

經 營	3 5
測 定	9

立木材積表調製法解説書

I

(立木幹材積表の調製方法)

昭和 31 年 3 月

林業試験場経営部

序

昭和22年わが国林政定と劃期的な林政統一が行われ、旧國有林、旧御料林、旧北海道庁管國有林を打つて一丸として新しい國有林經營機構が誕生した。この新しい國有林經營機構の最も基礎的なものの一つである伐積表については、同一營林局内で、旧國有林を所管する營林署では、旧國有林のものを、旧御料林を所管する營林署では旧御料林の伐積表をそのまゝ使用するか、或いは、旧御料林を所管する營林署と旧國有林を所管する營林署とを區別せず、營林局管内全般に旧國有林伐積表を適用するといふよりなほきつちな暫定的方法がとられていた。一方従来の國有林伐積表は単に針葉樹、広葉樹のみを區別した簡單なものゝ、なほ詳細な樹種別區分をしたものまで、各局ごとに区々であり、かつ伐積表枚積と実伐積との關係にも再検討を必要とするやに思われる事柄もあつたので、早急に従来の伐積表を検討し、いろいろの不合理的を更正すべきであるといふ声が高まつてきた。林野庁においてはこの要望に充て、林業試験場と協説の上、昭和26年、立木伐積表測定要綱案を定め、昭和27年より各營林局において本格的に資料収集に着手し得る措置を講じたのである。しかしながら、當時は収獲表調製業務が、第一次軌道にのりだした時で、業務整理をきつめしかつ伐積表資料収集業務は、収獲表調製業務担当職員の新着によつたため、遅々として進まなかつたが、昭和29年7月林業試験場に送られて一冊のデータによつて林業試験場測定研究室では立木伐積表の手法を取り入れた伐積表調製方法を考案の上取りまとめた。収獲表、伐積表協説会館種の機会を利用し、各局担当官にその概要を講習した。現在、各局では、この講習によつて修得した方法にかつて伐積表調製業務を進めているのであるが、各局担当官の中には、その右 營林局の他の業務に駆り込まれるや、また、新たにこの業務を担当させられた人が少くないので、この方法の解説書を望む声が大きくなつてきた。よつて測定研究室では内容に多少不備の誤があるが一先早急に発表し各局の要望に充てる次手である。したがつて、なお不備な点は大方の御協力を得てさらに後日改訂することとしたい。

昭和31年1月

林業試験場 経営部長 小 崎 達

本書を読まれる方のために

本書は、オノ章で樹積表についての一般的説明を行い、オノ章で樹積表調製に使われる統計的方法について理論的側面を省き、実際計算に使われる公式、および表の使用、複製方法を説明した。

オノ、オノ、オノ章では東京森林試験場のヒノキの資料を使つて、オノ章で説明した方法を実験例を示した。オノ、オノ章は欧米で古くから行われている調和曲線法、共線回表法について要約的に説明した。

なお、理論的側面については、近田中に発刊される林業試験場報告を参照されたい。

目次

オノ章 概論	1
オノ節 樹積表調製方法について	1
オノ項 調和曲線を利用する方法	2
オノ項 共線回表を利用する方法	3
オノ項 最小二乗法を利用する方法	4
オノ節 樹積式	4
オノ項 樹積を樹高と幹径の函数として示したものの	4
オノ項 樹積を樹高と直径のみの函数として示したものの	7
オノ項 樹積を樹高のみの函数として示したものの	7
オノ項 形数による方法	7
オノ項 $\log v = \log a + b \log (D^2 H)$	8
オノ節 樹積式の精度の検討	8
オノ節 樹積式の精度の比較	10
オノ項 東京ヒノキによる比較	10
オノ項 Spurr 教授の研究	11
オノ章 樹積表調製に使われる統計的方法	16
オノ節 平均法	16
オノ節 平方和、標準、相関係数の計算式	16
オノ節 最小二乗法による回帰係数の決定	18
オノ項 直接法による計算	18
オノ項 相関係数による計算	26
オノ節 最小二乗法による誤差計算	26
オノ項 C 乗法の計算	26
オノ項 標準誤差の計算	30
オノ節 単相関係数および有意性の検定	30
オノ節 回帰係数の標準誤差および有意性の検定	34
オノ節 偏相関係数および有意性の検定	35
オノ節 変数間の計算	37
オノ節 回帰係数、分散の有意性を検討するための 回帰分析	38
オノ項 分散の有意性の検定	38

オ2項 回帰係数間の有意性の検定	39
オ3項 回帰係数間の有意性の検定	41
オ10節 独立変量の削除	45
オ1項 X_2 を削除し KC 求数	45
オ2項 回帰に帰因する平方和	46
オ3項 回帰係数	47
オ4項 回帰からの偏差平方和など	47
オ11節 分散による推定値の修正	48
オ3章 枝積式 $v = 10^a d^b h^c$ による枝積表調製の計算例	51
オ1節 資料	51
オ2節 平方和、積和の計算	52
オ3節 回帰係数の計算	53
オ4節 資料の整理	57
オ5節 整理済資料による枝積式の再計算	57
オ1項 平方和、積和の計算	57
オ2項 回帰係数の計算	57
オ6節 標準誤差、重相関係数、偏相関係数	58
オ7節 10cm 直径級毎の回帰係数の差の検定	59
オ1項 10cm 直径級別、平方和、積和、相関係、 回帰係数	60
オ2項 10cm 直径級別、回帰に帰因する平方和など	61
オ3項 6~50cm を一括した場合の回帰係数間 の差の検定	62
オ4項 6~40cm を一括した場合の回帰係数間 の差の検定	64
オ5項 12~40cm を一括した場合の回帰係数間 の差の検定	65
オ6項 枝積式の決定と枝積表の作成	68
オ4章 枝積式 $v = a + bA + cD^2 + d \cdot dR^2$ による枝積表 調製の計算例	69
オ1節 資料	69
オ2節 平方和、積和の計算	69

オ3節 回帰係数の計算	71
オ4節 推定値の標準誤差、重相関係数、偏相関係数、 回帰係数の有意性の検定	73
オ5節 独立変量 X_2 の削除	74
オ6節 資料の整理	75
オ7節 整理済資料による枝積式の再計算	78
オ1項 平方和、積和の計算	78
オ2項 枝積式の小数位の移動	78
オ3項 簡易 Doolittle 法による解法	79
オ4項 標準誤差、重相関係数および回帰係数の 有意性の検定	80
オ8節 10cm 直径級毎の回帰係数間の差の検定	81
オ1項 10cm 直径級別、平方和、積和、相関係数、 回帰係数	81
オ2項 10cm 直径級別、回帰に帰因する平方和など	82
オ3項 6~50cm を一括した場合の検定	83
オ9節 枝積式の決定と枝積表の作成	84
オ5章 樹種間の比較	88
オ1節 東京スギの枝積式の計算	88
オ2節 東京スギとヒノキの比較	89
オ6章 調和曲線法による枝積表調製方法	92
オ1節 まえがき	92
オ2節 free hand 曲線の適合	92
オ3節 移動平均法による曲線の平滑化	94
オ4節 調和曲線法による枝積表調製	96
オ1項 調製の手順	96
オ2項 枝積表の精度	101
オ7章 共線図表法による枝積表の調製	114
オ1節 まえがき	114
オ2節 直線図	115
オ3節 横線図	118
オ4節 枝積表の調製	120

第 I 章 概 論

第 1 節 枚積表調製方法について

枚積表を調製するための理想的方法は簡便、客観的であるべきであつて、しかも正確であるべきでなければならぬ。しかし、この3つの条件を十分満足させるよりよい方法は残念ながら未だ発表されていない。そのと端的にいへば、枚積表調製の理想的方法は数学的素養を余り要せず、最小の測定値を十二分に利用し内業の計算の速やかに行ふことができるような簡便なものであるべきである。

従来から用いられている枚積表調製方法にはいろいろおのりがあるが、これを分類すれば次の4つに大別できる。

1. 調和曲線を利用する図形解法
2. 移数により間接的に枚積を求める方法
3. 枚積式により直接的に枚積を求める方法
4. 矢線図表法

枚積表が適用される地域の大いさに関連して抽出誤差を抑制するため通常300~2000本の標本木を測定する必要があるが、昭和29年7月に行われた収穫表、枚積表協賛会ではこのことを考慮に入れて一畝畝高直径一畝高樹(20m高直径1m樹高樹)ごとに10本程度の標本木を測定することに決められた。

上記の4つの方法の中調和曲線を利用する図形解法は誤差のデータを必要とするが、最小二乗法による解法および矢線図表法は比較的少数の測定値でもよい。

内業の計算に要する時間の大切なものである。計算者が計算方法に熟練しておれば実際に内業に要する時間のかかるよりよい方法は一つもないのであるが、その方法に慣れていない場合にはむしろ数日かかることがある。このため、後の章では初等的な説明を含んで実際の計算方法について説明することにする。客観性についても全量主観の入り込む方法は一つもないのである。

調和曲線法および矢線図表法では個々の調査者は曲線をフリーハンドで適合せしめるのに主観を必要とし、最小二乗法では使用される特殊な式を選択する程度の主観が入りて来る。どの場合でもその影響が同じである基本的な式に人間の要素を入れることは比較的高い

第1項	基本矢線図表の作製	120
第2項	矢線図表の第1次修正	122
第3項	矢線図表の第2次修正	124
第4項	矢線図表の第3次修正	128
第5項	矢線図表の完成	130
第6項	精度の検定	132
付録1	マトリックス	133
付録2	M,Nが相互に独立する場合のM,Nの積の分散	155
付録3	正規方程式の終算	155
付録4	回帰に独立な平方和	158
付録5	行列式による正規方程式の解法	157
付録6	C束数の計算	159
付録7	回帰係数の分散並びに共分散	161
付録8	回帰函数の分散	162
付録9	回帰函数に適合する束数	162
付録10	回帰函数 $Y = a + b_1(X_1 - \bar{X}_1) + b_2(X_2 - \bar{X}_2) + b_3(X_3 - \bar{X}_3)$ の分散	162
付録11	同一の独立変量に対する回帰に独立な対になった残差の共分散	164
付録12	行列の元の小数点を移動させる方法	164

ことはあるといふ議論から、幾小に非ずは種々の顯著性の曲線適合が
絶て大なる影響を及ぼす。これ以外の方法よりは優れている。

最後に理論的成績表は、全面的に正確な結果を与えるものであるべきではない。

Spurr によれば最近では使用される成績表の数を減す傾向にあり、その使用法は成績の最終的推定よりむしろ地方的修正の基礎として用いられ、精度の悪いことは本質的のものでないといふことを心に留めておく必要がある。

成績表を利用する者の多くがこれらの地方的修正をする余裕が乏しいが、時間をさくことができず、面倒であると考える場合に正確な基本表の必要性がはつきりしてくる、と云っている。

わが國の場合には *Spurte* のこの説を直ちに適用することは困難であるが、類製される数積表の数を減しその適用地域を明確にすることは費用労力の莫から云つてもきわめて重要なることであるので、各局より50体あて資料を呈供してもらつて休業試験場で研究することになつてゐる。

第 7 項 調和曲線を利用する方法

枚積表調製方法のなか最も古いものでありて数厚の背景を余り必要としぬものである。Gravesがヨーロッパから導入し Chapman のテキストブックによつて一般に普及された調和曲線を利用する方法は永い間枚積表調製の手段として使用されてきた。Mulloy, G. A と H. W. Beall (1937) は4つの違つた近法で枚積表を調製するため同じハコヤナギのデータを使用し、二つのフリーハンド曲線法(調和曲線法と Dwight の修正法)が良好なる偏差合計を与え、Raineke と Bruce の接線図表法に比較する平均偏差を与えることを究明した。

11. Mulloy, G. A. and H. W. Beall 1937
A comparison of several methods of compiling volume
tables
J. For. 35: 932-941.

Dwight²³⁾ は組合けの方法は一定の傾角で与えられた樹高級の木の樹高は直径の木の木より大木の方が大となる結果を生ずることを指摘し、曲線から得られる偏りを修正する方法を示した。後に彼は栽植と樹高の関係は与えられた直径級内では直線であると仮定することによってどんなふうにもこの方法を既述出来ることを示した。

カシ、スナ、欧州カラマツ、欧州赤松の良付立方呎単位の利用枚
積を示している。最近の British 枚積表はこれと類似のある方法で
編纂された。³⁾

わが国の現行税制表では本法によりたものは男当り百い。

※2項 其線圖表を利用する方法

矢線図表すむわり統計分野でよく知られているノモグラフは近程式を表わす効果的の方法である。これは1919年 Bruce により図形化の手段として、また1931年 Bruce と Reincke により重岡偏方程式の曲線性を修正する手段として林厚に取り入れられたものである。

しかし、この方法は余り正確でないことを発見し翌年、基本共線
図式を用いた特殊な状態を調整方法を発表した¹⁾。

- 2). Dwight. 1937 Refinements in plotting and harmonizing free kind
Curve Forestry Chronicle 13:357-370
- " 1937 The Percent-deviation method of constructing
volume table, Forestry Chronicle 13:409-416
- " 1937 The fitting of linear regression line by
the method of least squares.
Forestry chronicle 13:509-519
- 3). Hummel F.C. and W.T. Waters 1950
General volume table for oak in Great Britain
Forestry Commission Forest Record No 5 11pp
- " " " " " " " " " " " "
General volume table for beech in Great Britain
No 6 11pp
- Hummel. F.C. T.W. Irvine and J. Jeffers 1950
General volume table for European larch
in Great Britain
Forestry Commission, Forest Record No 9 24pp
- 1). Reineke L.H. and Donald Bruce. 1932
An alignment-chart method for preparing forest-tree
volume table U.S. Dept. Agr Tech. Bull 364. 28pp

Rennett と McIntyre は Bruner と Reinck の式線図表法に対しその欠点である基本式線図表の編製を避けるため、修正法を提案している。すなわち、計数方眼紙に樹高軸及び直径軸はそれぞれ樹高対径積、直径対径積をプロットすることにより目盛られる。このようにして樹高対径積（直径対径積）の累掛りの回帰が樹高（直径）軸を目盛るのに用いられる。統計的に修正するには樹高（直径）対径積の真の回帰を用いねばならないと述べている。

式線図表は径積式の検定および回帰値を簡便に求めるのに使われる計数方眼紙は最小二乗法で解かれ、その方程式は式線図表の形で表わされ、その回帰性について各変数は検定される。このようにことが行われれば、図の軸は修正され最良的径積表の方程式が得られ、よくて図から読みとられるのである。

※3項 最小二乗法を利用する方法

直径、樹高、径積の関係が線型を表わされるならば、一般式を定めた後、係数は代数的解法により求めることができる。この方法は式が検定されれば完全に信頼的であるという長所がある。結果として得られた式は実際の値と計算値の偏差の平方和が最小となるように資料に適合している。

最小二乗法は直線型に置けるあらゆる径積方程式に適用できるものである。わが国でもこの方法は広く採用され、この方法により編製された径積表はかなり多い。

最小二乗法により径積表を編製する際使われる径積式については章をあらためて説明し、計算方法については計算例で示すこととする。

※2節 径積式

※1項 径積を樹高と胸高直径の函数として示したもの

$$I. \quad v = a d^b h^c \quad \text{又は} \quad v = 10^a d^b h^c$$

v : 径積
 d : 胸高直径
 h : 樹高
 a, b, c : 係数

2). Demeritt D. B. and A. C. McIntyre 1932

A simple method of constructing tree volume table
 Jour. Agr. Res 44: 529-539

前者は山本和藏氏が一般径積表の編製に使用される径積式として提案されたものであり、後者は清野啓氏がブナ単木径積表編製に使用されたものである。

米国においては Schumacher と Hall がこの式を使用し、現在立方径単位的全径径積表編製に広く使われている。後者はこの方法を 263 本の yellow poplar に適用して直径回帰係数 (R) 0.9981 を得た。

さらに南部系松 3 種、東方系五葉松 5 種、米マツの 9 樹種を使いて検討を行ったが、どのようの場合でも直径の指数は 2 より小さく、米マツの 1.67 から loblolly pine の 1.91 まで変化しており、この差異は実際の直径が使われた場合には、径積の変動は直径の平方より小さいことを示している。一方樹高の指数は 1 つの例外を除いて 1 より大であり、loblolly pine の 0.95 yellow poplar の 1.06 から短葉松の 1.23 まで変化しており、これは径積が樹高に関する直線化以上に増加していることを示している。胸高直径、樹高の指数の 2 および 1 からのへだたりは径積の単位当りの変化に対する形数の変化の程度であると論じている。

山本氏がアカマツの単木径積に適用されたものは、胸高直径、樹高の指数はそれぞれ 1.8692, 1.0675、カラマツに適用されたものは、胸高直径 34 cm 以下では 1.9572, 0.9908, 36 cm ~ 46 cm までは 1.7154, 0.8422, 48 cm 以上では 1.9859, 0.8154、清野氏がスナノ成林径積に適用されたものはそれぞれ 2.24221 および 0.79658 であつた。

Schumacher の方程式では樹高と直径の和は一般に 3 に近接している。Thorner は方程式は指数のノルマル、サム乗 3 とする三次式であるという説論に基いてそれを 3 に等しくすべきであるという Dwight の提案をこの書面に記載した。

4). 山本和藏：アカマツの単木径積表及び胸高径積表
 (林業試験場報告 16 号 大正 7)

麻生 誠：カラマツの単木径積表編製
 (林業試験場報告 133 号)

2). 清野 啓：スナノ単木径積表の編製方法について
 (林学雑誌 18-7 第 11)

3). Thorner, W. 1948: Tree volume determination
 Pulp and Pap. Res. Ins. Canada Wood Land Res Index 41(B) 27

彼の提案した方程式は次のとおりである。

$$V = k \left(\frac{H}{D} \right)^m H D^2$$

上式は次の形に変えることができる

$$V = a H^b D^{3-b}$$

II. $V_0 = L g e^{-m h - \frac{b}{g}}$ h ; 樹高 g ; 胸高断面積 L, m, n 係数

寺崎博士編纂スギ立木算枝積に使用されたものである。

$$y = A e^{ax - \frac{b}{x}} \quad \text{又は} \quad y = A_1 y_0 e^{ax - \frac{b}{x}} \quad \text{なる幹曲線の通}$$

