$$C_{3j} = \begin{Bmatrix} 14.6590 - (1.45200)(.219015) - (-.081998)(1.06819) = -.083830 \\ 0 - (3.78493)(.219015) - (-.697558)(1.06819) = -.083832 \\ 0 - (4.2798)(.219015) - (-.009272)(1.06819) = -.083830 \end{Bmatrix}$$

この方程式をみると二つの式は 5 桁の有効数字まで一致しているが、真中の式は少し違っている。 C_{13} としてはⅧで得られたものを用いる。2)で注意したいのは必要な桁数を出すには、必要と思われる桁数まで計算しておくのが便利である。

スネデッカーにすれば小数点以下 4 位まで正しく出しければ各段階の計算は小数点以下 6 位まで出す必要があるとなっており、我々の経験では必要な桁数の 1.3 倍 ~ 1.5 倍は最小限度必要であつた。

Ⅴ) 例の表のⅡの式に C_{ij} , C_{2j} , C_{3j} の値を代入して C_{4j} を解く。例えば

$$C_{41} = \begin{Bmatrix} .848148 - 8.70002 C_{11} - .0322213 C_{21} - .582819 C_{31} = -.603125 \\ 0 - .019006 C_{11} - .558230 C_{21} + .031627 C_{31} = -.603110 \\ 0 - .4115857 C_{11} + .378543 C_{21} - .955142 C_{31} = -.603128 \\ 0 - .298932 C_{11} - .506640 C_{21} - .042331 C_{31} = -.603111 \end{Bmatrix}$$

この場合 1 と 3 番目の値は C_{14} と着るしく異なるが、他の二つは大体一致している。

普通、要素の中に大きな値が含まれている様な 1, 3 の様な方程式を省略すればうまくゆく。小数点以下 6 位までを正確に求めるには余分に大きな桁数を必要であつて、この大きな係数は四捨五入による大きさの大きい 2 を意味している。従つて C_{41} を小数点以下 6 位までで計算したいならば個々の係数は全て小数点以下 6 位まで正確に求めておかなければならぬ。然し 41 や 95 の様な数では小数点以下 6 位以下まで求めるには 8 桁の有効数字が必要になつて来るが原行列 A でもつと多くの桁数を使わぬ限り 2 の計算で 8 桁の有効数字を求めることは出来ない。

これで C 行列が出来上がったわけであるが、さらに吟味らん以外に吟味をする必要もある。

即ち A 行列と C 行列の積が単位行列になるか否かがこの最後は行

なる吟味である。

数式で表わせば

$$AC = D = I$$

I は単位行列である。

AC の i 行 j 列の要素を計算するには A の i 行と C の j 列の対応する要素の積和を見付け出すことである。前に示した 4 変数 4 の場合を matrix で表わせば

A 行 列

$$\begin{pmatrix} [aa] & [ab] & [ac] \\ [ab] & [bb] & [bc] \\ [ac] & [bc] & [cc] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [aa]C_{11} + [ab]C_{21} + [ac]C_{31} & [aa]C_{12} + [ab]C_{22} + [ac]C_{32} \\ [ab]C_{11} + [bb]C_{21} + [bc]C_{31} & [ab]C_{12} + [bb]C_{22} + [bc]C_{32} \\ [ac]C_{11} + [bc]C_{21} + [cc]C_{31} & [ac]C_{12} + [bc]C_{22} + [cc]C_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [aa]C_{13} + [ab]C_{23} + [ac]C_{33} \\ [ab]C_{13} + [bb]C_{23} + [bc]C_{33} \\ [ac]C_{13} + [bc]C_{23} + [cc]C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A の a_{ik} を A の要素、C の c_{kj} を C の要素とする。

D の i 行 j 列の要素は

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj}$$

普通対角線要素 d_{ij} が 1 に近いかどうか必要な精度で検べてみる。

例題では

$$d_{11} = (10.25767)(1.219015) + \dots + (1.17904)(-1.603108) = 1.0000198$$

$$d_{22} = (0.3798)(1.06819) + \dots + (1.99828)(-7.92605) = 1.0000386$$

$$d_{33} = 1.0000014$$

$$d_{44} = 1.0000057$$

最後の二つの対角線要素は小数点以下 5 桁まで正確であるが d_{11} , d_{12} は 4 位までしか正確でない。2 の C 行列を使えば回帰係数 b は小数

点以下 4 位以上の精度は望めないし恐らく 3 位迄の精度であろう。

XII y と C の相乗積の和を $(g_i = Sx_i y)$ とする。

$$b_1 = C_{11}Sx_1y + C_{12}Sx_2y + C_{13}Sx_3y$$

$$b_2 = C_{21}Sx_1y + C_{22}Sx_2y + C_{23}Sx_3y$$

$$b_3 = C_{31}Sx_1y + C_{32}Sx_2y + C_{33}Sx_3y$$

$$\text{即ち } b_i = \sum_{j=1}^4 C_{ij} g_j$$

例題では

$$b_1 = (219015)(31.6650) + \dots + (-1.603108)(-152.8797) = 2.4631$$

2 の段階で b_i を再計算してみるが原正規方程式に 2 の値を代入して検算してみるかよい。

$$10.25767 b_1 + \dots + 1.17904 b_4 = 31.6650$$

b の値を代入すると 2 の計は 31.6614 となり僅かに合わない。

$$\text{XVI } SSR = \sum b_i g_i = (2.4631)(31.6650) + \dots + (-1.3769)(-152.8797) = 6.90864$$

$$SSE = Sy^2 - SSR = 9.15053 - 6.90864 = 2.24189$$

$$S^2 = SSR/22 = 1.0193$$

$$\text{XVII } b_i \text{ の標準誤差 } \sqrt{C_{ii} S^2}$$

$$\text{XVIII } t = |b_i| / S(b_i)$$

以下以下の計算の説明は前に講義せられたので重複をさけるため数値だけを上げることにした。

付) Hotelling の反復法

得られた結果の有効数字を増すために使用する。

1) 行列 $(2 - AC)$ を計算する。AC なる行列は $d_{ij} = \sum a_{ik} c_{kj}$ により得られたものである。 $(2 - AC)$ なる行列は対角線要素を 2 から引き他の要素の符号を逆にした後以外 AC と同じである。

$$(2 - AC) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-d_{11} & -d_{12} & -d_{13} \\ -d_{21} & 2-d_{22} & -d_{23} \\ -d_{31} & -d_{32} & 2-d_{33} \end{pmatrix}$$

即ち

$$\begin{pmatrix} .9999802 & -.0000771 & .0000044 & .0000195 \\ -.0000035 & .9999620 & -.0000008 & -.0000046 \\ -.0000033 & -.0000092 & .9999986 & -.0000124 \\ -.0000079 & -.0000778 & -.0000013 & .9999943 \end{pmatrix}$$

2) 新しいC行列 $C(2-A(C))=C''$ を計算する.

$$C'' = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-d_{11} & -d_{12} & -d_{13} \\ -d_{21} & 2-d_{22} & -d_{23} \\ d_{31} & -d_{32} & 2-d_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C_{11}(2-d_{11}) - C_{12}d_{21} - C_{13}d_{31} & -C_{11}d_{12} + (2-d_{22})C_{12} - C_{13}d_{32} & -C_{11}d_{13} - C_{12}d_{23} + C_{13}(2-d_{33}) \\ C_{21}(2-d_{11}) - C_{22}d_{21} - C_{23}d_{31} & -C_{21}d_{12} + (2-d_{22})C_{22} - C_{23}d_{32} & -C_{21}d_{13} - C_{22}d_{23} + C_{23}(2-d_{33}) \\ C_{31}(2-d_{11}) - C_{32}d_{21} - C_{33}d_{31} & -C_{31}d_{12} + (2-d_{22})C_{32} - C_{33}d_{32} & -C_{31}d_{13} - C_{32}d_{23} + C_{33}(2-d_{33}) \end{pmatrix}$$

例にすれば

$$C'' = \begin{pmatrix} .219012 & 1.068180 & -.083828 & -.603104 \\ 1.068180 & 15.040626 & -.317704 & -.7926049 \\ -.083828 & -.317704 & .095668 & .181971 \\ -.603104 & -.7926049 & .181973 & 4.441777 \end{pmatrix}$$

3) b_i と同様に C のかわりに C'' を用いて b_i'' を求める.

$$b_i'' = [246332 \quad -753747 \quad 158369 \quad -137645]$$

4) 正規方程式に b_i'' を代入すれば g_i の推定値 g_i が得られる.

$$g_i = [31.6649 \quad -86.8375 \quad 46.7156 \quad -152.8800]$$

b_i によつて得られた g_i の推定値より正確になつてゐる。b の有効数字を得る場合 b_i の桁数を増したのでは意味がなく b の有効数字の桁数は吟味の項で制限されているからこの反復法を用いて桁数を増さなくてはならない。

5) b_i'' を用いれば $SSR = \sum b_i'' g_i = 6.90776$ となる。

これは b_i を用いて計算した $SSR = 6908.04$ とは実際上の差違は無いのである。

II 高畠 Doolittle 法

森口氏のフリントで計算手順を説明し計算例としては I で用いた

5 変数の資料を使用する 2 と 12 する。

1. 1 第一表の形の見出しを作る。

2. 方程式の係数を表の右側に記入する。原行列は対称行列であるから対角線の下側の要素は上側の要素に対応する。

3. 計 $[aT][bT][cT]$ を計算して記入する。

計算公式 (1. 2.) の通り

II 4) 第 1 行をそのまま移す。

5) 4 行を $[aa]$ で割る。 $[aa] = 10.25767$

その結果を 5 行に記入する。

III 6) 2) - (5) $[ab]$ 又は (4) (ab)

$$C_2 \text{ で } [bb] - \frac{[ab]}{[aa]} [ab] = [bb] - [ab] \frac{[ab]}{[aa]}$$

$$C_3 \text{ で } \frac{[ac]}{[aa]} [ab] = [ac] \frac{[ab]}{[aa]} = [ac](ab)$$

丸めにする誤差を除けば (5) $[ab] = (4)(ab)$ である。

$$[bb] = 1.11550 - \frac{(ab)}{(.037980)} (ab) = 1.11536$$

$$[bc] = -.063200 - \left\{ \frac{(ab)}{(.037980)} \frac{(ac)}{(.669906)} = -.088643 \right. \\ \left. \frac{(ac)}{(.0037028)} (6.87167) = -.088643 \right\}$$

7) 6) を $[bb]$ で割る。

$$VI 8) = 3) - (15) \times [ac] + (17) [bc] = 3) - (1) \times [ac] + (6) [bc]$$

$$\text{即ち } [cc] = [cc] - \left\{ \frac{[ac]}{[aa]} + [bc] [bc] \right\} = [cc] - \{ [ac]$$

$$\times \left\{ \frac{[ac]}{[aa]} + [bc] [bc] \right\}$$

例にすれば

$$[cc] = 15.94667 - \{ (6.87167) (.669906) + (-.088643) (-.079475) \} = 11.33625$$

$$[cd] = .166956 - \left\{ (6.87167) (.114942) + (-.088643) (1.78768) \right. \\ \left. (1.17904) (.669906) + (-.079475) (1.99391) \right\} = -.0464424$$