数本と見做して略算的に上式を誘導できる。

y ; 直径より x なる距離における半径

y_0 ; 胸高半径

A, A_1, ab, a', b' 係数

III. i) $V = K d^{2m} e^{l'h - l''h^{-1}}$

ii) $V = K d^m l e^{l'h - l''h^{-1}}$

d ; 樹高

d^{2m} ; 胸高直径

h ; 樹高

K, l, l'' ; 係数

寺崎博士がひばの単木枝積表の改訂のために添えられたものである。

IV. 対数にあらわした枝積式

1). $V = a + bD^2 + cD^3 + dH^2 + eDH^2$

Naslund が提案したものである。

2). $V = a + bD + cDH + dD^2 + eH + fD^2H$

3). $V = a + bD + cDH + dD^2 + fD^2H$

Meyer の修正式

* 4). $V = a + bD^2 + cH + dD^2H$

D および DH を 3) から省き、 H を再び変数としてつけ加えたものである

本式は Stoute が枝分枝積方程式と関連して提案したもので、

Spurr はこれを Australian 式と呼んでいる。

上式の公式はいずれも最小二乗法で解くには相当両肩がかり

と同様に、図形的に解くにはかなり複雑であり困難である。

2). 寺崎博士がひば単木枝積表及び単木枝積計算補助表の改訂 (林業試験報告 オノ 9 号 大 9)

1). Stoute J. N. 1945. The use of volume table in pine stand. Australian Forestry 9: 48-52

5). $V = a + bD^2H$

これは独立形級法から普通化されたもので、立方尺枝積表を枝積図表で調整する場合此の基本式が使われた。

6). $V = aD^2H$

直径と樹高の指数が 2 および 1 と有差がないと仮定することにより推定されたものである。

オ 2 項 材積を胸高直径のみの函数として示したもの

1. $V = a_1 d^{2b} - a_2 db$ d ; 胸高直径 a_1, b は係数

フランス法として寺崎博士採用したものである。

2. $V = K \frac{d^{2b}}{1+db}$ d ; 胸高直径 K は係数

戸次氏の使ったものである。

3. $V = a_1 + a_2 d^{2b}$ d ; 胸高直径 a_1, a_2 ; 係数

4. $f = \frac{m}{(m+1)(n^m-1)}$ より $V = g h f$

f は胸高径数 m は係数 n は胸高に対する直径の指数

和田國次郎氏の使った式で、旧樹数表で一般に用いられていた。

(御料林 オノ 11 号 略 4*)

オ 3 項 枝積を樹高のみの函数として示したもの

$V = K e^{l'h - l''h^{-1}}$ h ; 樹高 K, l, l'' ; 係数

$V = K e^{-\frac{c}{h}}$

寺崎博士が使用したものである。

オ 4 項 形数による方法

1). $f = \alpha + \frac{\beta}{h} + \frac{\gamma}{h^2}$ より $V = g h f$

f ; 形数 h ; 樹高 g ; 断面積

α, β, γ は係数

Kunze 氏の枝積表整理法で用いられたものである。

2). $f = \alpha + \frac{\beta}{h} + \frac{\gamma}{h^2}$ より $V = g h f$

中島氏は 1), 2) より形数 f を算出して両首を計算して枝積表の調整を行った。

3). $f = a + \frac{B}{h} + \frac{C}{h^2} + \frac{e}{h} + \frac{g}{h^2}$ a, B, C, e, g は係数

林業試験場測定研究室長大及栗松氏の考案されたものである。

1). 中島友吉 簡便法を要にする単木枝積表の比較研究

*5項 $\log V = \log a + b \log (D^2 H)$

オ—項Ⅲ、6)の式と対数による解法の長所を結びつけて考えられるものである。

2. Spurr: Forest Inventory 1952

なお、参考のため Spurr 著の Forest Inventory に集録されている樹式を表 1.1 に示す。

表 1.1 樹式方程式

番号	対数による形の
3	Näslund $V = a + bD^2 + cD^2H + dH^2 + eDH^2$
4	含括的形の $V = a + bD + cDH + dD^2 + eH + fD^2H$
5	Meyer の修正式 $V = a + bD + cDH + dD^2 + eD^2H$
6	Australian $V = a + bD^2 + cH + dD^2H$
7	変数結合式 $V = a + bD^2H$
8	形数を一変とした場合 $V = aD^2H$

対数に等しい形数を含む方程式

11.	変数結合形数式 $V = a + bH + cD^2H + dHD^2H$
12.	簡易形数式 $V = a + bFD^2H$
対数による形の	
1.	Schumacher $\log V = \log a + b \log D + c \log H$
2.	Dwight $\log V = \log a + b \log D + (3-b) \log H$
3.	対数による変数結合式 $\log V = \log a + b \log (D^2H)$

対数による形数を含む方程式

10.	対数による形状直径を含む式 $\log V = \log a + b \log D + c \log H + d \log D_u$
15.	対数による変数結合形数式 $\log V = \log a + b \log (FD^2H)$

V は材積 D : 胸高直径
 D_u : D を測つた場合 形率または Girard 形数を与えるものに選ばれる上級直径 H : 全樹高
 F : 形率又は Girard 形数
 形数は式および使用されるデータで変化する。

*3節 材積長の精度の検討

どのより方法で材積表が調整されたとしてもその精度を明確にしておく必要がある。

従来から材積表の精度の測定としては累積偏差 (aggregate deviation)

と平均偏差 (average deviation) が使われて来た。

累積偏差

これは推定材積の百分率で表わした実材積の合計と推定材積の合計との差である。

$$\text{累積偏差} = \frac{\sum Y - \sum \hat{Y}}{\sum \hat{Y}} \quad Y: \text{実材積} \quad \hat{Y}: \text{推定材積}$$

これは材積表に偏差のないことを示す指標であつて、直率 1% を越えては悪い。

平均偏差

これは推定材積の百分率で表わされた実材積と推定材積の差の算術和である (正負の符号に無関係に集計したものの)。

$$\text{平均偏差} = \frac{\sum |Y - \hat{Y}|}{\sum \hat{Y}} \quad Y: \text{実材積} \quad \hat{Y}: \text{推定材積}$$

これは主として使用されたデータに固有の変動性を示し、時には 10% 以上になることがある。

しかし幾つかの材積表調整法がある一組のデータに適用される場合には、調整法の相対的精度を示す鋭敏な検定方法として用いられている。

いずれの通常平均材積の百分率で表わされているが絶対値で表わすこともできる。

しかし測樹等に統計的方法の使用が増大し、最小二乗法の原理が広く認められてきたので推定値の標準偏差 (回帰からの標準偏差) が最良の精度の指標とされている。

標準誤差は次の二りの方法で計算できる。

1). 最小二乗法を解くため計算された平方和、積和から計算される。

2). 実材積と推定材積の偏差を個々の木について求めこの平方和を合せ平方根を計算する。

対数による解法では、四捨五入により生ずる些少な差を除外せば両者の計算で同一の標準誤差の値が得られるが、対数による解法では最小二乗法により得られた回帰のデータから得られる推定値の標準誤差は、個々の偏差を直接合計することにより得られるものより大体において低い。これは対数による場合の標準誤差は対数による形のみの場合のよめに、材積そのものの偏差で表えて、実材積

の対数と推定枚積の対数の間の偏差に基いているため低いのである。したがって対数による解法では、異数で表わされた個々の枚積の偏差から得られた標準誤差のみが対数により正しい解法の標準誤差と比較できるのである。すなわち、対数の偏差から求められた標準誤差は別の対数による解法の標準誤差とは正しく比較することができるが、異数の偏差による標準誤差とは比較することはできないのである。

なお相関係数は次のような理由から、枚積表の精度を表わす指標としては適当ではない。

1. 相関係数は独立変数により従属変数を測る場合の精度の指標としてよりむしろ変数間の相互関係を測るものである。
2. 対数で資料を表わすという簡単な行為は、相関係数が基いている分布状態を変えるので、対数による解法で得られた相関係数は対数により正しい解法から得られたものと直接比較することはできないのである。

枚積を求める場合推定値の標準誤差による精度が同じの場合、対数による解法の方が数数により正しい解法より大きな相関係数が得られる。

3. 回帰線が原点を通るように制約されている解法の相関係数は、回帰線が常に変数の平均を通るよう制約されている。これと対照的な解法の相関係数より大である。それにもかかわらず後者による解法は推定値の誤差で精度が測られる場合に、常に最良の精度の指標である。

第4節 枚積式の精度の比較

第1項 東京ヒノキによる比較

枚積式の精度の比較は、要綱にある誤差率により行われ、

誤差率の計算は次式で行われ

$$\text{誤差率}(\%) = \frac{(\text{標準誤差}) \times t}{\text{平均値}} \times 100$$

t: 95%信頼度のt値

標準誤差は対数を使わない枚積式を採用した時には、回帰からの標準誤差(例えば $S_{y.12}$)を使い、対数を使い枚積式を採用した時には、

$\bar{v} = (\text{枚積式から計算した平均の異数}) \times (\text{修正係数})$

$$(\text{標準誤差}) = \left\{ \frac{1}{n-(K+1)} \sum (v - \bar{v})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

v: 実枚積

K: 独立変数の個数

を使い、平均値は対数の平均値 $\bar{v}$ を異数に修正係数を乗じたものを、異数の平均値の近似値として採用する。

次章で説明している

$$v = 10^a d^b h^c \quad (1)$$

$$v = a + b \cdot h + d \cdot d^2 h \quad (2)$$

に東京ヒノキの資料を適用し、その誤差率と標準誤差を表1.2に示す。

表1.2

枚積式	$v = 10^a d^b h^c$ (1)			$v = a + b \cdot h + d \cdot d^2 h$ (2)		
直径級	本数	標準誤差	誤差率%	本数	標準誤差	誤差率%
6~10	74	0.0015815	13.02	74	0.0020351	14.87
12~20	201	0.0086721	13.16	203	0.0085940	11.79
22~30	188	0.024725	12.47	190	0.025399	12.23
32~40	84	0.060727	14.21	77	0.045050	10.47
42~50	57	0.094697	13.54	41	0.062059	8.29

備考 この誤差率は毎木の誤差率であつて林分に適用する時には次式で枚積表の誤差率を求める

$$\frac{\text{誤差率}}{\sqrt{\text{本数}}} = \text{林分に対する誤差率} \quad (95\% \text{信頼度})$$

この結果を見れば、6~10cm 直径級を除いて(2)の方が良い場合を示していることがわかる。

第2項 Spurr 教授の研究

Spurrとその著書 *Forest Inventory* に記載している枚積式の検討結果を、枚積表調整方法を決定する時参考とするため次に示す。

最初の3組は最近立木枚積の研究に使われた20組の測定値から選び出されたもので、彼の研究は対数枚積方程式と算術枚積方程式とを比較することを目的の一つとしたので、3つの組は異なる枚積直径、樹高の関係を表わすように選ばれている。

標準誤差は前節で説明した二つの方法を計算したものを示す。

1. Black Spruceについて。

Minnesota の Superior National Forest で 1922 年 US 山林局が蒐集し、大湖州林業試験場の好意により提供された 192本の測定値からランダムに50本抽出したもののデータとなっている。

この資料は材積が直径の平方より異常に小さい一つの極端な場合を代表している。

表1.3

公 式	位 式 番 号	推 定 値 の 標 準 誤 差				観 測 値 の 標 準 誤 差	相 対 誤 差
		回 帰 計 算 に 用 いた も の		直 接 計 算 さ れ た も の			
		立 方 呎	%	立 方 呎	%	立 方 呎	立 方 呎
ARITHMETIC SOLUTIONS							
A Australian	6	0.61	6.8	-	-	-	-
B Combined variable	7	0.74	8.3	0.73	8.3	-0.05	0.56
C Constant form factor	8	1.00	11.2	-	-	-	-
D Comb-var form class	11	0.38	4.3	-	-	-	-
E Short-cut form class	12	0.41	4.6	0.40	4.5	-0.01	0.30
LOGARITHMIC SOLUTION							
		(logs)					
F Schumacher	1	0.024	5.7	0.60	6.7	-0.11	0.45
G Drought	2	-	-	0.72	8.1	+0.06	0.52
H log. comb-var, graphic	9	-	-	0.73	8.2	+0.07	0.52
I Same, least squares	9	0.028	6.7	0.68	7.6	-0.06	0.50
J log. form diam, F.R.	10	0.022	5.2	-	-	-	-
K log. form diam, G.F.C.	10	0.020	4.6	0.44	4.9	+0.01	0.30
L log. comb-var. form class, graphic	13	-	-	0.41	4.6	-0.10	0.31

II Red Spruce

Maine州のPiscataquis 地方のSquaw 山の R.S. Hasmer が蒐集し、Northeastern 林業試験場の好意により使用できるものにおつた 246本の測定値から、無作為に選ばれた 100本の Red Spruce をデータとしたものである。

このデータの直径および樹高の指数は、検定の行われ Red Spruce の全標本から採られたもので、すなわちそれぞれ 1.85 および 0.92 とほぼ等しいものである。

表1.4

公 式	公式 番号	推定値の標準誤差				観測値差	平均偏差
		回帰から計算されたもの		直接計算されたもの			
		立方呎	%	立方呎	%	立方呎	立方呎
ARITHMETIC SOLUTIONS							
A Australian	6	5.24	11.67	5.18	11.55	-0.09	3.83
B Combined variable	7	5.28	11.76	5.21	11.62	+0.07	3.76
C Constant form factor	8	5.31	11.83	5.38	11.98	+0.66	3.81
LOGARITHMIC SOLUTIONS							
		(logs)					
D Schumacher	1	0.048	11.74	5.66	12.61	-0.55	4.08
E Drought	2	—	—	6.59	14.68	-0.14	4.43

III. Sugar Maple (サトウカエデ)

1911年 E.H. Frothingham が New Hampshire 州 Grafton 地方 Woodstock の Moosilauke 湖の上流で測定しボーードフット単位の材積表の調製に使用した 360本の測定値から、無作為に選ばれた 130本のサトウカエデをデータとしたものである。

このデータでは直径、樹高の指数は 2 と 1 に等しく、それぞれ 1.97 および 0.99 である。

表1.5

方 法	公式 番号	推定値の標準誤差 百分の計	
		立方呎	%
ARITHMETIC SOLUTIONS			
A. Regression of Von D	-	12.44	19.83
B. Regression of Von D ²	-	10.02	15.97
C. Regression of Von D and D ²	-	9.98	15.90
D. Nöslund	3	8.01	12.75
E. Australian	6	8.01	12.77
F. Combined variable	1	7.11	12.70
G. Constant form factor	8	8.03	12.80
LOGARITHMIC SOLUTIONS			
		(logarithms)	
H. Schumacher	1	0.049	11.88*
I. Dwight	2	—	—
J. log. Combined variable	9	0.098	25.20*
K. log. form diameter			

* Percent Standard errors by regression computation of logarithmic data are not comparable with values developed from arithmetic data.

IV. Red Spruce

解 C, D, E は後述説明する 46 本以外に、この検定で用い
得る 531 本のトウヒの全測定値から得られたものである。

解 C は Schumacher の式で最小二乗法によりて得られたもの
であり、解 D, E は変数結合式および対数による変数結合式をグ
ラフによりて適合せしめたものである。

解 F ~ J は II で用いられた 531 本の一部を占す 100 本から得
られたものである。

解 K のデータは特に注意して測定を行いしかる未だ検定表
調製に使われなことの無い一組の測定値を材料であると考えら
れたので、New England の 5 箇處を SPVrr および彼の助手によ
つて蒐集されたものである。

表 1.6

方 法	公 式 番 号	推 定 誤 差		累積偏差 正負誤	平均偏差 正負誤
		正負誤	%		
STANDARD SOLUTIONS					
A. Cany, table 6, Converted	-	3.73	13.9	- 1.60	1.94
B. Grundner Norway Spruce	-	2.49	9.3	- 0.63	1.63
Based on 531 sample tree					
C. Schumacher	1	2.39	8.9	- 0.79	1.51
D. Comb var, graphic	7	2.34	8.7	- 0.87	1.60
E. log. Comb. var, graphic	9	2.31	8.6	- 0.78	1.55
Based on 100 sample tree					
F. Schumacher	1	2.52	9.4	- 0.60	1.49
G. Dwight	2	2.29	8.5	- 0.75	1.49
H. Australian	6	2.37	8.8	+ 0.33	1.80
I. Combined variable	7	2.29	8.3	- 0.31	1.40
J. Constant form factor	8	2.42	9.0	- 0.70	1.76
Based on 46 sample tree					
K. Comb var, graphic	7	2.28	8.5	- 0.28	1.47
FORM CLASS SOLUTIONS					
L. Behre, N.E.F.E.S.	-	3.79	14.2	- 2.62	2.69
M. Mulloy and Kearney	-	2.09	7.8	- 1.02	1.33
N. log. form diameter	10	1.64	6.1	- 0.50	1.15
O. Same, using average form class	10	2.87	10.7	- 1.00	1.91

上記の結果、Schumacher 式は一組の場合、すなわち直径の指
数は 1.62 というきわめて低い値の場合だけ特に良好なものであり
た、Australian 式はすべての組、変数結合式は 2, 3, 4 組で良好
な結果が得られた。

第2章 積算表調製に使われる統計的方法

第1節 まえがき

数式法によりて材料または形数を求める場合に使用される統計計算方法について初等的な説明をしておいた方が、後に行う計算例を理解する上にも便であると思われるので本章を特に設けた。

なお、詳細を知りたい方は参考文献を参照せられたい。

第2節 平方和、積和、相関係数の計算式

最小二乗法で諸数を決定するには、まず平方和、積和あるいはそれらの導かれる相関係数を求める必要がある。

X_{il} を X_i なる item (例えば直径) に属する個々の値とし、その平均値を $\bar{X}_i$ とする。

$$\bar{X}_i = \frac{S(X_{il})}{n} = \frac{(X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in})}{n} \quad (1)$$

ここで S は和の意味に用いられる記号である。

$$x_{il} = X_{il} - \bar{X}_i \quad \text{とすれば}$$

平方和は次式で表わされる。

$$Sx_i^2 = S(X_{il} - \bar{X}_i)^2 \quad (2)$$

実際に用いるためには上式を変化して次式が計算に便利である。

$$\begin{aligned} Sx_i^2 &= S(X_{il} - \bar{X}_i)^2 \\ &= S(X_{il}^2 - 2X_{il}\bar{X}_i + \bar{X}_i^2) \\ &= SX_{il}^2 - 2\bar{X}_i SX_{il} + n\bar{X}_i^2 \end{aligned}$$

1)より

$$= SX_{il}^2 - \frac{1}{n}(SX_{il})^2 \quad (3)$$

或いは

$$= SX_{il}^2 - n(\bar{X}_i)^2 \quad (3')$$

$$= SX_{il}^2 - \bar{y}(SX_{il}) \quad (3'')$$

このうち3)の計算が普通使用されている。

X_1 のほかに X_2 なる item があれば、その平方和は X_1 の場合の1を2で置きかえれば全く同じ式が得られる。

X_1 と X_2 の積和は

$$\begin{aligned} SX_1X_2 &= S(X_{1l} - \bar{X}_1)(X_{2l} - \bar{X}_2) \\ &= S(X_{1l}X_{2l} - \bar{X}_1X_{2l} - \bar{X}_2X_{1l} + \bar{X}_1\bar{X}_2) \\ &= SX_{1l}X_{2l} - \bar{X}_1SX_{2l} - \bar{X}_2SX_{1l} + n\bar{X}_1\bar{X}_2 \\ &= SX_{1l}X_{2l} - \frac{SX_{1l}SX_{2l}}{n} - \frac{SX_{2l}SX_{1l}}{n} + n\frac{SX_{1l}SX_{2l}}{n^2} \\ &= SX_{1l}X_{2l} - \frac{SX_{1l}SX_{2l}}{n} \end{aligned}$$

相関係数は次式から得られる。

$$r_{12} = \frac{SX_1X_2}{\sqrt{SX_1^2 SX_2^2}}$$

相関係数の用法は節をあらためて説明する。

平方和、積和、相関係数は次表のような計算表で計算を行えば便利である。

本表は独立変数が多くなつてもその計算様式は全く同じである。

なお枠内は独立変数が二つの場合を表わす。

表2.1 平方和、積和、相関係数を求める計算表

$n = \text{個数}$		X_1	X_2	X_3	Y
和		SX_{1l}	SX_{2l}	SX_{3l}	SY_l
平均		SX_{1l}/n	SX_{2l}/n	SX_{3l}/n	SY_l/n
X_1	1.	SX_{1l}^2	$SX_{1l}X_{2l}$	$SX_{1l}X_{3l}$	$SX_{1l}Y$
	2.	$(SX_{1l})^2/n$	$(SX_{1l}SX_{2l})/n$	$(SX_{1l}SX_{3l})/n$	$(SX_{1l}SY_l)/n$
	3. (1-2)	Sx_1^2	Sx_1x_2	Sx_1x_3	Sx_1y
	4.	$\sqrt{Sx_1^2}$	$\sqrt{Sx_1^2 Sx_2^2}$	$\sqrt{Sx_1^2 Sx_3^2}$	$\sqrt{Sx_1^2 Sy^2}$
	5.		r_{12}	r_{13}	r_{1y}
X_2	1.		SX_{2l}^2	$SX_{2l}X_{3l}$	$SX_{2l}Y$
	2.		$(SX_{2l})^2/n$	$(SX_{2l}SX_{3l})/n$	$(SX_{2l}SY_l)/n$
	3.		Sx_2^2	Sx_2x_3	Sx_2y
	4.		$\sqrt{Sx_2^2}$	$\sqrt{Sx_2^2 Sx_3^2}$	$\sqrt{Sx_2^2 Sy^2}$
	5.			r_{23}	r_{2y}
X_3	1.			SX_{3l}^2	$SX_{3l}Y$
	2.			$(SX_{3l})^2/n$	$(SX_{3l}SY_l)/n$
	3.			Sx_3^2	Sx_3y
	4.			$\sqrt{Sx_3^2}$	$\sqrt{Sx_3^2 Sy^2}$
	5.				r_{3y}
Y	1.				SY_l^2
	2.				$(SY_l)^2/n$
	3.				Sy^2
	4.				$\sqrt{Sy^2}$

例^{a)}

$v = 10^3 d^0.4$ を東京ヒノキに適用した場合の数値を上げる。以下特にことわりなき限り例としてその元一々から得られたものを使用する。

表2.2. 平方和、積和、相関係数を求める計算表
n = 615

和 平均	X ₁ 810.0154 1.31710	X ₂ 714.1420 1.16121	Y 848.8621 1.38026
X ₁ 1. SX ₁ ² など	1097.00620571	957.61985829	1191.05568018
2. 補正項	1066.86983453	940.59515087	1118.03475362
3. SX ₁ ² など	30.13637118	17.02470742	73.02092656
4. √SX ₁ ² など	5.48966038	18.92303758	73.67115737
5. 相関係数		0.89968	0.99117
X ₂ 1. SX ₂ ² など		841.14836811	1029.38111056
2. 補正項		829.26633523	985.70419157
3. SX ₂ ² など		11.88203288	43.67691899
4. √SX ₂ ² など		3.44703247	46.25912242
5. 相関係数			0.94418
Y 1. SY ²			1351.74942365
2. 補正項			1171.65343873
3. SY ²			180.09598492
4. √SY ²			13.41998

表3節 最小二乗法による回帰係数の決定

オ1項 直接法による計算

I. 連立方程式による解法

最小二乗法の整理を適要すれば、次の二つの連立方程式が得られる。

説明を簡単にするため原方程式を

$$Y = a + b(X_1 - \bar{X}_1) + c(X_2 - \bar{X}_2)$$

とする。

$$\begin{cases} \sum X_1^2 b + \sum X_1 X_2 c = \sum X_1 Y \\ \sum X_1 X_2 b + \sum X_2^2 c = \sum X_2 Y \end{cases} \quad 5$$

この方法は最小二乗法を回帰係数を決定する場合古くから用いられてきた方法である。

$$b = \frac{\begin{vmatrix} \sum X_1 Y & \sum X_1 X_2 \\ \sum X_2 Y & \sum X_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum X_1^2 & \sum X_1 X_2 \\ \sum X_1 X_2 & \sum X_2^2 \end{vmatrix}} = \frac{(\sum X_1^2)(\sum X_2 Y) - (\sum X_1 X_2)(\sum X_1 Y)}{(\sum X_1^2)(\sum X_2^2) - (\sum X_1 X_2)^2}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} \sum X_1^2 & \sum X_1 Y \\ \sum X_1 X_2 & \sum X_2 Y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum X_1^2 & \sum X_1 X_2 \\ \sum X_1 X_2 & \sum X_2^2 \end{vmatrix}} = \frac{(\sum X_1^2)(\sum X_2 Y) - (\sum X_1 X_2)(\sum X_1 Y)}{(\sum X_1^2)(\sum X_2^2) - (\sum X_1 X_2)^2} \quad 6)$$

例

6)に表2.2の値を代入すれば

$$b = \frac{(4.88203288)(73.02092656) - (17.02470742)(43.67691899)}{(30.13637118)(17.02470742) - (17.02470742)^2} = 1.81783$$

$$c = \frac{(30.13637118)(46.25912242) - (17.02470742)(73.02092656)}{(30.13637118)(17.02470742) - (17.02470742)^2} = 1.67127$$

II. 組織的解法

回帰係数を求める場合、計算過程における丸めの誤差のため、最後の吟味において連立方程式の左右両辺が等しくなくなる。計算を止めて計算における誤りを発見することが難しい。この実を改善し、後に説明する回帰方程式の誤差を求めるためのC束法の計算のため、表の形で組織的にやり計算方法がいろいろ考案されているが、計算手続が比較的簡単に正しい精度の得られる簡略Doolittle法で、枚積式の計算を行うためこれについて説明する。

なお、この目から知られている方法にDoolittle法およびデーミングの最小二乗法があるが、前者は収積表、枚積表打合せ会議のテキスト後者はデーミング(森口繁一)：推計学によるデータの纏め方を参照されたい。

1. 独立変数が二つの場合 { Y = a + b(X₁ - X̄₁) + c(X₂ - X̄₂) }

表2.3の1

行	指 示	b	c	g	計	check
I 1).	表2.1を移す	[bb]	[bc]	[b0]	[bT]	
2).			[cc]	[c0]	[cT]	
II 3).	1).を移す	[bb]	[bc]	[b0]	[bT]	
4).	3).÷[bb]	1	[bc]	[b0]	[bT]	
III 5).	2.-{4.}×[bc]		[cc]	[c0]	[cT]	
6).	5.÷[cc]		1	[c0]	[cT]	
7).	7).を4.)に代入 6.)がそのまゝ			b = (b0) - (c0)(bc) c = (c0)		

手順

I. 1). 2). 表 2.1 の枠内値をそれぞれ記入する。

$$Sx_1^2 = (bb)$$

$$Sx_1x_2 = (bc)$$

$$Sx_2^2 = (cc)$$

$$Sx_1y = (b0)$$

$$Sx_2y = (c0)$$

葉行列と対角行列であるから対角線の下側の要素は上側の要素に対応する。

計のゆゑに (bT) (CT) を記入する。

$$(bT) = (bb) + (bc) + (b0)$$

$$(CT) = (bc) + (cc) + (c0)$$

II. 3). 1). をそのまゝ移す

4). 3). を (bb) で割りその結果を記入する。

$1 + (bc) + (b0)$ を計算し (bT) と比較する

$$\begin{cases} (bc) = \frac{(bc)}{(bb)} \\ (b0) = \frac{(b0)}{(bb)} \end{cases}$$

III 5). 4). に (bc) を乗じ 2) より引く。

$$(cc.1) = (cc) - (bc)(bc)$$

$$(c0.1) = (c0) - (b0)(bc)$$

$$(CT.1) = (CT) - (bT)(bc)$$

$(cc.1) + (c0.1)$ を計算して (CT.1) と比較する。

6) 5) を (cc.1) で割る。

$$(c0.1) = \frac{(c0.1)}{(cc.1)}$$

$$(CT.1) = \frac{(CT.1)}{(cc.1)}$$

$1 + (c0.1)$ を計算し (CT.1) と比較する。

これより回帰係数 b, c はすべて求められる。

$$c = \frac{(c0.1)}{(cc.1)} = (c0.1)$$

$$b = (b0) - (c0.1)(bc)$$

$b(bb) + c(bc)$ および $b(bc) + c(cc)$ を計算しそれぞれ

に (b0) (c0) と比較する。

2. 独立変数が三つの場合 $\{ Y = a + b(X_1 - \bar{X}_1) + c(X_2 - \bar{X}_2) + d(X_3 - \bar{X}_3) \}$

独立変数が三つ以上ある場合でも二つの場合の屋敷を拡張にすぎないが、後に示す計算例は Australian 式をつかっているので独立変数三つの場合について特に説明しておく。

表 2.3 の 2.

行	指示	b	c	d	e	計	check
I	1)	(bb)	(bc)	(bd)	(b0)	(bT)	(b0)'
	2)	表 2.2 を移す	(cc)	(cd)	(c0)	(CT)	(c0)'
	3)			(dd)	(d0)	(dT)	(d0)'
II	4)	1) を移す (bb)	(bc)	(bd)	(b0)	(bT)	- -
	5)	4) ÷ (bb)	1	(bc)	(bd)	(bT)	- -
III	6)	2) - 5 × (bc)	(cc.1)	(cd.1)	(c0.1)	(CT.1)	- -
	7)	6) ÷ (cc.1)	1	(cd.1)	(c0.1)	(CT.1)	- -
IV	8)	3) - 5 × (bd) - 7 × (cd.1)		(dd.2)	(d0.2)	(dT.2)	- -
	9)			1	(d0.2)	(dT.2)	- -
	12)	5) より		b			
	11)	7) より		c			
	10)			d			

手順

I. 1) 2) 3)

表 2.1 の値をそれぞれ記入する。

$$Sx_1^2 = (bb)$$

$$Sx_1x_2 = (bc)$$

$$Sx_1x_3 = (bd)$$

$$Sx_1y = (b0)$$

$$Sx_2^2 = (cc)$$

$$Sx_2x_3 = (cd)$$

$$Sx_2y = (c0)$$

$$Sx_3^2 = (dd)$$

$$Sx_3y = (d0)$$

計のゆゑに (bT) (CT) (dT) を計算して記入する。

$$(bT) = (bb) + (bc) + (bd) + (b0)$$

$$(CT) = (bc) + (cc) + (cd) + (c0)$$

$$(dT) = (bd) + (cd) + (dd) + (d0)$$

II. 4) 1) をそのまゝ移す

5) 4) を (bb) で割りその結果を記入する。

$$(bc) = \frac{(bc)}{(bb)}$$

$$(bd) = \frac{(bd)}{(bb)}$$

$$(b0) = \frac{(b0)}{(bb)}$$

$$(bT) = \frac{(bT)}{(bb)}$$

$1 + (bc) + (bd) + (b0)$ を計算し (bT) と比較する。

III 6) 5)に (bc) を乗じて2)から引く。

$$[cc.1] = [cc] - bc$$

$$[cd.1] = [cd] - [bc](bd)$$

$$[co.1] = [co] - [bc](bo)$$

$$[ct.1] = [ct] - [bc](bt)$$

$[cc.1] + [cd.1] + [co.1]$ を計算し $[ct.1]$ と比較する。

7) 6)を $[cc.1]$ で割る。

$$[cd.1] = \frac{[cd.1]}{[cc.1]}$$

$$[co.1] = \frac{[co.1]}{[cc.1]}$$

$$[ct.1] = \frac{[ct.1]}{[cc.1]}$$

$1 + [cd.1] + [co.1]$ を計算し $[ct.1]$ と比較する。

IV 8) 5)に $[bd]$ を乗じ、7)に $[cd.1]$ を乗じて加え3)から引く。

$$[dd.2] = [dd] - bd - cd.1$$

$$[d0.2] = [d0] - [bd](bo) - [cd.1](co.1)$$

$$[dT.2] = [dT] - [bd](bt) - [cd.1](ct.1)$$

$[dd.2] + [d0.2]$ を計算し $[dT.2]$ と比較する。

9) 8)を $[dd.2]$ で割る。

$$[d0.2] = \frac{[d0.2]}{[dd.2]}$$

$$[dT.2] = \frac{[dT.2]}{[dd.2]}$$

$1 + [d0.2]$ を計算し $[dT.2]$ と比較する。

10) $d = (CQ2)$

11) d の値を7)に代入する。

$$C = ([co.1] - [cd.1])d$$

12) d, C の値を5)に代入する。

$$b = (bo) - (bc)C - (bd)d$$

検算。

$$[b0'] = [bb]b + [bc]C + [bd]d$$

$$[c0'] = [bc]b + [cc]C + [cd]d$$

$$[d0'] = [bd]b + [cd]C + [dd]d$$

を計算し $[b0][c0][d0]$ と比較する。

例

1.の場合についてのみ例を上げる。2については計算例を参照されたい。

表2.2から

表2.4.

	b	c	g	計	check
I 1)	30.13637	17.02471	73.02093	120.18201	73.02093
2)		11.88203	43.67692	72.58366	43.67692
II 3)	30.13637	17.02471	73.02093	120.18201	
4)	1	0.514922384	2.423016773	3.937937157	3.937937157
II 5)		2.264390240	2.425762115	4.690152355	4.690152355
6)		1	1.071215045	2.071215045	2.071215045
8)			$b = 1.81783$		
7)			$C = 1.07127$		

Check

$$(30.13637)(1.81783) + (17.02471)(1.07127) = 73.02093$$

$$(17.02471)(1.81783) + (11.88203)(1.07127) = 43.67692$$

注意

1. 計算に必要な桁数はスプレッドシートによれば、小数点以下4位まで知りたければ各段階の計算は小数点以下6位まで出す必要があるといっている。われわれの経験では必要な桁数の1.3倍〜1.5倍の桁数まで出しておく必要があることが分った。

2. 各変数が非常に遠く単位で測られており、係数の行列の各元の数値のオーダーが非常に遠く離れている場合には、計算は小数点の位置が遠く離れたものとなり、またcheckの際満足のゆく結果が得られない。

この様な問題は対数を用いた同解方程式では、対数に変えることによりオーダーが大体統一となるため起きないが、対数を用いない算術方程式では直経、樹高は小数点1位、枚数は小数点4位まで測られているので重要になる。

各元の有効数字の数を同じようにすることが最小=乗法で精度を同解係数を求に求めることの出来る筈である。

これには次のよりな方法を用いるのが良い。

まず0でない元が10の適当な桁と成っている対角行列Dを選んで順行列Aを $B (= DAD)$ に変換する。

列ベクトル g は $h = Dg$ に入に変換される。

ただし、入は適当な10のスカラー量である。この結果 h の元は大体Bと同じオーダーとなる。

方程式 $Bv = h$ が最小二乗法で解かれ

更方程式 $Au = g$ の解は

$$u = Dv\lambda^{-1}$$

となる。

証明

$$\begin{aligned} v &= B^{-1}h = (DAD)^{-1}h \\ &= D^{-1}A^{-1}D^{-1}Dg\lambda \\ &\quad (D^{-1}D = I \text{ であるから}) \\ &= D^{-1}A^{-1}g\lambda \\ &= D^{-1}u\lambda \\ \text{故に } u &= Dv\lambda^{-1} \end{aligned}$$

後に説明するA逆行列はBの逆行列から全く同様にして

$$\begin{aligned} B &= DAD \\ B^{-1} &= (DAD)^{-1} = D^{-1}A^{-1}D^{-1} \\ A^{-1} &= DB^{-1}D \end{aligned}$$

付録12を参照

例えば正定方程式を

$$\begin{aligned} S_{x_1^2}b + S_{x_1x_2}c + S_{x_1x_3}d &= S_{x_1y} \\ S_{x_1x_2}b + S_{x_2^2}c + S_{x_2x_3}d &= S_{x_2y} \\ S_{x_1x_3}b + S_{x_2x_3}c + S_{x_3^2}d &= S_{x_3y} \end{aligned}$$

とすれば

$$A = \begin{pmatrix} S_{x_1^2} & S_{x_1x_2} & S_{x_1x_3} \\ S_{x_1x_2} & S_{x_2^2} & S_{x_2x_3} \\ S_{x_1x_3} & S_{x_2x_3} & S_{x_3^2} \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} S_{x_1y} \\ S_{x_2y} \\ S_{x_3y} \end{pmatrix}$$

である。

例

$$A = \begin{pmatrix} 12722.89 & 136.0296274 & 3269.593823 \\ 136.0296274 & 2.1071354 & 48.687730 \\ 3269.593823 & 48.687730 & 1169.139574 \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} 1130.65430 \\ 16.340142 \\ 392.54111 \end{pmatrix}$$

行列Aの対角線要素の小数点の位置をそろえるため。

$$D = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{pmatrix} \text{ を } A \text{ の両側より乗ずる。}$$

$$B = DAD$$

$$= \begin{pmatrix} 1.2722890 & 1.3602963 & 0.32695938 \\ 1.3602963 & 2.1071354 & 0.48687730 \\ 0.32695938 & 0.48687730 & 0.11691396 \end{pmatrix}$$

$$h = Dg\lambda$$

$$= \begin{pmatrix} 1.1306543 \\ 1.6340142 \\ 0.39254111 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 10^{-1}$$

方程式 $Bv = h$ をIIに示した方法で解けば次の結果が得られる。

$$v = \begin{pmatrix} 0.091841549 \\ -0.0071338307 \\ 3.130387118 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix}$$

これを元のオーダー直すには次式を用いる。

$$\begin{aligned} u &= Dv\lambda^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.091841549 \\ -0.0071338307 \\ 3.130387118 \end{pmatrix} \times 10 \\ &= \begin{pmatrix} 0.0091841549 \\ -0.0071338307 \\ 0.3130387118 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Backward Solution (逆解法) で得られた逆行列は

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2.7940808 & 0.045488588 & -8.0033067 \\ 0.045488588 & 12.566677 & -52.459970 \\ -8.0033067 & -52.459970 & 249.39986 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} = DB^{-1}D$$

$$= \begin{pmatrix} 0.0002794808 & 0.0004548588 & -0.00080033067 \\ 0.0004548588 & 12.566677 & -0.52459970 \\ -0.00080033067 & -0.52459970 & 0.024939986 \end{pmatrix}$$