同様の計算を繰返して

$$[dd] = 0.22516 \text{ が得られる。}$$

以上で順解法が終つたわけである。

これから回帰係数 b_i 及び SSR (回帰による平方和) がすぐ得られる。

$$b_3 = \frac{(C_{02})}{(C_{22})} = (C_{02})$$

$$b_2 = (b_{01}) - (b_{c1}) b_3$$

$$b_1 = (a_0) - (a_c) b_3 - (a_b) b_2$$

例では同様の計算を行えば

$$b_4 = -1.3786$$

$$b_3 = 1.64007 + (.040968)(-1.3786) = 1.5836$$

$$b_2 = -77.9610 - (-0.079475)(1.5836) - (1.78768)(-1.3786) = -75.3706$$

$$b_1 = 3.08696 - (.0037026)(-75.3706) - (.669906)(1.5836) - (.114942)(-1.3786) = 2.4636$$

$$\text{SSR} = \sum b_i S_{x_i y} = (2.4636)(31.6650) + \dots + (-1.3786)(-152.8797) = 6.907.74$$

簡略 Doolittle 法で b_i を計算する場合丸めによる誤差があるに拘らず SSR は Doolittle 法の解について Hotelling の反復法を使って計算された値と比較して僅かの差に過ぎない。棄却帯並びに信頼帯を計算するに必要な係数と計算する場合の計算過程は表 4 の下に書いてある。例についてその数値を計算してみる。

この計算はいわゆる逆解法で行われる。

VII C_{i4} の値の計算

$$C_{44} = 1.22516 = 4.44129$$

$$C_{34} = -(4.44129)(-.040968) = .181951$$

$$C_{24} = (.181951)(.079475) - (4.44129)(1.78768) = -7.92514$$

$$C_{14} = -(-7.92514)(.0037026) - (.181951)(.669906) - (4.44129)(.114942) = .603039$$

$$\text{Check: } (1.17904)(.603039) + (1.99828)(-7.92514) + (.166956)(.181951) + (.394418)(4.44129) = .99997$$

VIII C_{i3} の値

$$C_{43} = C_{34} = .181951$$

$$C_{33} = .0882136 - (.181951)(-.040968) = .0956668$$

$$C_{23} = (.0956668)(.079475) - (.181951)(1.78768) = -.317667$$

$$C_{13} = -(-.317667)(.0037026) - (.0956668)(.669906) - (.181951)(.114942) = -.0838254$$

$$\text{Check: } (6.87167)(-.0838254) + (-.06320)(-.317667) + (.1594667)(.0956668) + (.166956)(.181951) = 1.0000008$$

IX C_{i2} の値

$$C_{42} = C_{24} = -7.92514$$

$$C_{32} = C_{23} = -.317667$$

$$C_{22} = .8965715 - (-.317667)(-.079475) + (7.92514)(1.78768) = 15.03894$$

$$C_{21} = 1.06806$$

Check 第 2 例を用いて行えば .99993 を得る。

X C_{i1} の値

$$C_{11} = .0974880 - (1.06806)(.0037026) + (.0838254)(.669906) + (.603039)(.114942) = .219003$$

Check 第 1 例を用いて行えば .10000002 を得る。

XI b_i SSR 及び $S^2(b_i)$ は Doolittle 法と同様にして得られる。

$$b_i = [2.46334 \quad -75.3693 \quad 1.58356 \quad -1.37975]$$

$$\text{SSR} = 6.90779$$

b_i の内は正確でないものもあるが SSR は大体一致している。C 行列を修正するのにも Hotelling の反復法は用いられる。丸めによる誤差はこの方法では極めて重大な影響を持っている。従って Hotelling の反復法を使わないで最後に必要な精度を得るにはまず余分の桁を附けておき前に説明のあった桁数を揃えるための操作を行えば計算上便利である。

X		152	155	158	161	164	167	170	173	176	(計)			$\Sigma f_i X'$	$\Sigma f_i X'Y'$
Y	X'	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	f_Y	$f_Y \cdot Y'$	$f_Y \cdot Y'^2$	S_Y	$S_Y Y'$
77	7								1		1	7	49	3	21
74	6						1				1	6	36	1	6
71	5							1			1	5	25	2	10
68	4		1			1		1	2	1	6	24	96	9	36
65	3					1	2	1	3	1	8	24	72	17	51
62	2				2	4	2	4	1	1	14	28	56	15	30
59	1				2	3	7	12	5	3	32	32	32	56	56
56	0		2	2	6	12	15	4			40	0	0	10	0
53	-1	1	2	12	7	8	10	5	3		48	-48	48	-12	12
50	-2	1	3	9	7	7	4	2			33	-66	132	-30	60
47	-3	3	2	2	3	2					12	-36	108	-25	75
44	-4		3				1				4	-16	64	-8	32
(計)	f_X	5	12	25	27	38	42	30	15	6	200	-40	718	38	389
	$f_X X'$	-20	-36	-50	-27	0	42	60	45	24	38				
	$f_X X'^2$	80	108	100	27	0	42	120	135	96	708				
	$(\Sigma f_i Y')$	-12	-22	-36	-24	-10	1	23	28	12	-40				
	S_X														
	$(\Sigma f_i Y'X')$	48	66	72	24	0	1	46	84	48	389				
	S_{XY}														

検 算

計算 : $\bar{X}' = \frac{1}{N} \Sigma f_X X' = \frac{38}{200} = 0.19$ $\bar{Y}' = \frac{1}{N} \Sigma f_Y Y' = \frac{-40}{200} = -0.20$
 $\sigma^2_{X'} = \frac{1}{N} \Sigma f_X X'^2 - \bar{X}'^2 = \frac{708}{200} - (0.19)^2 = 3.5039$ $\sigma_{X'} = 1.8719$
 $\sigma^2_{Y'} = \frac{1}{N} \Sigma f_Y Y'^2 - \bar{Y}'^2 = \frac{718}{200} - (-0.20)^2 = 3.55$ $\sigma_{Y'} = 1.8841$
 $r = \frac{\frac{1}{N} \Sigma S_{XY} - \bar{X}' \bar{Y}'}{\sigma_{X'} \sigma_{Y'}} = \frac{\frac{389}{200} - (0.19)(-0.20)}{1.8719 \times 1.8841} = \frac{1.945 + 0.038}{3.5268} = 0.5622$