第2項 相関法による計算

前項と同様最小二乗法の原理を適用すれば表2.1から次の一対の連立方程式が得られる。

説明は便宜上独立変数が二つの場合について述べる。

$$\begin{cases} b + a_2 C' = r_{y1} \\ a_2 b + C' = r_{y2} \end{cases} \quad 7$$

但し C は標準偏回帰係数をあらわし、前項の bC と区別するためにダッシュをつけたのである。

$$b = \frac{\begin{vmatrix} r_{y1} & r_{y2} \\ r_{y2} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_{y2} \\ r_{y2} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{r_{y1} - r_{y2}^2}{1 - r_{y2}^2}$$

$$C' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_{y1} \\ r_{y2} & r_{y2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_{y2} \\ r_{y2} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{r_{y2} - r_{y1} r_{y2}}{1 - r_{y2}^2}$$

$x'_1 = (x_1 - \bar{x}_1)/s_1$ などの標準変数を用いると回帰係数は

$$\hat{y} = b x'_1 + C' x'_2$$

となる。

すなわち、 b は各変量を標準化して用いた場合の回帰係数である。

普通の測定単位に戻せば

$$\hat{y} = \hat{\bar{y}} + b (s_1/s_1)(x_1 - \bar{x}_1) + C' (s_2/s_2)(x_2 - \bar{x}_2)$$

$$\hat{y} = \hat{\bar{y}} + b \frac{\sqrt{s_1^2}}{\sqrt{s_1^2}} (x_1 - \bar{x}_1) + C' \frac{\sqrt{s_2^2}}{\sqrt{s_2^2}} (x_2 - \bar{x}_2)$$

第4節 最小二乗法による誤差計算

第1項 C係数の計算

C係数はガウスによって導入され、回帰係数を検定するにも、また信頼区間を作るために必要なのである。

詳細は付録にのべられている。

回帰式を $Y = a + b(x_1 - \bar{x}_1) + C(x_2 - \bar{x}_2)$ とする。

C係数は次式で定義される

$$C_{11} = \frac{A_{11}}{D} \quad C_{12} = \frac{A_{12}}{D}$$

$$C_{22} = \frac{A_{22}}{D}$$

D は独立変数のみの行列式であり、 A_{ij} は suffix ij の co-factor である。

これを用いれば独立変数が二つの場合のC係数は簡単に求められる。

1. 連立方程式による解法

Ⅰ. 直接法

前節5式の左辺の b, C を $C_{11}, C_{12}, C_{12}, C_{22}$ とおきかえ、右辺を1, 0とおけば次の連立方程式を解くことにより求められる。

$$\begin{cases} S_{x_1^2} C_{11} + S_{x_1 x_2} C_{12} = 1 \\ S_{x_1 x_2} C_{11} + S_{x_2^2} C_{12} = 0 \end{cases} \quad 8) \quad \begin{cases} S_{x_1^2} C_{12} + S_{x_1 x_2} C_{22} = 0 \\ S_{x_1 x_2} C_{12} + S_{x_2^2} C_{22} = 1 \end{cases} \quad 9)$$

8). より

$$C_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & S_{x_1 x_2} \\ 0 & S_{x_2^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{x_1^2} & S_{x_1 x_2} \\ S_{x_1 x_2} & S_{x_2^2} \end{vmatrix}} = \frac{S_{x_2^2}}{(S_{x_1^2})(S_{x_2^2}) - (S_{x_1 x_2})^2}$$

$$C_{12} = \frac{\begin{vmatrix} S_{x_1^2} & 1 \\ S_{x_1 x_2} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{x_1^2} & S_{x_1 x_2} \\ S_{x_1 x_2} & S_{x_2^2} \end{vmatrix}} = \frac{-S_{x_1 x_2}}{(S_{x_1^2})(S_{x_2^2}) - (S_{x_1 x_2})^2}$$

9). より

$$C_{22} = \frac{\begin{vmatrix} S_{x_1^2} & 0 \\ S_{x_1 x_2} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{x_1^2} & S_{x_1 x_2} \\ S_{x_1 x_2} & S_{x_2^2} \end{vmatrix}} = \frac{S_{x_1^2}}{(S_{x_1^2})(S_{x_2^2}) - (S_{x_1 x_2})^2}$$

前掲のC係数の定義を用いれば、簡単に次式で表わされる。

$$D = \begin{vmatrix} S_{x_1^2} & S_{x_1 x_2} \\ S_{x_1 x_2} & S_{x_2^2} \end{vmatrix} = (S_{x_1^2})(S_{x_2^2}) - (S_{x_1 x_2})^2$$

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= Sx_2^2 \\
 A_{12} &= -Sx_1x_2 \\
 A_{22} &= Sx_1^2 \\
 \therefore C_{11} &= \frac{A_{11}}{D} = \frac{Sx_2^2}{(Sx_1^2)(Sx_2^2) - (Sx_1x_2)^2} \\
 C_{12} &= \frac{A_{12}}{D} = \frac{-Sx_1x_2}{\quad} \\
 C_{22} &= \frac{A_{22}}{D} = \frac{Sx_1^2}{\quad}
 \end{aligned}$$

得られた結果を 8. 9) に代入して吟味する。

例

表 2.2 より

$$\begin{aligned}
 D &= (30.13637118)(11.88203288) - (17.0240742)^2 \\
 &= 68.24669050 \\
 A_{11} &= 11.88203288 \\
 A_{12} &= -17.0240742 \\
 A_{22} &= 30.13637118
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= 0.17412 \\
 C_{12} &= -0.24948 \\
 C_{22} &= 0.44162
 \end{aligned}$$

2. 簡略 Doolittle 法

A. 独立変数が二つの場合

表 2.3 から

$$\begin{aligned}
 C_{22} &= 1/(cc.1) \\
 C_{21} &= -C_{22}(bc) = C_{12} \\
 C_{11} &= 1/(bb) - C_{21}(bc)
 \end{aligned}$$

$[bc]C_{21} + [cc]C_{22}$, $[bb]C_{11} + [bc]C_{21}$ に C 乗数の値を代入しと比較する。

例

表 2.4 から

$$\begin{aligned}
 C_{22} &= 1/2.264390240 = 0.441619992 \\
 C_{12} &= (0.441619992)(0.564922384) = -0.249481020 \\
 C_{11} &= 0.033182497 + 0.1409374126 = 0.17412
 \end{aligned}$$

吟味

$$\begin{aligned}
 C_{11}(30.13637) + C_{12}(17.02471) &= 1.00000 \\
 C_{12}(17.02471) + C_{22}(11.88203) &= 1.00000
 \end{aligned}$$

III. C 乗数による回帰係数の計算

C 乗数により回帰係数は簡単に求められる。

正規方程式は

$$\begin{pmatrix} Sx_1^2 & Sx_1x_2 & Sx_1x_3 \\ Sx_1x_2 & Sx_2^2 & Sx_2x_3 \\ Sx_1x_3 & Sx_2x_3 & Sx_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Sx_1y \\ Sx_2y \\ Sx_3y \end{pmatrix}$$

両辺に逆行列を乗すれば

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Sx_1^2 & Sx_1x_2 & Sx_1x_3 \\ Sx_1x_2 & Sx_2^2 & Sx_2x_3 \\ Sx_1x_3 & Sx_2x_3 & Sx_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Sx_1y \\ Sx_2y \\ Sx_3y \end{pmatrix}$$

$A^{-1}A = I$ であるから

$$\begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}Sx_1y + C_{12}Sx_2y + C_{13}Sx_3y \\ C_{12}Sx_1y + C_{22}Sx_2y + C_{23}Sx_3y \\ C_{13}Sx_1y + C_{23}Sx_2y + C_{33}Sx_3y \end{pmatrix}$$

$$b = C_{11}Sx_1y + C_{12}Sx_2y + C_{13}Sx_3y$$

$$c = C_{12}Sx_1y + C_{22}Sx_2y + C_{23}Sx_3y$$

$$d = C_{13}Sx_1y + C_{23}Sx_2y + C_{33}Sx_3y$$

独立変数が二つの場合を全く同様にして求められる。

$$b = C_{11}Sx_1y + C_{12}Sx_2y$$

$$c = C_{12}Sx_1y + C_{22}Sx_2y$$

マトリックスの計算方法については 附 録 を見られる。

このようにして求められた b, c, d の扱い方は 4 節と同じ吟味を行わなければならない。

例

表 2.4 表及び前項より

$$Sx_1y = 73.02093$$

$$Sx_2y = 43.67692$$

$$C_{11} = 0.17412$$

$$C_{12} = -0.24948$$

$$C_{22} = 0.44162$$

$$b = (0.17412)(73.02093) + (-0.24948)(43.67692) = 1.81783$$

$$c = (-0.24948)(73.02093) + (0.44162)(43.67692) = 1.07127$$

※2項 標準誤差の計算

回帰に際して用いる平方和

$$S_{\hat{y}}^2 = b S_{x_1 y} + c S_{x_2 y} \quad \text{独立変数2}$$

$$S_{\hat{y}}^2 = b S_{x_1 y} + c S_{x_2 y} + d S_{x_3 y} \quad \text{3}$$

回帰からの残差の平方和

$$S_{dyx_1 x_2}^2 = S_y^2 - S_{\hat{y}}^2$$

推定の誤差の分散と標準誤差

$$S_{yx_1 x_2}^2 = S_{dyx_1 x_2}^2 / n - 3 \quad \text{nは標本の大きさ}$$

$$S_{yx_1 x_2} = \sqrt{S_{yx_1 x_2}^2}$$

例

表2.4から

$$\begin{aligned} S_{\hat{y}}^2 &= (1.81783)(73.02093) + (1.07127)(43.67692) \\ &= 132.73997 + 46.78961 \\ &= 179.52958 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{dyx_1 x_2}^2 &= S_y^2 - S_{\hat{y}}^2 \\ &= 180.09588 - 179.52958 \\ &= 0.56630 \end{aligned}$$

※; $S_{dyx_1 x_2}^2 > 0$ であるから常に $S_y^2 > S_{\hat{y}}^2$ である。

$$\begin{aligned} S_{yx_1 x_2} &= 0.56640 / (615 - 3) \\ &= 0.00092551 \end{aligned}$$

$$S_{yx_1 x_2} = 0.03042$$

※5節 重相関係数および有意性の検定

Yの X_1 、 X_2 に対する相関係数を、重相関係数といい次式で表わされる。

$$R^2 = S_{\hat{y}}^2 / S_y^2$$

重相関係数は次式から求められる。

$$R^2 = Y_{11}b' + Y_{12}c'$$

$$R^2 = \frac{Y_{11}^2 + Y_{12}^2 - 2Y_{11}Y_{12}Y_{22}}{1 - Y_{22}^2}$$

$$R^2 = b'^2 + c'^2 + 2Y_{12}b'c'$$

全く同様にして

$$C_{22} = C_{22}' / S_{x_2}^2$$

$$C_{12} = C_{12}' r_{12} / S_{x_1} S_{x_2}$$

B. 独立変数が三つの場合

表. 2. 4 から

$$C_{33} = 1 / (d d_2)$$

$$C_{23} = -C_{33} (c d \cdot 1) = C_{32}$$

$$C_{13} = -C_{23} (b c) - C_{33} (b d) = C_{31}$$

$$C_{22} = \frac{1}{(c c \cdot 1)} - C_{23} (c d \cdot 1)$$

$$C_{21} = -C_{22} (b c) - C_{23} (b d) = C_{12}$$

$$C_{11} = \frac{1}{(b b)} - C_{12} (b c) - C_{13} (b d)$$

$$C_{11}(b b) + C_{21}(b c) + C_{31}(b d)$$

$$C_{12}(b c) + C_{22}(c c) + C_{32}(c d)$$

$$C_{13}(b d) + C_{23}(b c) + C_{33}(b d)$$

が 1 になるか否かを吟味する。

II. 相関法による解法

相関法における C 乗数 C' は C の偏回帰係数を C 乗数でおきかえてお返しを 0.1 10 とすれば。

I と全く同様にして得られる。

$$C_{11}' = \frac{1}{1 - r_{12}^2} = C_{22}'$$

$$C_{12}' = \frac{r_{12}}{1 - r_{12}^2}$$

I の直接法に変換するには

$$C_{11}' = \frac{1}{1 - r_{12}^2} = \frac{1}{1 - \frac{(Sx_1 x_2)^2}{Sx_1^2 Sx_2^2}} = \frac{Sx_1^2 Sx_2^2}{Sx_1^2 Sx_2^2 - (Sx_1 x_2)^2}$$

$$C_{11} = \frac{Sx_2^2}{Sx_1^2 Sx_2^2 - (Sx_1 x_2)^2}$$

C_{11}' と C_{11} で割れば

$$\frac{C_{11}'}{C_{11}} = Sx_1^2$$

故に $C_{11} = C_{11}' / Sx_1^2$

後の二つの式は簡単に真びくことができる。

相関法の標準偏回帰係数を求める式より

$$\begin{cases} b = \frac{r_{11} - r_{12} r_{12}}{1 - r_{12}^2} \\ c = \frac{r_{12} - r_{11} r_{12}}{1 - r_{12}^2} \end{cases}$$

を最初の式に代入すれば

$$\begin{aligned} R^2 &= r_{11}(r_{11} - r_{12} r_{12}) + r_{12}(r_{12} - r_{11} r_{12}) / (1 - r_{12}^2) \\ &= r_{11}^2 + r_{12}^2 - 2r_{11} r_{12} r_{12} / (1 - r_{12}^2) \end{aligned}$$

7) より

$$\begin{cases} b' + r_{12} c' = r_{11} \\ r_{12} b' + c' = r_{12} \end{cases}$$

を最初の式に代入すれば

$$\begin{aligned} R^2 &= (b' + r_{12} c')b + (r_{12} b' + c')c' \\ &= b'^2 + c'^2 + 2r_{12} b' c' \end{aligned}$$

偏相関係数を用いれば回帰に帰因する平方和及び回帰からの偏差の平方和は次のようになる。

10) より

$$R^2 S_y^2 = S_{\hat{y}}^2$$

$$S_{dy x_1 x_2}^2 = S_y^2 - S_{\hat{y}}^2 = S_y^2 - R^2 S_y^2 = (1 - R^2) S_y^2$$

推定の誤差の分散と標準誤差は

$$S_{y x_1 x_2}^2 = (1 - R^2) S_y^2 / (n - 3)$$

$$S_{y x_1 x_2} = \sqrt{(1 - R^2) S_y^2 / (n - 3)}$$

例

オ 4 期オ 2 項の例より

$$R = \frac{179.52958}{180.09588} = 0.99684$$

R の値は r_{12} が小さいほど、すなわち X_1 と X_2 から得られた知識のそれぞれの部分が互に独立に働くような傾向のある場合には r_{11} , r_{12} のいずれより大となる。

この例では r_{12} が 0.89968 であるが低い相関係数を示すので R は $r_{11} = 0.99117$ 及び $r_{12} = 0.94418$ に比して遙かに大になっているにすぎない。

有意性の検定

これは重回帰全体としての有意性を検定することであつて、それには回帰による平均平方が回帰によつては説明のつかない項の平均平方(測定誤差がなしと仮定すれば各樹木の形状その他の要因によるもの)に比べて大きいかどうかをFをつかつて検定するのである。

これには次の様式で計算するのが便利である。

表2.5

変動因	自由度	平方和	平均平方
回帰	$m-1$	$R^2 S_y^2$	$R^2 S_y^2 / m-1$
推定の誤差	$n-m$	$(1-R^2) S_y^2$	$(1-R^2) S_y^2 / n-m$
全体	$n-1$	S_y^2	$S_y^2 / n-1$

$$F = R^2 S_y^2 / m-1 / (1-R^2) S_y^2 / n-m$$

m : パラメーターの数 n : 標本の大きさ

例*

変動因	自由度	平方和	平均平方
回帰	2	179.52958	89.76479
推定の誤差	612	0.56630	0.0009549
全体	614	180.09588	
		$F = 90171.4^{**}$	$df = 2 \text{ 及 } 612$

この結果重相関係数はきわめて有意であることがわかり、

したがつて重回帰がきわめて有意であることがわかる。

第6節 回帰係数の標準偏差および有意性の検定

b の標準偏差 S_b

c の標準偏差 S_c

とすれば

$$S_b = S_y x_1 x_2 \sqrt{c_{11}}$$

$$S_c = S_y x_1 x_2 \sqrt{c_{22}}$$

$$t_b = b / S_b$$

$$t_c = c / S_c$$

t_b, t_c の値をt表の 0.05% の値と比較し

t_b または t_c の値 $> t_{0.05}$

であれば、95% の確率で回帰係数が0であるといひ仮説を捨てるすなわち回帰係数は有意であると考え*をつける。もし0.01%の値より大であれば**をつける。

第7節 偏相関係数および有意性の検定

偏相関係数 r_{12} といひのは、 X_2 がすべて等しい母集団における Y と X_1 との間の相関の一つの推定値である。

もっと具体的に云えば、樹高の大きい順に各樹木の枝横を分類した場合各階級における相関係数の一連の平均値である偏相関係数は全相関係数から求められる。

今回用式

$$y = bx_1 + cx_2 + dx_3 \text{ 等}$$

y, x_1, x_2, x_3 をそれぞれ 1, 2, 3, 4, とすれば重相関係数は

$$R = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{12} & 1 & r_{23} & r_{24} \\ r_{13} & r_{23} & 1 & r_{34} \\ r_{14} & r_{24} & r_{34} & 1 \end{vmatrix}$$

計算標準誤差は、 r_{12}, r_{23}, r_{34} であるから1で表わされる。

行列式 R の i 行 j 列の要素の *co-factor* を R_{ij} と表わし、小行列式を Δ_{ij} と表わせば、

$$-R_{12} = \Delta_{12} = r_{12} + r_{23} r_{34} r_{14} + r_{24} r_{34} r_{13} - r_{14} r_{24} - r_{23} r_{13} - r_{12} r_{34}^2$$

$$-R_{13} = -\Delta_{13} = r_{13} + r_{24} r_{34} r_{14} + r_{24} r_{34} r_{12} - r_{12} r_{23} - r_{14} r_{14} - r_{13} r_{34}^2$$

$$-R_{14} = \Delta_{14} = r_{14} + r_{23} r_{24} r_{13} + r_{23} r_{34} r_{12} - r_{12} r_{24} - r_{14} r_{13} - r_{14} r_{34}^2$$

$$R_{11} = 1 + 2 r_{23} r_{34} r_{12} - r_{24}^2 - r_{23}^2 - r_{34}^2$$

$$R_{22} = 1 + 2 r_{13} r_{34} r_{14} - r_{13}^2 - r_{34}^2 - r_{14}^2$$

$$R_{33} = 1 + 2 r_{12} r_{24} r_{14} - r_{12}^2 - r_{24}^2 - r_{14}^2$$

$$R_{44} = 1 + 2 r_{12} r_{23} r_{13} - r_{12}^2 - r_{23}^2 - r_{13}^2$$

偏相関係数は次式によつて求められる。

$$\begin{cases} r_{12,34} = -R_{12} / \sqrt{R_{11} R_{22}} \\ r_{13,24} = R_{13} / \sqrt{R_{11} R_{33}} \\ r_{14,23} = R_{14} / \sqrt{R_{11} R_{44}} \end{cases} \quad (1)$$

偏相関係数の値を次表の値と比較し偏相関係数表の値を越えれば $\rho = 0$ の仮説を捨てる。

表 2.6

自由度	5 %	1 %
30	0.426	0.514
35	0.397	0.481
40	0.373	0.454
45	0.353	0.430
50	0.336	0.410
60	0.308	0.377
70	0.286	0.351
80	0.269	0.330
90	0.254	0.312
100	0.241	0.297
125	0.216	0.266
150	0.198	0.244
200	0.172	0.212
300	0.141	0.174
400	0.122	0.151
500	0.109	0.135
1000	0.077	0.096

独立変数二つの場合も全く同じである。

$$R = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & 1 & r_{23} \\ r_{13} & r_{23} & 1 \end{vmatrix}$$

$$R_{11} = \Delta_{11} = \begin{vmatrix} 1 & r_{23} \\ r_{23} & 1 \end{vmatrix} = 1 - (r_{23})^2$$

$$R_{22} = \Delta_{22} = \begin{vmatrix} 1 & r_{13} \\ r_{13} & 1 \end{vmatrix} = 1 - (r_{13})^2$$

$$R_{33} = \Delta_{33} = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{12} & 1 \end{vmatrix} = 1 - (r_{12})^2$$

$$-R_{12} = \Delta_{12} = \begin{vmatrix} r_{12} & r_{23} \\ r_{13} & 1 \end{vmatrix} = r_{12} - r_{13} r_{23}$$

$$-R_{13} = \Delta_{13} = \begin{vmatrix} r_{12} & 1 \\ r_{23} & r_{13} \end{vmatrix} = r_{13} - r_{12} r_{23}$$

故に

$$\left. \begin{aligned} r_{12} &= \frac{-R_{12}}{\sqrt{R_{11} R_{22}}} = \frac{r_{13} - r_{12} r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{23}^2)(1 - r_{13}^2)}} \\ r_{21} &= \frac{-R_{13}}{\sqrt{R_{11} R_{33}}} = \frac{r_{13} - r_{12} r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{12}^2)}} \end{aligned} \right\}$$

(2)

別°

表 2.2 より

$$r_{11} = 0.99117$$

$$r_{12} = 0.94418$$

$$r_{22} = 0.89968$$

(2) より

$$r_{12} = \frac{0.99117 - (0.94418)(0.89968)}{\sqrt{(1 - 0.94418^2)(1 - 0.89968^2)}} =$$

$$r_{21} = \frac{0.94418 - (0.99117)(0.89968)}{\sqrt{(1 - 0.99117^2)(1 - 0.89968^2)}} =$$

このことから胸高直径値、樹高値と受つて、胸高直径対校積、樹高対校積の相関は大体等しいといえる。

オB節 葉切帯の計算

回帰方程式

$$\hat{y} = a + b(x_1 - \bar{x}_1) + c(x_2 - \bar{x}_2)$$

で $\hat{y}$ の分散は

$$V(\hat{y}) = V(a) + V\{b(x_1 - \bar{x}_1) + c(x_2 - \bar{x}_2)\}$$

$$V(a) = \frac{S_y x_1 x_2^2}{n}$$

$$V = \{b(x_1 - \bar{x}_1) + c(x_2 - \bar{x}_2)\}$$

$$= V\{b(x_1 - \bar{x}_1)\} + V\{c(x_2 - \bar{x}_2)\} + 2 \text{Cov}\{bc(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)\}$$

$$V\{b(x_1 - \bar{x}_1)\} = (x_1 - \bar{x}_1)^2 [V(b)] + b^2 [V(x_1)]$$

$$V\{c(x_2 - \bar{x}_2)\} = (x_2 - \bar{x}_2)^2 [V(c)] + c^2 [V(x_2)]$$

$$\text{Cov}\{bc(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)\} = (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) [\text{Cov}(b, c)] + bc [\text{Cov}(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)]$$

ここで

$$V(b) = S_y x_1 x_2^2 C_{11}$$

$$V(c) = S_y x_1 x_2^2 C_{22}$$

$$\text{Cov}(bc) = S_y x_1 x_2^2 C_{12}$$

$$V(x_1) = 0 \quad V(x_2) = 0 \quad \text{Cov}(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) = 0$$

であるため、これを最初の式に代入すれば

$$V(\hat{y}) = S_y x_1 x_2^2 \{1/n + C_{11}(x_1 - \bar{x}_1)^2 + C_{22}(x_2 - \bar{x}_2)^2 + 2C_{12}(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)\}$$

葉切帯は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} E_y x_1 x_2 &= t \{S_y x_1 x_2 - \sqrt{V(\hat{y})}\} \\ &= t \cdot S_y x_1 x_2 \left\{ 1 - \left[\frac{1}{n} + C_{11}(x_1 - \bar{x}_1)^2 + C_{22}(x_2 - \bar{x}_2)^2 + 2C_{12}(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) \right]^{1/2} \right\} \end{aligned}$$

(3)

これは自由度 $n - 3$ のときの 99% 水準の値である。

回帰からの偏差 $dy_{x_1x_2} (=Y-\hat{Y})$ が $E y_{x_1x_2}$ を越えた場合、このデータは回帰の一般的傾向から外れた異常なものとして棄却する。

備考]

棄却帯をデータ全部について求めることははなむけであるから次の順に計算を行つたといふ。

1. データ全部について $\hat{Y}$ を計算する。
2. $Y-\hat{Y}$ が $S y_{x_1x_2}$ の2倍の値を越えるものについて(3)で棄却帯を計算する。
3. (3)式の()の中の数値が大でありて $\left\{ \frac{1}{2} \right\}$ 大1から0.2以上も差がある場合には、 $Y-\hat{Y}$ が $S y_{x_1x_2}$ を越えるものについて(3)で棄却帯を計算する。

例*

計算例に示す。

第9節 回帰係数、分散間の有意差の検出のための共分散分析

第1項 分散の一樣性の検定

共分散分析を行つたには各級の分散が一樣であるといふ前提が必要であるので、このためパートレットの検定法で分散の一樣性を検定する。

各直性級の偏差平方和 $S dy_{x_1x_2}^2$ を $q_1^2, q_2^2, \dots, q_k^2$ その自由度を $f_1, f_2, \dots, f_k$ とする。

$$q^2 = q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_k^2$$

$$f = f_1 + f_2 + \dots + f_k$$

$$S r^2 = \frac{q r^2}{f r} \quad (r=1, \dots, k) \quad S^2 = \frac{q^2}{f}$$

とすれば

$$\chi^2 = - \sum_{r=1}^k f_r \ln \frac{S r^2}{S^2}$$

が χ^2 分布することが証明されている。

実際に計算するに便利なるように式を変形すれば

$$\begin{aligned} \chi^2 &= (f_1 + f_2 + \dots + f_k) \ln S^2 - \sum_{r=1}^k f_r \ln S r^2 \\ &= \frac{1}{\log_{10} e} [(\sum f_r) \log S^2 - \sum f_r \log S r^2] \end{aligned}$$

$$\log_{10} e = 0.4343$$

補正項は

$$C = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left(\sum \frac{1}{f_r} - \frac{1}{f} \right)$$

修正された $\chi^2 = \chi^2 / C$

修正された χ^2 の値を 自由度 $k-1$ の χ^2 表の値と比較し Y の値が表の $P(\chi^2) = 0.05$ より大であれば分散が一樣であるといふ仮説を棄却する。

χ^2 の計算は別に示すように表の形で行つたが便利である。

例*

表 2.7.

直性級	$S dy_{x_1x_2}^2$	n	$\frac{1}{n} = \frac{1}{f_r}$	$S y_{x_1x_2}^2$	$\log_{10} \chi^2$	$f_r \log_{10} \chi^2$	$1/f_r$
0~10	0.04618168	74	71	0.00065045	-3.1867861	-226.2418131	0.014084
12~20	0.10528221	201	198	53173	-3.2743088	-648.3131424	0.005051
22~30	0.12112522	188	185	65473	-3.1839378	-589.0284970	0.005405
32~40	0.05937864	84	81	73307	-3.1348546	-253.7232226	0.012346
42~50	0.03655641	57	54	67697	-3.1694306	-171.1472524	0.018519
計	0.36852416		589			-1788.6759235	0.055405
$k=5$	$= q^2$		$= f$			$= \sum f_r \log_{10} S y_{x_1x_2}^2$	$= \sum \frac{1}{f_r}$

$$S^2 = q^2 / f = 0.36852416 / 589 = 0.00062548$$

$$\begin{aligned} \log S^2 f &= 4.7963523 \times 589 = (-3.2036477) \times 589 \\ &= -1886.94684953 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{1}{0.4343} \{-1886.94684953 + 1788.6759235\} \\ &= 2.3026 (1.7274282) \\ &= 3.9775762. \end{aligned}$$

補正項

$$\begin{aligned} C &= 1 + \frac{1}{3(4)} (0.05540463 - 0.00167779) \\ &= 1 + 0.0044755 \\ &= 1.0044755 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{修正された } \chi^2 &= 3.9775762 / 1.0044755 \\ &= 3.959. \end{aligned}$$

χ^2 表の自由度 $5-1=4$ で、この値に相当する $P(\chi^2)$ は 0.50 であるから分散が一樣であるといふ仮説は捨てられない。

(備考)

表 2.7 の対数計算

$$\log 0.00065045 = 4.8132139 = -3.1867864.$$

第2項 回帰係数間の有意差の検定

各級の平方和、積和を表の形で表わせば

級	Sx_1^2	Sx_2^2	Sx_1x_2	Sx_1y	Sx_2y	Sy^2	$Sdyx_1x_2^2$
1	$(Sx_1^2)_1$	$(Sx_2^2)_1$	$(Sx_1x_2)_1$	$(Sx_1y)_1$	$(Sx_2y)_1$	$(Sy^2)_1$	$(Sdyx_1x_2^2)_1$
2	$(Sx_1^2)_2$	$(Sx_2^2)_2$	$(Sx_1x_2)_2$	$(Sx_1y)_2$	$(Sx_2y)_2$	$(Sy^2)_2$	$(Sdyx_1x_2^2)_2$
...	...	...	...	...	...	...	...
K	$(Sx_1^2)_K$	$(Sx_2^2)_K$	$(Sx_1x_2)_K$	$(Sx_1y)_K$	$(Sx_2y)_K$	$(Sy^2)_K$	$(Sdyx_1x_2^2)_K$
計	$\sum_{i=1}^K (Sx_1^2)_i$	$\sum_{i=1}^K (Sx_2^2)_i$	$\sum_{i=1}^K (Sx_1x_2)_i$	$\sum_{i=1}^K (Sx_1y)_i$	$\sum_{i=1}^K (Sx_2y)_i$	$\sum_{i=1}^K (Sy^2)_i$	$\sum_{i=1}^K (Sdyx_1x_2^2)_i$

計の $\sum_{i=1}^K$ の積和平方和を用いて回帰係数 b, c を計算する。
 ここで b, c は前に述べた標準回帰係数とは別のものである。
 b, c を求める計算は前に説明した簡略 Darlington 法で行う。

$$\begin{aligned} [bb] &= \sum_{i=1}^K (Sx_1^2)_i & [bc] &= \sum_{i=1}^K (Sx_1x_2)_i \\ [cc] &= \sum_{i=1}^K (Sx_2^2)_i & [bd] &= \sum_{i=1}^K (Sx_1y)_i \\ [cd] &= \sum_{i=1}^K (Sx_2y)_i \end{aligned}$$

$$q^2 = \frac{\sum_{i=1}^K (Sy^2)_i - \{b(\sum_{i=1}^K (Sx_1y)_i) + c(\sum_{i=1}^K (Sx_2y)_i)\}}{\sum_{i=1}^K (Sdyx_1x_2^2)_i}$$

$$q^2 = \frac{\sum_{i=1}^K (Sdyx_1x_2^2)_i}{\sum_{i=1}^K (Sy^2)_i}$$

$$q^2 = \bar{q}^2 - q'^2$$

$$S'^2 = q'^2 / 2(k-1)$$

$$S^2 = q^2 / \sum_{i=1}^K f_i \quad f_i \text{ は各級の自由度}$$

$$F = \frac{S'^2}{S^2} \quad d.f. \quad 2(k-1) \text{ と } \sum_{i=1}^K f_i$$

この計算には分散分析の表の形を利用した方が便利である。

表 2.8 の 1 予備的分散分析表

変動因	自由度	平方和	計算順序
回帰	$2 \times k$	$\sum_{i=1}^K (Sy^2)_i - \sum_{i=1}^K (Sdyx_1x_2^2)_i = \sum_{i=1}^K (S\bar{y}^2)_i$ 3)	
誤差	$\sum_{i=1}^K f_i = \sum_{i=1}^K (n_i - 3)$	$\sum_{i=1}^K (Sdyx_1x_2^2)_i$ 1)	
	$\sum_{i=1}^K n_i - k$	$\sum Sy^2$ 2)	

表 2.8 の 2 完成した分散分析表

変動因	自由度	平方和	平均平方	備考 (計算順序)
全回帰	2	$b\{\sum_{i=1}^K (Sx_1y)_i\} + c\{\sum_{i=1}^K (Sx_2y)_i\}$		4)
回帰間	$2(k-1)$	$\sum_{i=1}^K (S\bar{y}^2)_i - \{b(\sum_{i=1}^K (Sx_1y)_i) + c(\sum_{i=1}^K (Sx_2y)_i)\} = q^2$	$q^2 / 2(k-1) = S'^2$	5)
回帰計	$2k$	$\sum_{i=1}^K (Sy^2)_i - \sum_{i=1}^K (Sdyx_1x_2^2)_i$		3) 4) 5)
誤差	$\sum_{i=1}^K f_i$	$\sum_{i=1}^K (Sdyx_1x_2^2)_i = q'^2$	$q'^2 / \sum_{i=1}^K f_i = S^2$	2) 5) 6)
計	$\sum_{i=1}^K n_i - k$	$\sum_{i=1}^K (Sy^2)_i$		1) 5) 6)

$$F = S'^2 / S^2 \quad d.f. \quad 2(k-1) \text{ と } \sum_{i=1}^K f_i$$

※ 2 項 回帰係数間の有意検定

Ⅱ の検定で回帰係数間に有意差のなかつた級について回帰平面間の高さの差の検定を行う。

検定を行おうとする級の資料をこみにして平方和積和を表 2.1 の形で計算し、回帰係数 b, c を求める。

表 2.9 の 1 予備的分散分析表

変動因	自由度	平方和	備 考
回 帰	2	$S\bar{y}^2$	回帰に帰因する平方和
回帰間差	$2(k'-1)$	q'^2	回帰係数間の分散分析表の
誤 差	$n' - 2k' - 1$	$Sdyx_1x_2^2 - q'^2$	
計	$n' - 1$	Sy^2	

n' はこみにされた標本の大きさ。

上表の誤差には回帰平面の高さの差に帰因する平方和と各級延級ごとの回帰からの偏差平方和の合計、すなわち原因不明(主として資料自身に固有の変動)の平方和が含まれているので、これを二つの部分に分ける。

	平方和	自由度
誤 差	$Sdyx_1x_2^2$	$n' - 2k' - 1$
原因不明	$\sum_{i=1}^K (Sdyx_1x_2^2)_i = q^2$	$\sum_{i=1}^K (k_i - 3)$
回帰間差	$Sdyx_1x_2^2 - q^2 = q'^2$	$k' - 1$

表2.9の2 完成された分散分析表

変動因	自由度	平方和	平均平方	検定
回帰	2	$S\hat{y}^2$		
回帰間差	$2(k'-1)$	q'^2		
平面間差	$k'-1$	$Sdyx_1x_2 - q'^2 - q^2 = q'^2$	$q'^2 / k' - 1 = S'^2$	
不明原因	$\sum_{i=1}^k f_i$	$\sum_{i=1}^k (Sdyx_1x_2)_i = q^2$	$q^2 / \sum_{i=1}^k f_i = S^2$	
計	$nl - 1$	Sy^2		

$$F = S'^2 / S^2 \quad \text{自由度 } k' - 1 \text{ と } \sum_{i=1}^k f_i$$

(備考)

1. 回帰係数間の差の検定で、有意差がない級に対してはB, Cなる回帰係数を使い。
2. 回帰係数間の差の検定で有意差のない級に対してはB, C, を使い。
3. 回帰係数間の差の検定で有意差が認められるが、パーセントの検定で分散が一樣であると認められるかつに級に対しては各クラスごとに求めた C_i を使い。
4. 比較されるものが二級だけの場合には同次のようにしても回帰係数間の差を検定できる。

カブックス1で比較を行つ一方の統計量を表わし。

カブックス2で他の一方の統計量を表わすものとする。

今

$d = \hat{y}_1 - \hat{y}_2 = \bar{y}_1 - \bar{y}_2 - b(\bar{x}_{11} - \bar{x}_{12}) - c(\bar{x}_{21} - \bar{x}_{22})$ は $N\{0, \sigma^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{q}{2})\}$ の分布をすることが分っている。

$\bar{y}_1, \bar{y}_2$ はそれぞれ1クラス 2クラスのYの平均値。

$\bar{x}_{11}, \bar{x}_{12}$ はそれぞれ1クラス 2クラスの x_1 の平均値。

$\bar{x}_{21}, \bar{x}_{22}$ はそれぞれ1クラス 2クラスの x_2 の平均値である。

$$q = (\bar{x}_{11} - \bar{x}_{12})^2 \sum_{i=1}^k (Sx_2^2)_i - 2(\bar{x}_{11} - \bar{x}_{12})(\bar{x}_{21} - \bar{x}_{22}) \times \sum_{i=1}^k (Sx_1x_2)_i + (\bar{x}_{21} - \bar{x}_{22})^2 \sum_{i=1}^k (Sx_1^2)_i$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^k (Sx_1^2)_i \sum_{i=1}^k (Sx_2^2)_i - \left\{ \sum_{i=1}^k (Sx_1x_2)_i \right\}^2$$

$$k = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{q}{2}$$

n_1, n_2 はそれぞれのクラスの標本の大きさ。

$$t = \frac{d}{\sqrt{srk}}$$

を計算し、自由度 $\sum_{i=1}^k (n_i - 2)$ の七表の5%または1%水準の値と比較し、もしその値を越えなければ有意差がないと判定する。

例*

級	個数	Sx_1^2	Sx_2^2	Sx_1x_2
1.	201	1.14582793	1.02258217	0.65477712
2.	188	0.42478182	0.13597495	0.11814111
3.	84	0.11536245	0.43729597	0.11832067