$\bar{X} = 164 + 3 \times 0.19 = 164.57$

$\bar{Y} = 56 + 3 \times (-0.20) = 55.40$

回帰係数 $m = 0.5622 \times \frac{3 \times 1.8841}{3 \times 1.8719} = 0.5659$

$m' = 0.5622 \times \frac{3 \times 1.8719}{3 \times 1.8841} = 0.5586$

X の Y に対する回帰直線は $X - 164.6 = 0.56(Y - 55.4)$

Y の X に対する回帰直線は $Y - 55.4 = 0.57(X - 164.6)$

平方和 積和及び相関係数を求める計算法

n	X_1	X_2	X_3	Y
和	ΣX_1	ΣX_2	ΣX_3	ΣY
平均	$\Sigma X_1 / n$	$\Sigma X_2 / n$	$\Sigma X_3 / n$	$\Sigma Y / n$
X_1 1	ΣX_1^2	$\Sigma X_1 X_2$	$\Sigma X_1 X_3$	$\Sigma X_1 Y$
2	$(\Sigma X_1)^2 / n$	$\Sigma X_1 \Sigma X_2 / n$	$\Sigma X_1 \Sigma X_3 / n$	$\Sigma X_1 \Sigma Y / n$
3	$\Sigma X_1^2 = (aa)$	$\Sigma X_1 \Sigma X_2 = (ab)$	$\Sigma X_1 \Sigma X_3 = (ac)$	$\Sigma X_1 \Sigma Y$
4	$\sqrt{(\Sigma X_1^2)}$	$\sqrt{(\Sigma X_1^2)(\Sigma X_2^2)}$	$\sqrt{(\Sigma X_1^2)(\Sigma X_3^2)}$	$\sqrt{(\Sigma X_1^2)(\Sigma Y^2)}$
5		r_{12}	r_{13}	r_{1Y}
X_2 1		ΣX_2^2	$\Sigma X_2 X_3$	$\Sigma X_2 Y$
2		$(\Sigma X_2)^2 / n$	$\Sigma X_2 \Sigma X_3 / n$	$\Sigma X_2 \Sigma Y / n$
3		$\Sigma X_2^2 = (bb)$	$\Sigma X_2 \Sigma X_3 = (bc)$	$\Sigma X_2 \Sigma Y$
4		$\sqrt{(\Sigma X_2^2)}$	$\sqrt{(\Sigma X_2^2)(\Sigma X_3^2)}$	$\sqrt{(\Sigma X_2^2)(\Sigma Y^2)}$
5			r_{23}	r_{2Y}
X_3 1			ΣX_3^2	$\Sigma X_3 Y$
2			$(\Sigma X_3)^2 / n$	$\Sigma X_3 \Sigma Y / n$
3			$\Sigma X_3^2 = (cc)$	$\Sigma X_3 \Sigma Y$
4			$\sqrt{(\Sigma X_3^2)}$	$\sqrt{(\Sigma X_3^2)(\Sigma Y^2)}$
5				r_{3Y}
Y 1				ΣY^2
2				$(\Sigma Y)^2 / n$
3				ΣY^2
4				$\sqrt{\Sigma Y^2}$

Doolittle 法の計算手順

行	指示	C_1
I	1) 第1表の数に移す	$[aa]$
	2)	$[ab]$
	3)	$[ac]$
II	4) 1) を $[ac]$ で割る	$\frac{[aa]}{[ac]}$
	5) 2) を $[bc]$ で割る	$\frac{[ab]}{[bc]}$
	6) 3) を $[cc]$ で割る	$\frac{[ac]}{[cc]}$
III	7) 4) から 6) を引く	$[aa1]$
	8) 5) から 6) を引く	$[ab2]$
IV	9) 7) を $[ab1]$ で割る	$\frac{[aa1]}{[ab1]}$
	10) 8) を $[bb2]$ で割る	$\frac{[ab2]}{[bb2]}$
V	11) 7) - 8)	$[aa3]$
VI	12) 11) を $[aa3]$ で割る	
VII	13) IV 12 C_1 を代入する	
	14) II 12 C_1, C_2 を代入する	
C_{1j}		$\begin{cases} C_{11} = \frac{1}{[ac][ab1][ac3]} \\ C_{12} = \frac{1}{[bc][bb2][aa3]} \\ C_{13} = \frac{1}{[cc][aa3]} \left(\frac{1}{[bb2]} - \frac{1}{[ab1]} \right) \end{cases}$
C_{2j}		$\begin{cases} C_{21} = \begin{cases} \frac{1}{[ac][ab1]} - C_{11} \frac{[aa1]}{[ab1]} & 9) \text{ あり} \\ 0 - C_{11} \frac{[ab2]}{[bb2]} & 10) \text{ あり} \end{cases} \\ C_{22} = \begin{cases} 0 - C_{12} \frac{[aa1]}{[ab1]} & 9) \text{ あり} \\ \frac{1}{[bc][bb2]} - C_{12} \frac{[ab2]}{[bb2]} & 10) \text{ あり} \end{cases} \\ C_{23} = \begin{cases} -\frac{1}{[cc][ab1]} - C_{13} \frac{[aa1]}{[ab1]} & 9) \text{ あり} \\ -\frac{1}{[cc][bb2]} - C_{13} \frac{[ab2]}{[bb2]} & 10) \text{ あり} \end{cases} \end{cases}$