級	Sx_1y	Sx_2y	Sy^2
1.	2.82273333	2.31925627	7.82823368
2.	0.88642285	0.94393100	2.77730114
3.	0.34779117	0.73968254	1.57211556

$$Sdyx_1x_2$$

$$0.10528221$$

$$0.1212522$$

$$0.05937864$$

$$b' = 1.80168$$

$$c' = 1.14375$$

1. 回帰係数間の有意性の検定

分散の一樣性は検定済とする。

手続的分散分析表

変動因	自由度	平方和
回帰	2	11.89186431
誤差	464	0.28578607
計	470	12.17765038

完成した分散分析表

変動因	自由度	平方和	平均平方
全回帰	2	11.89186431	
回帰間差	2	0.00423217	0.00105804
回帰計	2	11.89186431	
誤差	464	0.28578607	0.00061592
計	470	12.17765038	

$$F = 0.0015804 / 0.0001592$$

$$= 1.718 \quad df = 4 \text{ と } 464$$

この3つの回帰係数間には有意差のないことがわかる。すなわち3つの観測回帰平面は互に平行であることが分かったので、

次にこの平行な回帰平面が重り合っているか否か、すなわち同一回帰平面上にあるか否かを検定するため高さの差の検定を行う。

1~3級の資料をこみにして回帰係数、回帰に帰因する平方和を計算した結果次の値が得られた。

$$b = 1.77521$$

$$c = 1.14310$$

$$S_y^2 = 57.05136983$$

$$S_y^2 = 57.34327483$$

$$S_{dy, x_1, x_2} = 0.29190500$$

予備的分散分析表

変動因	自由度	平方和
回 帰	2	57.05136983
回帰偏差	4	0.00423217
誤 差	464	6.28767283
計	472	57.34327483

誤差を回帰平面の高さの差に帰因する平方和と各直径級毎の回帰からの偏差平方和の合計の二つの部分に分る。

	平方和	自由度
誤 差	0.28767283	464
要因不明(η^2)	0.28578607	464
平面間の差	0.00188676	2

完成された分散分析表

変動因	自由度	平方和	平均平方
回 帰	2	57.05136983	
回帰偏差	4	0.00423217	
平面間差	2	0.00188676	0.00094338
不明要因	464	0.28578607	0.00061592
計	472	57.34327483	

$$F = 0.00074338 / 0.0001592 = 4.53 < F_{0.05(2, 464)} = 3.02$$

級1~3については回帰平面間の高さの差はない。すなわち同一回帰平面上にあることが認められた。

したがって級1~3は一括して一箇の回帰式で推定できる。この場合の回帰係数は下記である。

$$\hat{y} = (\bar{y} - a\bar{x}_1 - c\bar{x}_2) + bX_1 + cX_2$$

$$= -2.28196 + 1.77521X_1 + 1.14310X_2$$

オ10節 独立変量の削除

例えば $\hat{y} = a + bX_1 + cX_2 + dX_3$ ただし $a = \bar{y} - b\bar{x}_1 - c\bar{x}_2 - d\bar{x}_3$ なる回帰式でオ6節の回帰係数の検定及びオ7節の偏相関係数の検定の結果、独立変数 X_2 はこの回帰式で十分に役割をはたしていないと思われる時、 X_2 を削除した回帰式で $\hat{y}$ を推定しても精度は余り落ちず、しかも計算は非常に楽になる。

X_2 を削除した場合の回帰係数その他の統計値はあらかじめ計算しておいて求めることができるが、次に示す方法を使えば簡単にできる。

オ11節 X_2 を削除したC乗数

C乗数の定義より独立変数が三つの場合

$$D = \begin{vmatrix} S_{x_1^2} & S_{x_1x_2} & S_{x_1x_3} \\ S_{x_1x_2} & S_{x_2^2} & S_{x_2x_3} \\ S_{x_1x_3} & S_{x_2x_3} & S_{x_3^2} \end{vmatrix}$$

$$C_1 = \frac{A_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} S_{x_2^2} & S_{x_2x_3} \\ S_{x_2x_3} & S_{x_3^2} \end{vmatrix}}{D} = \frac{S_{x_2^2} S_{x_3^2} - (S_{x_2x_3})^2}{D}$$

$$C_2 = \frac{A_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} S_{x_1x_2} & S_{x_2x_3} \\ S_{x_1x_3} & S_{x_3^2} \end{vmatrix}}{D} = \frac{(S_{x_1x_2})S_{x_3^2} - (S_{x_2x_3})(S_{x_1x_3})}{D}$$

$$C_3 = \frac{A_3}{D} = \frac{\begin{vmatrix} S_{x_1^2} & S_{x_1x_3} \\ S_{x_1x_3} & S_{x_3^2} \end{vmatrix}}{D} = \frac{S_{x_1^2} S_{x_3^2} - (S_{x_1x_3})^2}{D}$$

独立変数 X_2 を削除した場合のC乗数の一つを $(C_1)_R$ とすれば

$$(C_1)_R = \frac{S_{x_3^2}}{S_{x_1^2} S_{x_3^2} - (S_{x_1x_3})^2}$$

したがって、 C_1 から $(C_1)_R$ を求めるにはその差を計算すればよい。

$$C_1 - (C_1)_R = \frac{\{S_{x_2^2} S_{x_3^2} - (S_{x_2x_3})^2\}}{D} - \frac{S_{x_3^2}}{\{S_{x_1^2} S_{x_3^2} - (S_{x_1x_3})^2\}}$$

$$= \frac{\{Sx_1^2 Sx_3^2 - (Sx_1 x_3)^2\} \{Sx_1^2 Sx_2^2 - (Sx_1 x_2)^2\} - D Sx_1^2}{D \{Sx_1^2 Sx_2^2 - (Sx_1 x_2)^2\}}$$

分子は次の如くまとめられる

$$\begin{aligned} & \{Sx_1^2 Sx_3^2 - (Sx_1 x_3)^2\} \{Sx_1^2 Sx_2^2 - (Sx_1 x_2)^2\} - D Sx_1^2 \\ &= Sx_1^2 Sx_2^2 Sx_3^2 - (Sx_1 x_3)^2 Sx_2^2 - (Sx_1 x_2)^2 Sx_3^2 \\ &+ (Sx_1 x_3)^2 (Sx_1 x_2)^2 - Sx_1^2 Sx_2^2 Sx_3^2 + (Sx_1 x_2)^2 Sx_3^2 \\ &+ (Sx_1 x_3)^2 Sx_2^2 - 2(Sx_1 x_2)(Sx_1 x_3)(Sx_1 x_2) Sx_3^2 + (Sx_1 x_2)^2 (Sx_3^2) \\ &= \{Sx_1 x_2\} \{Sx_1 x_3\} - (Sx_1 x_2)(Sx_1 x_3) \}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore C_{11}(C_1)_R &= \frac{\{Sx_1 x_2\} \{Sx_1 x_3\} - (Sx_1 x_2)(Sx_1 x_3) \}^2}{D \{Sx_1^2 Sx_2^2 - (Sx_1 x_2)^2\}} \\ &= \frac{(C_{12})^2}{C_{22}} \end{aligned}$$

$$\therefore (C_1)_R = C_1 - \frac{(C_{12})^2}{C_{22}}$$

全く同様にして他のC乗数を計算できる。

$$(C_2)_R = C_2 - \frac{C_{12} C_{23}}{C_{22}}$$

$$(C_3)_R = C_3 - \frac{(C_{23})^2}{C_{22}}$$

詳しくは フッシャー 著：「研究者のための統計的方法」の補註を参照せられたい。

オ2項 回帰に帰因する平方和

独立変数 X_2 を削除した場合の回帰に帰因する平方和オ4節オ2項より

$$S\hat{y}^2 = b Sx_{1y} + c Sx_{2y} + d Sx_{3y}$$

同じ回帰係数

オ4節オ1項より

$$b = C_1 Sx_{1y} + C_2 Sx_{2y} + C_3 Sx_{3y}$$

$$c = C_2 Sx_{1y} + C_2 Sx_{2y} + C_{23} Sx_{3y}$$

$$d = C_3 Sx_{1y} + C_{23} Sx_{2y} + C_{33} Sx_{3y}$$

独立変数 X_2 を削除した場合の回帰に帰因する平方和

$$S\hat{y}_R^2 = b_R Sx_{1y} + d_R Sx_{3y}$$

回帰係数

$$b_R = (C_1)_R Sx_{1y} + (C_3)_R Sx_{3y}$$

$$= (C_1 - \frac{C_{12} C_{23}}{C_{22}}) Sx_{1y} + (C_3 - \frac{C_{23}^2}{C_{22}}) Sx_{3y}$$

$$d_R = (C_2)_R Sx_{1y} + (C_{23})_R Sx_{3y}$$

$$= (C_2 - \frac{C_{12} C_{23}}{C_{22}}) Sx_{1y} + (C_{23} - \frac{(C_{23})^2}{C_{22}}) Sx_{3y}$$

回帰係数をそれぞれの回帰に帰因する平方和の式に代入すれば

$$\begin{aligned} S\hat{y}^2 &= (C_1 Sx_{1y} + C_2 Sx_{2y} + C_3 Sx_{3y}) Sx_{1y} + (C_2 Sx_{1y} + C_2 Sx_{2y} + C_{23} Sx_{3y}) Sx_{2y} \\ &+ (C_3 Sx_{1y} + C_{23} Sx_{2y} + C_{33} Sx_{3y}) Sx_{3y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S\hat{y}_R^2 &= \{ (C_1 - \frac{C_{12}^2}{C_{22}}) Sx_{1y} + (C_3 - \frac{C_{23}^2}{C_{22}}) Sx_{3y} \} Sx_{1y} + \{ (C_2 - \frac{C_{12} C_{23}}{C_{22}}) \\ &Sx_{1y} + (C_{23} - \frac{(C_{23})^2}{C_{22}}) Sx_{3y} \} Sx_{2y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S\hat{y}^2 - S\hat{y}_R^2 &= \frac{1}{C_{22}} \{ (C_{12} Sx_{1y})^2 + (C_{22} Sx_{2y})^2 + (C_{23} Sx_{3y})^2 \\ &+ 2C_{12} C_{23} Sx_{1y} Sx_{2y} + 2C_{22} C_{23} Sx_{1y} Sx_{3y} + 2C_{12} C_{23} Sx_{2y} Sx_{3y} \} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{C_{22}} \{ C_{12} Sx_{1y} + C_{22} Sx_{2y} + C_{23} Sx_{3y} \}^2$$

$$= \frac{1}{C_{22}} C^2$$

$$\therefore S\hat{y}_R^2 = S\hat{y}^2 - \frac{1}{C_{22}} C^2$$

オ3項 回帰係数

$$b_R = (C_1 - \frac{C_{12}^2}{C_{22}}) Sx_{1y} + (C_3 - \frac{C_{23}^2}{C_{22}}) Sx_{3y}$$

$$= (C_1 Sx_{1y} + C_3 Sx_{3y} + C_2 Sx_{2y}) - \{ \frac{C_{12}}{C_{22}} Sx_{1y} + \frac{C_{23}}{C_{22}} Sx_{2y} \}$$

$$+ \frac{C_{12} C_{23}}{C_{22}} Sx_{3y} + \frac{C_{23}^2}{C_{22}} Sx_{2y} \}$$

$$= b - \frac{C_{12}}{C_{22}} C$$

$$d_R = (C_2 - \frac{C_{12} C_{23}}{C_{22}}) Sx_{1y} + (C_{23} - \frac{(C_{23})^2}{C_{22}}) Sx_{3y}$$

$$= (C_2 Sx_{1y} + C_{23} Sx_{2y} + C_{33} Sx_{3y}) - \{ \frac{C_{12} C_{23}}{C_{22}} Sx_{1y} + \frac{C_{23}^2}{C_{22}} Sx_{3y} \}$$

$$+ \frac{C_{12} C_{23}}{C_{22}} Sx_{2y} + \frac{(C_{23})^2}{C_{22}} Sx_{3y} \}$$

$$= d - \frac{C_{23}}{C_{22}} \{ C_{12} Sx_{1y} + C_{22} Sx_{2y} + C_{23} Sx_{3y} \}$$

$$= d - \frac{C_{23}}{C_{22}} C$$

オ4項 回帰からの偏差平方和など

$$\text{回帰からの偏差平方和 } Sd\hat{y}_R^2 = S\hat{y}^2 - S\hat{y}_R^2$$

推定の誤差の分散

$$SY_{13}^2 = Sd_{y,13}^2 / n - 3$$

$$SY_{13} = \sqrt{SY_{13}^2}$$

求める関係式は

$$\hat{Y} = \bar{Y} + bR(X_1 - \bar{X}_1) + dR(X_3 - \bar{X}_3) \\ = (\bar{Y} - bR\bar{X}_1 - dR\bar{X}_3) + bRX_1 + dRX_3$$

例*

計算例2をみられたい。

第11節 対数による推定値の修正

対数を用いる方法ではすべての値が対数として表わされているといふことのため、二三の面倒な問題が起つて来る。

すなわち、直径、樹高、材積の絶対値を対数に変換する場合には、対数の材積は対数として適合しているものであり、絶対値として適合しているのではないといふことのために生ずる系統的な誤差が含まれている。実際この方法は算術平均ではなくて幾何平均を用いているのである。

よく知られているように二箇以上の数の平均はそれに対数する絶対値の平均と同じ値にはならない。

例えば10と100という二つの極端な値をとれば、その算術平均は55であるが、対数によって得られる値は $(1.5000 + 2.0000)/2 = 1.5000$ でこれは31.62に相当する。

換言すれば、対数による累積誤差は最小=乗法によって完全に0であるが、立方根に直せば実際の材積(真の材積)は完全な方程式によって推定されるものより常に大となつてゐる。その差は通常1~2%程度である。

百分率で表わした誤差は材積に無関係であることが証明されており、材積(対数でない)の累積百分率誤差は完全な式を用いる場合補正項として用いることができる。

この問題についてH.A. Meyer¹⁾の行った研究を紹介しよう。

1). H.A. Meyer 1941

Correction for Systematic error occurring in the application of the garishmic volume equation

Penn State Forest School Res Paper 7

これは観測値 y_i の対数と母数によって修正された値(修正値) y_i の対数の差、すなわち $(\log y_i - \log y_{ij})$ が0の周りで正規分布をなし、 $\log y_{ij}$ が $\log y_i$ の周りで正規分布をしているといふ仮説に基づいて適用されている。

この仮説は現実には近似的に十分なものであるだけでなく、分布が正規でなくてもこの仮説に従つて計算された修正係数を適用することが出来る。

確率素分

$$df(M) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(M-\mu)^2}{2\sigma^2}} dM$$

$M = \log y$ なる変換を行へば

$$dM = \log e \frac{1}{y} dy \text{ であるから上式は}$$

$$d\phi(y) = \frac{\log e}{y} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log y - \mu)^2}{2\sigma^2}} dy \text{ とする。}$$

$$\therefore E(Y) = \int_0^\infty y d\phi(y)$$

$$\log y = M \quad y = 10^M \quad dy = 10^M \ln 10 dM$$

を上式に代入すれば

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \log e \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(M-\mu)^2}{2\sigma^2}} 10^M \ln 10 dM$$

$$\log e \ln 10 = 1 \quad 10^M = e^{\ln 10^M} = e^{M \ln 10}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left[\frac{(M-\mu)^2}{2\sigma^2} + M \ln 10\right]} dM$$

$$\left[-\frac{(M-\mu)^2}{2\sigma^2} + M \ln 10\right]$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2} \left[(M-\mu)^2 - 2(M-\mu)\sigma^2 \ln 10 + (\sigma^2 \ln 10)^2 - (\sigma^2 \ln 10)^2 \right. \\ \left. - 2\sigma^2 \mu \ln 10 \right]$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2} \left[(M-\mu-\sigma^2 \ln 10)^2 - 2\sigma^2 \ln 10 (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \ln 10) \right]$$

$$= -\frac{(M-\mu-\sigma^2 \ln 10)^2}{2\sigma^2} + (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \ln 10) \ln 10$$

$$\therefore E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(M-\mu-\sigma^2 \ln 10)^2}{2\sigma^2} + (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \ln 10) \ln 10} dM \\ e^{(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \ln 10) \ln 10} = e^{\ln 10 (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \ln 10)} = 10^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \ln 10}$$

第2節 平方和 積和の計算

(参照) 第2章、第2節 および 表2.1、表2.2

$v = 10^a d^b h^c$ を一次式に変換するため両辺の対数をとれば、

$$\log v = a + b \log d + c \log h$$

$$\Rightarrow \log v = Y$$

$$\log d = X_1$$

$$\log h = X_2$$

とすれば、上式は次のように表わすことができる

$$Y = a + bX_1 + cX_2$$

全資料のつき胸高直径、樹高、材積の4桁の対数を求めたものを次表のような様式で記録する。なお材積の対数は便宜上 $\times 100$ の4桁の対数を用いた。

表 3.2

直径級	$X_1 (= \log d)$	$X_2 (= \log h)$	$Y (= \log(v \times 100))$
6	0.7924	0.7404	-0.0142
・	0.8388	0.7482	0.1106
・	0.7732	0.7709	-0.0269

備考1. 対数に負号が付けられているのは次のように計算したものである。

$$\log(0.0077 \times 100) = \bar{1}.9853 = -1 + 0.9853 = -0.0142$$

2. この計算様式は棄却率の計算の場合にも使用するので、右に5桁の氏との空白をのけておくのが便利である。

3. 直径、樹高、材積の元の値も同時に記入しておけば対数表を引くのに便であり誤りも小さい。

4. 2cm 直径級2と12との計算様式をのくつておき、2cm直径級2と12に積和、平方和を求め、それを累計する2と12より全体の積和、平方和を計算すれば意味も便利であり誤りの発見も容易である。

5. 積和、平方和の計算は、材積表編製の基礎をなすものであるから、再三吟味を行う必要がある。

積和、平方和は 表 2.1 の形で計算する。

表 3.3

$n=615$	X_1	X_2	Y
和	310.0154	714.1020	249.8621
平均	1.31710	1.16121	1.38026
X_1 1. SX_1^2 など	1097.00620571	957.61985329	1191.05568018
2 補正項	1066.86783453	940.37515087	1118.0345362
3 SX_1^2 など	30.13637118	17.02470742	73.02092656
4 YSX_1^2 など	5.48966088	18.92303758	73.67115737
5 相関係数		0.89963	0.99117
X_2 1. SX_2^2 など		341.14836311	1029.38111056
2 補正項		229.26638523	985.70419157
3 SX_2^2 など		11.82203288	43.67691899
4 YSX_2^2 など		3.44703247	46.25912242
5 相関係数			0.94418
Y 1 SY^2			1351.74942365
2 補正項			1171.65343873
3 SY^2			180.09598492
4 YSY^2			13.41998