C_2	C_3	(1)	(2)	(3)	Check	計
$[ab]$	$[ac]$	1	0	0		
$[bb]$	$[bc]$	0	1	0		
$[bc]$	$[cc]$	0	0	1		
$\frac{[ab]}{[ac]}$	1	$\frac{1}{[ac]}$	0	0		
$\frac{[bb]}{[bc]}$	1	0	$\frac{1}{[bc]}$	0		
$\frac{[bc]}{[cc]}$	1	0	0	$\frac{1}{[cc]}$		
$[ab1]$		$\frac{1}{[ac]}$	0	$-\frac{1}{[cc]}$		
$[bb2]$		0	$\frac{1}{[bc]}$	$-\frac{1}{[cc]}$		
1		$\frac{1}{[ac][ab1]}$	0	$-\frac{1}{[cc][ab1]}$		
1		0	$\frac{1}{[bc][bb2]}$	$-\frac{1}{[cc][bb2]}$		
C_2		C_{21}	C_{22}	C_{23}		
C_3		C_{31}	C_{32}	C_{33}		

$$C_{3j} = \begin{cases} C_{31} = \frac{1}{[ac]} - C_{11} \frac{[aa]}{[ac]} - C_{21} \frac{[ab]}{[ac]} & 4) \text{ あり} \\ 0 - C_{11} \frac{[ab]}{[bc]} - C_{21} \frac{[bb]}{[bc]} & 5) \text{ あり} \\ 0 - C_{11} \frac{[ac]}{[cc]} - C_{21} \frac{[bc]}{[cc]} & 6) \text{ あり} \end{cases}$$

$$C_{3j} = \begin{cases} = C_{13} \\ C_{32} = C_{23} \\ C_{33} = \begin{cases} 0 - C_{11} \frac{[aa]}{[ac]} - C_{21} \frac{[ab]}{[ac]} & 4) \text{ あり} \\ 0 - C_{11} \frac{[ab]}{[bc]} - C_{21} \frac{[bb]}{[bc]} & 5) \text{ あり} \\ \frac{1}{[cc]} - C_{11} \frac{[ac]}{[cc]} - C_{21} \frac{[bc]}{[cc]} & 6) \text{ あり} \end{cases} \end{cases}$$

Doolittle 法の計算例

行	C_1	C_2 余数	C_3	C_4
I 1)	10.25767	.03798	6.87167	1.17904
2)	.03798	1.11550	-.06320	1.99828
3)	6.87167	-.06320	15.94667	.166956
4)	1.17904	1.99828	.66956	3.94418
II 5)	8.70002	.03213	5.82819	1
6)	.019006	.558230	-.031627	1
7)	41.15857	-.378543	95.51421	1
8)	.298932	.506640	.042331	
III 9)	8.40109	-.474427	5.78586	
10)	-.279926	.051590	-.073958	
11)	40.85964	-.885183	95.47188	
IV 12)	1.45200	-.081998	1	
13)	3.78493	-.697558	1	
14)	.42798	-.009272	1	
V 15)	1.02402	-.072726		
16)	3.35695	-.688286		
VI 17)	-14.08052	1		
18)	-4.87726	1		
VII 19)	-9.20326			
VIII 20)	(1) C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}
IX 21)	C_{21}	(1) C_{22}	C_{23}	C_{24}
X 22)	C_{31}	C_{32}	(1) C_{33}	C_{34}
XI 23)	C_{41}	C_{42}	C_{43}	(1) C_{44}
XII	g_i			
XIII	b_i			
XIV	$S(b_i) = \sqrt{C_{ii} \cdot S}$			
XV	t			
XVI	$SSR = 6.908.04 ; SSE = 2.242.49 ; S^2 = 101.93$			

(1)	(2)	(3)	(4)	check 計
1				19.34636
	1			4.08856
		1		23.92210
			1	8.28846
.848148				16.40857
	.500430			2.04604
		5.98960		143.28384
			253538	2.10144
.848148			-253538	14.30713
	.500430		-253538	-.055402
		5.98960	-253538	141.18240
.146590			-.043820	2.47277
	-6.76641		3.428135	.74910
		.062737	-.002656	1.47879
.146590	0	-.062737	-.041164	.99398
0	-6.76641	-.062737	3.430791	-.72969
-2.01565	0	.862649	.566015	-13.6675
0	983081	.091150	-4.98454	1.06016
-2.01565	-983081	.77150	.555056	-14.7276
.219015	1.06819	-.083829	.603108	1.60027
1.060819	15.04066	-.317707	-7.92605	8.86519
-.083829	-3.17707	.095668	.181973	.87610
-.603108	-7.92605	.181973	4.44178	-2.90543
3.16650	-86.8374	46.7156	-152.8797	
2.4631	-75.3773	1.5836	-1.3767	
4.7251	39.1567	3.1229	21.2790	
<1	1.93	<1	<1	

簡略 Doolittle 法による計算

行	指示	C 係数			G	Check 計
		C ₁	C ₂	C ₃		
I	1) 第1表の値を移す	{aa}	{ab}	{ac}	{a0}	
	2)	*	{bb}	{bc}	{b0}	
	3)	*	*	{cc}	{c0}	
II	4) 1)を移す	{aa}	{ab}	{ac}	{a0}	
	5) 1)を{aa}で割る	1	$\frac{\{ab\}}{\{aa\}}$	$\frac{\{ac\}}{\{aa\}}$	$\frac{\{a0\}}{\{aa\}}$	
III	6) 2) - (5){ab}		{bb1}	{bc1}	{b01}	
	7) 6)を{bb1}で割る		1	{bc1}	{b01}	
	8) 3) - 5){ac} - 7x{bc1}			{cc2}	{c02}	
IV	9) 8)を{cc2}で割る			1	{c02}	
	12) C ₁ を8)に代入					
	11) C ₃ を7)に代入					
	10) 9)かそのまゝ来る					