第3節 回帰係数の計算

(参照) 第2章第3節第1項II 表2.3、表2.4

・ 第4節第1項I, 2

簡略 Doolittle 法で回帰係数および定数系数を求める。

表 3.4

	b	c	g	計	check
I					
1)	30.13637	17.02471	73.02093	120.18210	
2)		11.82203	43.67692	22.58366	
3)	20.13637	17.02471	73.02093	120.18201	
II					
4)	1	0.54492384	2.423016703	3.987729157	3.987729157
5)		0.762570240	2.425752115	4.69452355	4.69452355
6)		1	1.071265045	2.071265045	2.071265045
7) 7 E 0 R 4 A			6.457035170		
8)			0.1071265045		

check $(1.817835170)(30.13637) + (1.07127)(1.071265045) = 73.02093$
 $(1.817835170)(1.07127) + (1.071265045)(1.159203) = 43.67692$
 C 米穀は逆解法で計算する

$$C_{22} = 1 / 2.264370240 = 0.441619992$$

$$C_{12} = -(0.441619992)(0.564922384) = -0.249481020$$

$$C_{11} = 0.033132497 + 0.441619992 = 0.474750489$$

check

$$(0.474750489)(30.13637) + (-0.249481020)(1.07127) = 14.0000000$$

$$(-0.249481020)(1.07127) + (0.441619992)(1.159203) = 1.00000000$$

第4節 資料の棄却

(参照) オ2節, オ4節 オI項及びオ2節

表3.4で求めたb, Cの値を

$$Y = a + bX_1 + CX_2 \text{ に代入する}$$

$$\text{ただし, } a = \bar{Y} - b\bar{X}_1 - C\bar{X}_2$$

$$\hat{Y} = \{(1.817835170 - (1.817835170)(1.31710) - (1.07127)(1.16121)\} + 1.817835170X_1 \\ + 1.07127X_2 \\ = 1.81784X_1 + 1.07127X_2 - 2.25797$$

回帰線に属する平方和

$$S_{\hat{Y}}^2 = bS_{x_1} + CS_{x_2} \\ = (1.81783)(73.02093) + (1.07127)(43.67692) \\ = 132.73997 + 46.78961 \\ = 179.52958$$

回帰からの偏差平方和

$$S_{dy.12}^2 = S_y^2 - S_{\hat{Y}}^2 \\ = 180.09588 - 179.52958 \\ = 0.56630$$

推定の変数の分散と標準誤差

$$SY.12^2 = S_{dy.12}^2 / n - 3 \\ = 0.56630 / 615 - 3 \\ = 0.00092551 \\ SY.12 = \sqrt{0.00092551} \\ = 0.03042$$

13)に表3.3, 表3.4で求めた値およびSY.12の値を代入し棄却帯を求める。

$$Ey, x_2 = (2.587)(0.03042) \left\{ 1 - [1/6.15 + (0.17412)(X_1 - 1.31710)^2 + (0.44162)(X_2 - 1.16121)^2 + 2(-0.24948)(X_1 - 1.31710)(X_2 - 1.16121)] \right\}$$

表3.2の右側の堅らりを利用して資料全部について $Y - \hat{Y}$ を計算する。

表 3.5

Y	bX ₁	CX ₂	$\hat{Y}$	Y - $\hat{Y}$
-0.0142	1.44045	0.79317	-0.0244	0.0102
0.1106	1.52430	0.80152	0.0634	0.0472
0.0262	1.41464	0.82584	-0.0175	-0.0094
...	...	...	...	...

$Y - \hat{Y}$ が標準誤差の2倍を越えるものについて F_{y, x_1, x_2} を計算し、その結果を表3.6に示す。

*印はこの結果棄却されるものを示す

異常なものを棄却し、残りの資料を使って再び各直径階ごとに二乗和等を計算する。

この計算は棄却前の資料の二乗和等から棄却される資料の二乗和等を引けば得られる。

D H	b X ₁	C X ₂	$\hat{Y}$	$Y - \hat{Y}$	$C_{11} (X_1 - \bar{X}_1)^2$	$C_{22} (X_2 - \bar{X}_2)^2$	$C_{12} (X_1 - \bar{X}_1)(X_2 - \bar{X}_2)$	$\sqrt{1 - r^2} \sqrt{C_{11} C_{22}}$	$\sqrt{1 - r^2} \sqrt{C_{11} C_{22}}$
6	145371	097504	0.2274	-0.0813*	910	237	575	9413	9602
9	146005	103249	0.2150	-0.0689	630	172	615	9747	976
5	147771	076793	-0.0032	0.0980	443	876	1120	9785	9708
5	145750	075223	0.1516	0.2269	291	909	925	9709	9725
7	146459	087791	0.2616	0.0427	228	516	706	9876	9705
10	153625	091640	0.1567	-0.0832	1932	408	716	9204	983
11	145837	103337	0.0568	-0.0840*	153	22	201	9950	9784
12	145537	113630	0.2345	-0.0785*	153	45	103	9934	984
18	226445	100348	1.1132	0.0893*	6	-0.3	43	8918	9957
12	231192	110511	1.201	-0.0503*	42	30	13	9968	985
13	222031	117058	1.0901	-0.0503*	42	6	3	9932	986
15	232945	120913	1.2707	0.0776	13	2	8	9961	985
13	244383	120743	1.3324	0.0505	1	5	4	9974	985
24	244878	116758	1.3324	0.1161*	5	23	18	9938	984
15	245305	125913	1.5012	-0.0602	5	2	6	9983	986
17	244878	132991	1.5057	0.0666	2	28	13	9970	985
20	255347	132991	1.5057	0.0679	2	28	27	9976	985
16	255347	138476	1.6605	-0.0813*	10	20	50	9972	984
17	255347	124443	1.653	-0.0448*	20	16	20	9958	984
15	274203	130416	1.7320	0.0885*	65	12	54	9959	985
15	277582	125891	1.7353	-0.0713	77	0	12	9919	983
20	282235	128174	2.0203	-0.0477	136	+73	-179	9954	985
22	313213	147796	2.2652	-0.0665	214	237	-405	9938	984
26	313213	147796	2.3347	-0.0403	247	251	-448	9934	984

第5節 棄却済資料による材積式の再計算

第1項 平方和積和の計算

表 3.7

$n = 604$	X_1	X_2	Y
和	797,2260	7027970	838,4826
平均			
X_1 1 $\sum X_1^2$ 及 V	1081,48996533	944,02058640	1177,41653018
2 補正項	1052,26704488	927,62920716	1106,72205932
3 $\sum X_1^2$	27,22292050	16,39138794	70,69446216
4 $\sqrt{\sum X_1^2}$	5,40582283	18,24209622	71,32671708
5 相関係数		0,90062	0,99114
X_2 1 $\sum X_2^2$ 及 V		229,09188513	1017,6723221
2 補正項		817,754134306	975,63419210
3 $\sum X_2^2$		11,23754297	42,041308381
4 $\sqrt{\sum X_2^2}$		3,36712667	44,42729607
5 相関係数			0,94634
Y 1 $\sum Y^2$			1338,08796718
2 補正項			1163,99514934
3 $\sum Y^2$			174,09281784
4 $\sqrt{\sum Y^2}$			13,19442337

第2項 回帰係数の計算

簡易 Doolittle 法で回帰係数を計算する。

表 3.8

	b	c	g	計	Check
I 1)	27,22292	16,39138	70,69446	116,30876	
2)		11,23754	42,041308	69,77200	
3)	27,22292	16,39138	70,69446	116,30876	
II 4)	1	0,56090235	2,41911828	3,98002063	3,98002063
5)		2,41347808	2,237766701	4,533444789	4,533444789
III 6)		1	1,11271038	2,44274733	2,44274733
7) 6) 代入			b = 1,79373442		
8)			c = 1,11274733		

check

$$(1.3793734112)(27.22292) + (1.1149941738)(16.39138) = 70.69446$$

$$(1.793734112)(16.39138) + (1.1149941738)(11.33754) = 42.042308$$

$$C_{22} = 1/2.143472648 = 0.466531495$$

$$C_{12} = -(0.466531495)(0.560902355) = -0.261681413$$

$$C_{11} = 0.834219715 + 0.146779291 = 0.980999006$$

check

$$C_{11}(27.22292) + C_{12}(16.39138) = 1.0000000$$

$$C_{12}(16.39138) + C_{22}(11.33754) = 1.0000000$$

第6節 標準誤差 重相関係数 偏相関係数

(参 照)

オ2章オ4節オII項 標準誤差の計算

オ5節 重相関係数及び有意性の検定

オ6節 回帰係数の標準誤差及び有意性の検定

オ7節 偏相関係数

回帰に帰因する平方和

$$\begin{aligned} S_{\hat{y}}^2 &= (1.793734112)(70.69446216) + (1.114994174)(42.042308391) \\ &= 126.80729442 + 46.8778173 \\ &= 173.68490172 \end{aligned}$$

回帰からの偏差の平方和

$$\begin{aligned} S_{dy, x_2}^2 &= S_y^2 - S_{\hat{y}}^2 \\ &= 174.09281794 - 173.68490172 \\ &= 0.40791622 \end{aligned}$$

推定の誤差の分散と標準誤差

$$S_{y, x_2}^2 = 0.40791622/601 = 0.00067872915$$

$$S_{y, x_2} = 0.02605243$$

重相関係数

$$\begin{aligned} R^2 &= S_{\hat{y}}^2 / S_y^2 = 173.68490172 / 174.09281794 \\ &= 0.99765590 \end{aligned}$$

$$R = 0.998825$$

重相関係数の有意性の検定

変動因	自由度	平方和	平均平方
回 帰	2	173.68490172	86.84245081
推定の誤差	601	0.40791622	0.00067872915

$$F = 127742.61^{**} \quad d.f. 2, 601$$

重相関係数はききめて有意である。すなわち重回帰式がききめて有意であることがわかる。

偏相関係数

$$\begin{aligned} r_{y1,2} &= \frac{Y_{y1} - Y_{y2} Y_{12}}{\sqrt{(1 - Y_{y2}^2)(1 - Y_{12}^2)}} \\ &= \frac{0.99114 - (0.94632)(0.90062)}{\sqrt{(1 - 0.94632^2)(1 - 0.90062^2)}} = 0.98861^{**} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{y2,1} &= \frac{Y_{y2} - Y_{y1} Y_{12}}{\sqrt{(1 - Y_{y1}^2)(1 - Y_{12}^2)}} \\ &= \frac{0.94632 - (0.99114)(0.90062)}{\sqrt{(1 - 0.99114^2)(1 - 0.90062^2)}} = 0.93035^{**} \end{aligned}$$

偏相関係数の有意性の検定には表2.6を用い

これから胸高直径階及び樹高階が契つても胸高直径対材積、樹高対材積の相関は胸高直径階および樹高階全体を通じてのそれと大体等しく2とわかる。

第7節 10cm直径級毎の回帰係数の差の検定

樹高または直径に対する材積の関係を知るため、これを対数取図紙にプロットした場合、樹高対材積、直径対材積が直線関係を示すのはあるのきられを範囲についていえるもので、したがって材積式も別々に別々に求める必要がある。

それについて、南森試験場のアカマツ立木幹材表(附28.4)では、胸高直径22cm以下、24~46cm、48cm以上の三つの級に分け、それぞれ材積式を求めたもので材積表を調整しており、森生試材はカラマツの単木幹材積表調整にあつて(林業試験場報告オ33号)1尺1寸以下、1尺2寸~1尺5寸、1尺6寸以上の三級に分けて材積式を求めている。樹高および胸高直径の回帰係数はやはり樹高、胸高直径の函数として変化するものであるが、これを研べるには莫大な資料が必要であり、かつまた材積表関係資料の完成は幾層の問題であるので、一応資料を10~

20cm 等直径級に分け各直径級の材積式を求め、その間の差を統計的検定を行い、差のなかった直径級を一括して材積式を求め最後に直径階、樹高階ごとに樹高対材積、直径対材積のグラフを直径階の境で不合理な点が見えられれば、その直径級の前又は後の1〜3を直径級にのりて材積式を求め、平滑になるように修正する。この場合調和曲線その他の方法を使っても行える。

第1項 10cm直径級別 平方和、積和、相関係数、回帰係数

表 3.9 10cm直径級別一乗和等

直径級	本数	SX_1	SX_1^2	SX_2	SX_2^2
6~10	74	67,6381	62,335,453.57	69,2777	63,597,826.33
12~20	201	241,4649	291,221,937.04	222,84117	248,079,414.30
22~30	188	264,0758	371,361,101.74	226,63417	273,844,945.65
32~40	84	129,7461	200,520,725.13	108,20411	139,879,763.31
42~50	57	94,3011	156,050,747.85	76,8386	103,749,923.19
計	604	797,2260	1081,489,765.33	702,7970	929,071,885.18
直径級	本数	SY	SY^2	SYX_2	
6~10	74	23,2892	14,639,560.30	62,800,624.04	
12~20	201	224,7824	259,206,976.71	208,258,502.52	
22~30	188	258,9870	478,273,850.2	318,462,501.77	
32~40	84	162,1160	314,148,215.75	167,249,787.09	
42~50	57	124,3080	271,519,976.00	127,148,970.92	
計	604	838,4826	1,338,287,767.78	944,020,864.10	
直径級	本数	SX_2Y	SX_2Y		
6~10	74	27,408,507.45	27,200,743.82		
12~20	201	251,527,674.91	272,857,886.40		
22~30	188	361,373,822.75	420,861,056.97		
32~40	84	207,568,442.96	250,751,585.98		
42~50	57	167,798,784.14	205,745,287.51		
計	604	1,017,667,222.1	1,177,416,530.48		

この値を用いて表2.1の形式で計算し平方和、積和を次表に示す。

表 3.10

直径級	SX_1^2	SX_2^2	SX_1X_2	SXY	SX_2Y	SY^2
6~10	0.51231071	0.57956108	1.39268582	1.341361222	1.20578895	3.821981463
12~20	1.141582778	1.02258217	0.65477712	2.82273333	2.31725627	7.3223368
22~30	0.4247832	0.63597485	0.11814181	0.88642285	0.94293100	2.77730114
32~40	0.11535245	0.43729577	0.11832007	0.34779117	0.23968254	1.57211556
42~50	0.03851169	0.16779382	0.02678623	0.08747836	0.22592995	0.42384958
6~50	29.22292850	11.33754207	16.37137724	70.67446216	62.04308381	174.0221794

各直径級別、相関係数を次表に示す。

表 3.11

直径級	$r_{S_1S_2}$	r_{S_1Y}	r_{S_2Y}
6~10	0.7085	0.9600	0.8623
12~20	0.6049	0.9425	0.8197
22~30	0.2273	0.8161	0.7102
32~40	0.5268	0.8167	0.8921
42~50	0.3330	0.7063	0.8467
6~50	0.9006	0.9911	0.9463

表3.10の値を用いて最小二乗法で求めた各直径級別回帰係数の値を次表に示す。

表 3.12

直径級	b	c
6~10	1.91432	0.92412
12~20	1.84110	1.08815
22~30	1.76517	1.15632
32~40	1.77152	1.21217
42~50	1.56111	1.09595
6~50	1.79373	1.11500

第2項 10cm直径級別 回帰に帰因する平方和及び

10cm直径級別の回帰に帰因する平方和及びを次式により求めたものを表3.13に示す。

回帰に帰因する平方和 ; $S\hat{y}^2 = bSx_1y + cSx_2y$
 回帰からの偏差平方和 ; $Sdy^2_{x_1x_2} = Sy^2 - S\hat{y}^2$
 推定の誤差の分散 ; $S_{y,x_1x_2} = Sdy^2_{x_1x_2} / n-3$
 n: 標本の大小

直相関係数 $R = \sqrt{\frac{S_y^2}{S_x^2}}$

表 3.13

直径級	S_y^2	$Sd_y^2 \cdot x_1 x_2$	$Sy \cdot x_1 x_2^2$	R
6~10	3,77879975	0,04818168	0,00065045	0,99394
12~20	7,75295147	0,10528221	53,173	0,99323
22~30	2,65617592	0,12112522	65493	0,97796
32~40	1,61273692	0,05737864	73307	0,97097
42~50	0,33729317	0,03655641	67697	0,95593
6~50	123,58490172	0,40791622	0,00067873	0,99895

第3項 6~50cmを一括した場合の回帰係数間の差の検定

分散の一様性の検定

I) 参照) オ2章オ9節オ-項 分散の一様性の検定

共分散分析を行つた後、分散の一様性を検べるためパートレットの検定を行う。

表 3.13のオ3行オ4行より

表 3.14

直径級	$Sd_y^2 x_1 x_2$	n	$\frac{1}{n-3}$	$Sy^2 x_1 x_2$	$\log Sy^2 x_1 x_2$	$\frac{1}{n-3} \log Sy^2 x_1 x_2$	$\frac{1}{f_r}$
0 ~ 10	0.04618168	74	0.0135135	-3.1867861	-22.218131	0.014084	
12 ~ 20	0.10528221	201	0.0049751	-3.2743058	-64.313424	0.005051	
22 ~ 30	0.12112522	188	0.0053191	-3.839378	-58.7028490	0.005405	
32 ~ 40	0.05737864	84	0.0119048	-3.348546	-25.3243226	0.012458	
42 ~ 50	0.03655641	57	0.0175439	-3.1678306	-17.1492524	0.018571	
	0.26852416	589			-188.6759235	0.055405	
	$= q^2$	$= f$			$= 2 \cdot f_r \log Sy^2 x_1 x_2$	$= 2 \cdot \frac{1}{f_r}$	

$$S^2 = q^2 / f = 0,06852416 / 589 = 0,00011640$$

$$\log S^2 \cdot f = 4,7963523 \times 589 = (-3,2036477) \times 589$$

$$= -1886,9484953$$

$$\chi^2 = \frac{1}{0,4329} \{-1886,9484953 + 1882,6759235\}$$

$$= 2,3026 (1,7274282)$$

$$= 3,9775762$$

補正項

$$C = 1 + \frac{1}{3 \cdot 589} \{0,05540463 - 0,00169779\}$$

$$= 1 + 0,0044755$$

$$= 1,0044755$$

$$\text{補正された } \chi^2 = 3,9775762 / 1,0044755 = 3,959$$

χ^2 表の自由度 $5-1=4$ で 2 の値に相当する $P(\chi^2)$ は 0,50 で

であるから分散が一様であるという仮説は捨てられない。

II) 回帰係数の差の検定

参照) オ2章オ9節オ2項 回帰係数間の有意差の検定

表 3.10 の5つの直径級2ついで各列を合計すれば

$$\sum_{i=1}^5 (SX_i^2)_i = 2,23679460$$

$$\sum_{i=1}^5 (SX_i^2)_i = 2,86340799$$

$$\sum_{i=1}^5 (SX_i^2)_i = 1,31071195$$

$$\sum_{i=1}^5 (SX_i^2)_i = 5,49003763$$

$$\sum_{i=1}^5 (SX_i^2)_i = 5,53458871$$

$$\sum_{i=1}^5 (SY_i^2)_i = 16,42648139$$

2 の値を用いて簡略 Doolittle 法で回帰係数を計算した。

$$b = 1,80630792$$

$$c = 1,10603843$$

表 3.15の1 手簡的分散分析表

変動因	自由度	平方和
回帰	10	16,05795723
誤差	589	0,36852416
計	599	16,42648139

表 3.15の2 分散分析表

変動因	自由度	平方和	平方平均
全回帰	2	16,05814626	
回帰間差	2	1,41979097	0,00247389
回帰計	10	16,05795723	
誤差	589	0,36852416	0,00062569
計	599	16,42648139	

$$F = 0,00247389 / 0,00062569$$

$$= 3,954^{**}$$

したがって5つの直径級の回帰係数間には有意差が認められる。
これは表 3.12 を見てわかるとおり、42~50 cm 直径級の回帰係数が他の4つと非常に異なっているため生じたと見られるので、2 の直径級を除いた他の4つの直径級回帰係数間の差を検定してみることにする。