back ward solution

$$C_{33} = 1 / \{cc2\} \quad \{ac\}C_{13} + \{bc\}C_{23} + \{cc\}C_{33} \text{ が } 1 \text{ になるか}$$

$$C_{23} = -C_{33} \{bc1\} \quad \text{否かで Check}$$

$$C_{13} = -C_{23} \frac{\{ab\}}{\{aa\}} - C_{33} \frac{\{ac\}}{\{aa\}}$$

$$C_{32} = C_{23} \quad \{ab\}C_{12} + \{bb\}C_{22} + \{bc\}C_{32} \text{ が } 1 \text{ になるか}$$

$$C_{22} = \frac{1}{\{bb1\}} - C_{32} \{bc1\} \quad \text{否かで Check}$$

$$C_{21} = -C_{22} \frac{\{ab\}}{\{aa\}} - C_{32} \frac{\{ac\}}{\{aa\}}$$

$$\{C_{13}\} = \{C_{31}\} \quad \{aa\}C_{11} + \{ab\}C_{12} + \{ac\}C_{13} \text{ が } 1 \text{ になるか}$$

$$\{C_{12}\} = \{C_{21}\} \quad \text{否かで Check}$$

$$\{C_{11}\} = \frac{1}{\{aa\}} - C_{21} \frac{\{ab\}}{\{aa\}} - C_{13} \frac{\{ac\}}{\{aa\}}$$

簡略 Doolittle 法の計算例

行		b ₁ (C ₁)	b ₂ (C ₂)	b ₃ (C ₃)	b ₄ (C ₄)	G	(検) 計
I	1)	10.25767	.037980	.687167	1.17904	31.6650	50.0114
	2)		1.1550	-.063200	1.99828	-.86.8374	-.83.7488
	3)			15.94667	.166956	46.7156	69.6377
	4)				3.94418	-152.8797	-145.5912
II	5)	10.25767	.037980	.687167	1.17904	31.6650	50.0114
	6)	1	.00370260	.669906	1.14942	3.08696	4.87551
III	7)		1.11536	-.088643	1.99391	-.86.7546	-.83.9340
	8)		1	-.079475	1.78768	-77.9610	-75.2528
IV	9)			11.33625	-.464424	18.5923	29.4641
	10)			1	-.040968	1.64007	2.57910
	11)				.22516	-.3104	-.0852
	12)				1	-1.3786	-.3784
					a	2.4631	
					b	-75.3773	
					c	1.5836	
					d	-1.3786	

Backward Solution

$$.219003 \quad 1.06806 \quad -.0838254 \quad -.099997$$

$$1.06806 \quad 15.03894 \quad -.317667 \quad -.792514$$

$$-.0838254 \quad -.317667 \quad .0956668 \quad 181951$$

$$-.099997 \quad -.792514 \quad .181951 \quad 4.44129$$

直交多項式による解法

1) R.A. Fisher 著 研究者のための統計的方法

2) G.W. Snedecor 著 統計的方法

参照

1) 条件

多項式 $Y = \alpha + \beta X + \gamma X^2 + \delta X^3 + \dots$

をあてはめる特殊の方法が Fisher によって完成されている。

2の条件としては

1) 独立変量(X)が幅1の等間隔に分布していること。(Xの間隔が1でなく等間隔に分布しているときはその間隔で割るとよい。)

2) おおののXに対して従属変量(Y)が唯一つ対応することである。

(註)「直交多項式による解法を観測値の個数が変るとき、或はXの間隔が等しくないときにも拡張できるが、不自然であり、このような場合には多重曲線による処理法が直接的である」(文献1)より)であるので、ここでは省略し、上記のような特別な場合のみを説明する。

2. 特徴

- 1) 計算方法が簡単で、しかも複雑な代数式を使わない。
- 2) 理論的に価値がある(理論については参考文献(1))を参照されたい。
- 3) 次々に高次の項をあてはめた際各段階ごとに有意性が検定される。
- 4) 2の曲線は非常に融通がきく。

3. 一般例

4次式 $Y = \alpha + \beta X + \gamma X^2 + \delta X^3 + \varepsilon X^4$ 迄を示す

(5次以上については参考文献を見られたい。)

X	Y	2	3
1	Y_1	$Y_1' = Y_1$	$Y_1'' = Y_1$
2	Y_2	$Y_2' = Y_1 + Y_2$	$Y_2'' = Y_1' + Y_2'$
3	Y_3	$Y_3' = Y_2 + Y_3$	$Y_3'' = Y_2'' + Y_3'$
...	...	...	...
n	Y_n	$Y_n' = Y_{n-1}' + Y_n = (\sum_{i=1}^n Y_i)$	$Y_n'' = Y_{n-1}'' + Y_n' - (\sum_{i=1}^n Y_i)$
	$S_1 = \sum_{i=1}^n Y_i$	$S_2 = \sum_{i=1}^n Y_i'$	$S_3 = \sum_{i=1}^n Y_i''$
	$a = \frac{S_1}{n} = \bar{Y}$	$b = \frac{1 \cdot 2}{n(n+1)} (S_2)$	$c = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{n(n+1)(n+2)} (S_3)$
	$a' = a$	$b' = a - b$	$c' = a - 3b + 2c$
	$A = a'$	$B = \frac{6}{n-1} (b')$	$C = \frac{30}{(n-1)(n-2)} (c')$

1) 多項式による算出値の計算

上表の中 $a', b', \dots, c'$ を用いて、次の表*により最終値及び階差を計算して算出値を求める。(次節具体例参照)

ロ) 回帰からの偏差平方和 $\{Sy^2 = \sum (Y - \hat{Y})^2\}$

$$0 \text{ 次式 } (Sy_0^2) = SY^2 - nA^2 = SA^2 = SY^2 - \frac{(SY)^2}{n}$$

$$1 \text{ 次式 } (Sy_1^2) = (Sy_0^2) - \frac{n(n^2-1)}{12} (B^2)$$

$$2 \text{ 次式 } (Sy_2^2) = (Sy_1^2) - \frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{180} (C^2)$$

$$3 \text{ 次式 } (Sy_3^2) = (Sy_2^2) - \frac{n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)}{2880} (D^2)$$

$$4 \text{ 次式 } (Sy_4^2) = (Sy_3^2) - \frac{n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)(n^2-16)}{44,100} (E^2)$$

(なお次々に高次の多項式をあてはめてゆくと2による平方和の減少の有意性の検定については、次節の具体例で述べる。)

ハ) 多項式の算出

方程式は次の通りとする。

$$Y = A + BX_1 + CX_2 + DX_3 + EX_4$$

4	5
$Y_1''' = Y_1$ $Y_2''' = Y_1'' + Y_2''$ $Y_3''' = Y_2'' + Y_3''$ $\vdots$ $Y_n''' = Y_{n-1}'' + Y_n'' = (\sum_1^n Y_i'')$	$Y_1'''' = Y_1$ $Y_2'''' = Y_1''' + Y_2'''$ $Y_3'''' = Y_2''' + Y_3'''$ $\vdots$ $Y_i'''' = Y_{i-1}''' + Y_i''' = (\sum_1^i Y_i''')$
$S_4 = \sum_1^n Y_i'''$ $d = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{n(n+1)(n+2)(n+3)} (S_4)$ $d' = a - 6b + 10c - 5d$ $D = \frac{140}{(n-1)(n-2)(n-3)} (d')$	$S_5 = \sum_1^n Y_i''''$ $e = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{n(n+1)(n+2) \cdots (n+4)} (S_5)$ $e' = a - 10b + 30c - 35d + 14e$ $E = \frac{630}{(n-1)(n-2) \cdots (n-4)} (e')$

2 の場合の $X_1, X_2, \dots, X_4$ は次の公式による。

$$X_1' = X - \bar{X}$$

$$X_2' = X_1'^2 - \frac{n^2-1}{12}$$

$$X_3' = X_1'^3 - \frac{3n^2-7}{20} (X_1')$$

$$X_4' = X_1'^4 - \frac{3n^2-13}{14} (X_1'^2) + \frac{3(n^2-1)(n^2-9)}{560}$$

これらと上表で計算した $A, B, \dots, D$ 及び E の値を入れて多項式を算出する。

* 4 次の項迄をあてはめるときは、最終値と階差を計算する
ための係数と多項式

多項式の次数	標本の大きさ n 及び 保存する係数	次の次数の項で終る多項式				
		0	1	2	3	4
0	(最終値)	$a' + 3b' + 5c' + 7d' + 9e'$				
1	$-\frac{6}{n-1}$	$b' + 5c' + 14d' + 30e'$				
2	$\frac{60}{(n-1)(n-2)}$	$c' + 7d' + 27e'$				
3	$-\frac{840}{(n-1)(n-2)(n-3)}$	$d' + 9e'$				
4	$\frac{15,120}{(n-1) \cdots (n-4)}$	e'				

4. 具体例

(土佐地方ひのき林々分収獲表調製経緯における一例)

直径対本数の関係における直径階毎の本数の標準偏差を平滑にするための計算方法を使用した。

いま直径を 4 cm 毎にまとめて直径階毎の本数の標準偏差を計算すれば下表および別図の通りであり、これに多項式をあてはめようとするのである。

D	X	$Y (= \delta N)$	2	3	4	5
5	1	364	364	364	364	364
9	2	449	813	1177	1541	1905
13	3	380	1193	2370	3911	5816
17	4	254	1447	3817	7728	13544
21	5	170	1617	5434	13162	26766
25	6	128	1745	7179	20341	47047
29	7	108	1853	9032	29373	76420
33	8	45	1898	10930	40303	116723

$$S_1 = 1898 \quad S_2 = 10,930 \quad S_3 = 40,303 \quad S_4 = 116,723 \quad S_5 = 288,525$$

$$a = 237.250000 \quad b = 303.611111 \quad c = 335.858333 \quad d = 353.706061 \quad e = 364.299472$$

$$a' = 237.250000 \quad b' = -66.361111 \quad c' = -186.6667 \quad d' = 5.636359 \quad e' = -2.633867$$

$$A = 237.250000 \quad B = -56.880952 \quad C = -1333334 \quad D = 3.757573 \quad E = -1.975400$$

(1) 一次式 (上表の第 4 列、即ち 2 の列まで計算すればよい。)

1) 回帰からの平方和及びその検定 (3 の (ロ) 参照)

まず 0 次式の平方和即ち平均からの偏差平方和を計算すると

$$S_{y_0}^2 = SY^2 - NA^2 = 601,986 - 450,300.5 = 151,685.5$$

となる。(これは水平な直線 $Y = 237.25$ からの偏差平方和である。)

次に、一次式をあてはめる 2 と 12 の平方和の減少

式(3のロ)参照) 12.81

$$\frac{n(n^2-1)}{12} (B^2) = 135.888.5934 \quad (d.f \text{ は } 1)$$

$$\therefore S_y^2 (S(Y-\hat{Y})^2) = 151.6855 - 135.888.5934 = 15.796.9066$$

(d.f は $8-2=6$)

故に一次式をあてはめることによる平方和の減少 135.888.5934
をその剰余項 15.796.9066 と比較して有意性を検定する剰
余項の d.f は 7 であるから誤差平均平方は

$$\frac{15.796.9066}{6} = 2632.8178 \quad \text{となりその結果}$$

$$F = \frac{135.888.5934}{2632.8178} = 51.61^{**}$$

は d.f = 1 及び 6 に対して著しく有意である。

$$(F_{0.01} = 13.74)$$

ロ) 多項式による値の計算 (3の(イ)参照)

$$\text{最終値} = a' + 3b' = 237.25 + 3(-66.361111) = 38.2$$

$$\text{第一階差} = -\frac{6}{n-1}(b') = -\frac{6}{7}(-66.361111) = 56.88$$

下表の如く最終値 38.2 に第一階差を次々に加えてゆくと
Y の値が $X=8$ に対応する最も大きい値から始って、次
々に得られる。

X	多項式による Y	第一階差
1	436	
2	379	
3	323	
4	266	
5	209	
6	152	
7	95	
8	最終値 = 38.2	56.88

ハ) 多項式の算出 (3の(ハ)参照)

$$Y = A + BX_1$$

$$X_1 = X - \bar{X} = X - 4.5$$

$$\therefore Y = 237.25 - 56.880952(X - 4.5)$$

$$= 237.25 + 255.964284 - 56.880952X$$

$$= 493.2 - 56.88X \quad (2 \text{ の式で計算したものと一致する})$$

で求めたものと一致する)

(2) 2次式 (上表の第5列即3の列を計算する)

$$1) S_{y_2}^2 = 15.796.9066 - 298.6670 = 15.498.6670 \quad (d.f \text{ は } 8-3=5)$$

2の場合の剰余項の誤差平均平方は

$$\frac{15.498.6670}{5} = 3099.73$$

となり明らかに有意でない。

ロ)

$$\text{最終値} = a' + 3b' + 5c' = 28.8$$

$$\text{第一階差} = -\frac{6}{n-1}(b' + 5c') = 64.88$$

$$\text{第二階差} = \frac{60}{(n-1)(n-2)}(c') = -2.667$$

X	Y	第一階差	第二階差
1	427		
2	378	48.9	
3	326	51.5	
4	272	54.2	
5	215	56.9	
6	156	59.5	
7	94	62.2	
8	最終値 = 28.8	64.88	-2.667

$$ハ) Y = A + BX_1 + CX_2$$

$$CX_2 = -1.333334(X^2 - 9X + 15)$$

$$= -20.0 + 12.00X - 1.3333X^2$$

$$\therefore Y = 473.2 - 44.88X - 1.3333X^2$$

(3) 3次式(上表の第6列即ち4の列を計算する)

$$1) S_y^2 = 15.4982396 - 8.386.8968 = 7.111.3428 \quad (d.f = 4)$$

剰余項の誤差平均平方は

$$\frac{7.111.3428}{4} = 1.777.8357$$

$$\therefore F = \frac{8386.8968}{1.777.8357} = 4.72 \quad (F_{0.05} = 7.71)$$

$$ロ) 最終値 = a' + 3b' + 5c' + 7d' = 68.3$$

$$第一階差 = -\frac{6}{n-1}(b' + 5c' + 14d') = -2.76$$

$$第二階差 = \frac{60}{(n-1)(n-2)}(c' + 7d') = 53.697$$

$$第三階差 = \frac{-840}{(n-1)(n-2)(n-3)}(d') = -22.5454$$

	Y	第一階差	第二階差	第三階差
1	388			
2	406	-18.8		
3	366	40.3	-59.03	
4	289	76.8	-36.48	
5	199	90.7	-13.94	
6	116	82.1	8.61	
7	66	50.9	31.15	
8	最終値 = 68.3	-27.6	53.697	-22.5454

$$ハ) Y = A + BX_1 + CX_2 + DX_3$$

$$(X_3 = X_1^3 - \frac{3n^2-7}{20}(X_1) = X^3 - 13.5X^2 + 51.5X - 49.5)$$

$$= 287.2 + 148.63X - 52.0606X^2 + 3.75757X^3$$

(4) 4次式

$$1) S_y^2 = 7.111.3428 - 7064.1063 = 47.2365 \quad (d.f = 4)$$

剰余項の誤差平均平方は

$$\frac{47.2365}{3} = 15.7455$$

$$\therefore F = \frac{7064.1063}{15.7455} = 448.64^{**} \quad (F_{0.01} = 34.12)$$

$$ロ) 最終値 = a' + 3b' + 5c' + 7d' + 9e' = 44.6$$

$$第一階差 = \frac{6}{n-1}(b' + 5c' + 14d' + 30e') = 64.97$$

$$第二階差 = \frac{60}{(n-1)(n-2)}(c' + 7d' + 27e') = -47.895$$

$$第三階差 = \frac{-840}{(n-1)(n-2)(n-3)}(d' + 9e') = 72.2738$$

$$第四階差 = \frac{15.120}{(n-1) \cdots (n-4)}(e') = -47.40961$$

X	Y	第一階差	第二階差	第三階差	第四階差
1	364				
2	450	-86.5			
3	376	74.1	-160.62		
4	259	117.4	-43.26	-117.365	
5	168	90.7	26.70	69.955	
6	127	41.5	49.24	22.545	
7	110	17.1	24.38	24.864	
8	最終値 = 44.6	64.97	-47.895	72.2738	-47.40961

$$ハ) Y = A + BX_1 + CX_2 + DX_3 + EX_4$$

$$(X_4 = X_1^4 - \frac{3n^2-13}{14}(X_1^2) + \frac{3(n^2-1)(n^2-9)}{560})$$

$$= X^4 - 18X^3 + (121.5 - \frac{179}{14})X^2 - (364.5 - \frac{1611}{14})X$$

$$+ (428.625 - \frac{3624.75}{14})$$

$$= -48.0 + 641.355 - 266.8148X^2 + 39.31477X^3 - 1.975400X^4$$

(註) (1) (2) (3) (4) のそれぞれの (1) で計算した多項式をXではなくDに換する多項式に直すためには

$$X = \frac{D-1}{4} \quad \text{なる関係を利用して } X \text{ の代りに}$$

$$\frac{D-1}{4} \text{ を入れて計算すればよい。}$$

別図