備考 1. 表の数を使わないで計算した場合

$$\bar{q}^2 = \frac{\sum (SY_i^2)_i}{5} - \left\{ b \left(\frac{\sum (SX_i^2)_i}{5} \right) + c \left(\frac{\sum (SX_i^2)_i}{5} \right) \right\}$$

$$= 16,42648139 / 5 - \left\{ (1,80630792) (5,49003763) + (1,10603843) (5,53458871) \right\}$$

$$= 16,426,481.39 - \{2,916,692.45 + 6,121,467.81\}$$

$$= 16,426,481.39 - 16,038,160.26$$

$$= 0.38831513$$

$$q^2 = \frac{\sum (S_4 x_2 x_3^2)_i}{\sum (S_4 x_2 x_3^2)_i} = 0.36852416$$

$$q^{12} = \bar{q}^2 - q^2 = 0.38831513 - 0.36852416$$

$$= 0.01979097$$

$$S^{12} = q^{12}/f = q^{12}/2(k-1) = 0.01979097/2(5-1) = 0.00247387$$

$$S^2 = q^2/f = 0.36852416/589 = 0.00062568$$

$$F = S^{12}/S^2 = 0.00247387/0.00062568 = 3.954^{**}$$

備考2.

q^{12} は次の方法によって求めることも出来る。

$$q^{12} = \frac{\sum (b_i - \bar{b})^2 (Sx_i^2)_i}{\sum (b_i - \bar{b})^2 (Sx_i^2)_i + \frac{\sum (c_i - \bar{c})^2 (Sx_i^2)_i}{2} + 2 \sum (b_i - \bar{b})(c_i - \bar{c})(Sx_i^2)_i}$$

b_i c_i は各直径級の回帰係数

b, c は I) で求めた回帰係数

$$q^{12} = 0.01979097$$

第4項 6~40cmを一括した場合の回帰係数間の差の検定

6~50cm直径級の分散の一般性の検定により5つの直径級の分散は一般であることが分っているのだからここではパーレットの検定は省略される。

表3.10の42~50cm直径級を除いた4つの直径級の各列を合計すれば

$$\sum_{i=1}^4 (Sx_i^2)_i = 2,198,282.91$$

$$\sum_{i=1}^4 (Sx_i^3)_i = 2,695,414.17$$

$$\sum_{i=1}^4 (Sx_i x_2)_i = 1,285,925.22$$

$$\sum_{i=1}^4 (Sx_i x_4)_i = 5,400,557.57$$

$$\sum_{i=1}^4 (Sx_i x_4^2)_i = 5,308,658.76$$

$$\sum_{i=1}^4 (Sx_i^4)_i = 16,002,631.81$$

2の値を用いて簡略Doolittle法で回帰係数を計算した。

$$b' = 1.80994894$$

$$c' = 1.10735961$$

表3.16の1 予備的分散分析表

変動因	自由度	平方和
回帰	2	15,670,664.06
誤差	585	0,331,967.75
計	587	16,002,631.81

表3.16の2 分散分析表

変動因	自由度	平方和	平均平方
全回帰	2	15,653,384.44	
回帰向差	6	0,017,279.62	0.00287994
回帰計	8	15,670,664.06	
誤差	585	0,331,967.75	0.00062050
計	587	16,002,631.81	

$$F = 0.00287994 / 0.00062050$$

$$= 4.641^{**}$$

6~40cmの4つの直径級の回帰係数間には差が認められる表3.12を参照し、最初の直径級、すなわち6~10cm直径級の回帰係数は他の3つの直径級とかなり違っているの、2の直径級を除いて残りの3つの直径級について検定を行ってみる。

第5項 12~40cmを一括した場合の回帰係数間の差の検定

表3.10の6~10cm, 42~50cm直径級を除いた3つの直径級の各列を合計すれば

$$\sum_{i=1}^3 (Sx_i^2)_i = 1,685,972.20$$

$$\sum_{i=1}^3 (Sx_i^3)_i = 2,085,858.09$$

$$\sum_{i=1}^3 (Sx_i x_2)_i = 0,891,239.40$$

$$\sum_{i=1}^3 (Sx_i x_4)_i = 4,056,947.35$$

$$\sum_{i=1}^3 (Sx_i x_4^2)_i = 4,002,869.31$$

$$\sum_{i=1}^3 (Sx_i^4)_i = 12,177,650.38$$

簡略Doolittle法で計算した回帰係数の値は

$$b' = 1.8016844$$

$$c' = 1.1437527$$

表3.17の1 予備的分散分析

変動因	自由度	平方和
回帰	6	11,821,864.31
誤差	464	0,235,786.07
計	470	12,177,650.38

表 3. 17 の 2 分散分析表

変動因	自由度	平方和	平均平方
全回帰	2	11,887,632.14	
回帰間差	4	0,004,232.17	0,001,058.04
回帰計	6	11,891,864.31	
誤差	464	0,285,786.07	0,000,615.92
計	470	12,177,650.38	

$$F = 0,001,058.04 / 0,000,615.92$$

$$= 1.718$$

12~40cm の3つの直径級の間帰係数間には差のない2%、すなわち3つの直径級の間帰平面は互に平行であることが分かったので、次は3つの間帰平面が互に重り合っているか否か、すなわち同一の間帰平面にあるか否かを検定するため間帰平面の高さの差を検定する。

間帰平面の高さの差の検定

表3.17の最初と最後の直径級を除いた3つの直径級の二末和をを合計し、新たに12~40cmの資料を込みにした間帰係数を求める。

表 3. 18

n = 473	X ₁	X ₂	Y
和	635,2848	557,5805	685,8854
平均	1,343.10	1,177.03	1,450.07
1 SX ₁ ² など	863,103,763.91	754,710,971.38	744,070,459.15
X ₁ 2 補正項	853,254,372.63	742,021,269.06	721,213,405.78
3 SX ₁ ² など	9,849,391.28	5,049,722.32	23,257,093.37
1 SX ₂ ² など		661,744,127.26	822,469,970.63
X ₂ 2 補正項		657,521,226.39	808,678,462.61
3 SX ₂ ² など		4,229,408.7	13,791,528.01
1 SY ²			1,061,928,483.2
Y 2 補正項			994,585,162.6
3 SY ²			57,343,274.83

2の組で 簡略 Deolittle 法で回帰係数を計算した。

$$b'' = 1,77521091$$

$$c'' = 1,14310205$$

回帰に帰因する平方和

$$\begin{aligned} S\hat{y}^2 &= bSx_1y + cSx_2y \\ &= (1,77521091)(23,257,093.37) + (1,14310205)(13,791,528.01) \\ &= 41,286,245.89 + 15,765,123.9 \\ &= 57,051,369.83 \end{aligned}$$

回帰からの補差平方和

$$\begin{aligned} Sdyx_1x_2^2 &= Sy^2 - S\hat{y}^2 \\ &= 57,343,274.83 - 57,051,369.83 \\ &= 0,291,905.00 \end{aligned}$$

表 3. 19 の 1 資料を込みにした場合の予備的分散分析表

変動因	自由度	平方和	備 考
回 帰	2	57,051,369.83	$S\hat{y}^2$
回帰間差	4	0,004,232.17	回帰係数間の分散分析表より
誤 差	466	0,287,672.83	$Sdyx_1x_2^2 - (\text{回帰間差})$
計	472	57,343,274.83	Sy^2

上表の誤差には回帰平面の高さの差に帰因する平方和と各直径級ごとの回帰からの補差平方和の合計、すなわち原因不明（主として資料自身の生物変動に因るもの）の平方和が含まれているので、これを二つの部分に分ける。

	平方和	
誤 差	0,287,672.83	466
原因不明 (= q^2)	0,285,786.07	464
平面間の差	0,001,886.76	2

完成された分散分析表

変動因	自由度	平方和	平均平方
回 帰	2	57,051,369.83	
回帰間差	4	0,004,232.17	
平面間差	2	0,001,886.76	0,000,943.38
不明原因	464	0,285,786.07	0,000,615.92
計	472	57,343,274.83	

$$\begin{aligned} F &= 0,000,943.38 / 0,000,615.92 \\ &= 1.53 < F_{(464)}^{(2)} = 3.02 \end{aligned}$$

以上の結果を取纏めれば次表のようになる。

樹種	本数	直径範囲	修正係数	回帰係数 向の差の検定				
				平均直径	回帰係数	回帰百分散	誤差百分散	F
ハナミズナ	604	6~50	3.960	1.80631	1.10604	0.002474	0.0006257	3.954
	507	6~40	3.784	1.80775	1.10737	0.002880	0.0006205	4.647
	473	12~40		1.80163	1.10375	0.001058	0.0006157	1.718
				回帰平面 向の差の検定				
				平均直径	回帰係数	平面向の百分散	不明原因	F
				1.77521	1.14310	0.002834	0.00061572	1.53

第6項 材積式の決定と材積表の作成

オ5節より材積式の係数は

6~10cm と 42~50cm 直径径には b, c, 12~40cm 直径径には b' c' を使う。

修正係数(オ2章オ11節)は次のとおりになる。

直径範囲	標準誤差	(標準誤差) ²	$\frac{n-1}{n}$	$\frac{n-1}{n}$ (標準誤差) ² X 1.151273	修正係数
6~10	0.0255037	0.00065045	0.986486	0.00073874	1.0017
12~40	0.0247213	0.00061207	0.997586	0.00071352	1.0016
42~50	0.0260186	0.00067697	0.982456	0.00076572	1.0018

材積式および誤差率(オ1章オ4節オ1項)

直径範囲	本数	材積式	誤差率%
6~10	74	$\hat{V} = 1.91432X_1 + 0.92412X_2 - 2.22007$	13.02
12~40	473	$\hat{V} = 1.77521X_1 + 1.14310X_2 - 2.28196$	20.98
42~50	57	$\hat{V} = 1.56111X_1 + 1.07575X_2 - 1.87928$	13.54

材積表に記入する材積は上記材積式で得られた対数の値 の真数を含め、それに修正係数を乗じたものを 1/100 倍したものである。

誤差率は単本に対するものであり(オ5節信頼度) 林分に対しては測定本数の平方根で割ることにより材積表のどの林分に対する誤差率が計算できる。

直径範囲	46	48	50
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20	370	1.486	1.584
21	467	1.567	1.671
22	544	1.649	1.758
23	621	1.731	1.846
24	698	1.814	1.934
25	775	1.897	2.023
26	854	1.981	2.112
27	932	2.065	2.201
28	1011	2.149	2.290
29	1090	2.232	2.380
30	1169	2.317	2.469
31	1248	2.402	2.558
32	1327	2.487	2.647
33	1406	2.573	2.737
34	1485	2.658	2.826
35	1564	2.744	2.916
		2.829	3.011

棧積表 東京ヒノキ

$$(v = 10^a d^b h^c \text{ による})$$

細字は補正したもの
太字は補正したもの

-62~1-

[illegible]

オ4章 伐積式 $v = a + b h + c d^2 + d d^2 h$ による伐積表調製の計算例

オ1節 資料

オ3章 $v = 10 a d^2 h^c$ による伐積表調製に使った資料と同じものを用いた。

オ2節 平方和、積和の計算

(参照) オ2章オ2節 平方和、積和 相関係数の計算式 表2.1

$v = a + b h + c d^2 + d d^2 h$ を簡単な形で表わすため

$$h = X_1$$

$$d^2 = X_2$$

$$d^2 h = X_3$$

$$v = y$$

とすれば、上式は次のように表わすことができる。

$$Y = a + b X_1 + c X_2 + d X_3$$

全資料につき X_1 X_2 X_3 を計算し次表の様式で記録する。

表 4. 1

直径階	樹高階	D	H= X_1	V	X_2	X_3
6	5	4.5	5.2	0.021	0.004525	0.02199
		4.5	5.2	0.021	0.004525	0.02199
	6	4.2	5.5	0.017	0.0036	0.02142
		4.9	5.6	0.029	0.0076	0.02366
		...	...	...	...	...

(備考) 棄却帯を計算するため右側に4つ空らんを残しておく

積和 平方和の計算は表2.1の形で計算する。

$n = 615$	X_1	X_2	X_3	Y
和	93554	40881877	75777691	272,6383
平均	15212	00664246	1252158	444331
X_1 1 $15X_1^2$ 正項	15503258	2579260698	14796920821	5278,03699
2 $5X_1^2$ 正項	14231465	02189964424	11522326998	414738269
3 $5X_1^2$ 正項	1272289	1367340898	3249593828	113065430
4 $15X_1^2$ 正項	11278579	16373409	385679065	130216786
5 相向係數		083080	004275	0868339
X_2 1 $15X_2^2$ 正項		48247417105	99066448035	3446363639576
2 相正項		2712662879	503729145121	181235216506
3 $5X_2^2$ 正項		21071954226	486877302863	16341419010
4 $15X_2^2$ 正項		445160	4863401	1675793
5 相向係數			093093	097507
X_3 1 $15X_3^2$ 正項			2102840136643	728,47046087
2 相正項			9337005615108	335,93334790
3 $5X_3^2$ 正項			1681395741355	392,54113697
4 $15X_3^2$ 正項			3419268	39473648
5 相向係數				0994444
Y 1 $15Y^2$				25413930065
2 相正項				12086445956
3 $5Y^2$				13327428109
4 $15Y^2$				1154447

才三節 回帰係数の計算

(参照) 才2章 才3節 才1項 II 組織的解法 表23の1および
注意(2)

才4節 才/項 I 又 B 独立変数が三つの場合

積和 平方和の値を見ると、オーダは 10000 の桁から 1 桁まで変化しており、このまゝ最小二乗法で解くには不便であり、また誤差を生じやすいので、小数点の位置を整えるためオ2章オ3節注意2で説明した方法に従って小数点の位置を移動させる。

$$A = \begin{pmatrix} 12722.89 & 136.0296247 & 3269.593823 \\ 136.0296247 & 2.1071354 & 48.687730 \\ 3269.593823 & 48.687730 & 1169.139574 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.0 \\ 0 & 1.0 \\ 0 & 0.0001 \end{pmatrix} \quad \text{左 A の両側より来すれば}$$

$$E = DAD$$

$$z = \begin{pmatrix} 1.2722890 & 1.3602963 & 0.32695938 \\ 1.3602963 & 2.1071354 & 0.48687730 \\ 0.32695938 & 0.48687730 & 0.11691396 \end{pmatrix}$$

$$k = Dg\lambda = \begin{pmatrix} 1.1306543 \\ 1.6340142 \\ 0.38254111 \end{pmatrix} \quad \lambda = 10^{-1} \times \text{寸}$$

原方程式 $Au = b$ を解く代わりに

方程式 $Bv = g$ を簡略 Doolittle 法で解く。

表 4.3 簡略 Doolittle 法による解法

Forward Solution				
行	b	c	d	計
I	12722890	13602963	0.32695938	40919898
2)	21071354	0.48687290	1.6340142	558832320
3)		0.11691396	0.3925411	1.32329175
II	13722890	13602963	0.32695938	40919898
4)		1.0691724130	0.2529851523	3.2148348213
5)		0.65277021526	0.132302509	1.2151952873
III	2-(5)×(bc)		0.2103848290	1.8616717812
6)			0.00400923541	0.0165613055
IV	3-(5)×(bd)-7×(cc)			4.30387120
7)				
V				
8)				
9)				
10)				

Backward Solution

$$\begin{aligned}
 v_{13} &= 1/(db2) = 249.3998560 \\
 v_{23} &= -v_{13}(cd1) = -52.45997006 \\
 v_{12} &= -v_{13} \frac{(dc)}{(bc)} - v_{23} \frac{(bd)}{(bd)} = -8.00330671 \\
 v_{22} &= \frac{1}{(cc1)} - v_{23}(cd1) = 12.566677310 \\
 v_{21} &= -v_{22} \frac{(bd)}{(bc)} - v_{23} \frac{(bd)}{(bd)} = 0.04548858767 \\
 v_{11} &= 2.794080780
 \end{aligned}$$

Check

$$\begin{aligned}
 v_{11}(1.3722890) + v_{12}(1.3602963) + v_{13}(0.32695938) &= 40919898 \\
 v_{21}(1.3722890) + v_{22}(1.3602963) + v_{23}(0.32695938) &= 1.000000 \\
 v_{31}(2.1071354) + v_{32}(0.48687290) + v_{33}(0.11691396) &= 1.000000
 \end{aligned}$$

この表で得られた値を注釈2)に示した式を用いて元のオクターに直せばならぬ。

回帰係数を元のオクターに直す式は

$$\mu = Dv \lambda^{-1}$$

そこで

$$v = \begin{pmatrix} 0.091841549 \\ -0.0071338307 \\ 0.130387118 \end{pmatrix} \quad \lambda = 10^{-1} \quad D = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{pmatrix}$$

故に

$$\mu = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.091841549 \\ -0.0071338307 \\ 0.130387118 \end{pmatrix} \times 10 = \begin{pmatrix} 0.009184549 \\ -0.071338307 \\ 0.0130387118 \end{pmatrix}$$

逆行列を元のオクターに直すには

$$A^{-1} = DB^{-1}D$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2.7940808 & 0.045488588 & -8.0033067 \\ 0.045488588 & 12.566677 & -52.459970 \\ -8.0033067 & -52.459970 & 249.39986 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore A^{-1} &= \begin{pmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.7940808 & 0.045488588 & -8.0033067 \\ 0.045488588 & 12.566677 & -52.459970 \\ -8.0033067 & -52.459970 & 249.39986 \end{pmatrix} \\
 &\times \begin{pmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00279408 & 0.00045488588 & -0.00080033067 \\ 0.00045488588 & 12.566677 & -0.52459970 \\ -0.00080033067 & -0.52459970 & 0.024939986 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

オ4節 推定値の標準誤差重相関係数、簡差関係数、回帰係数の有意性の検定

回帰と帰因する平方和

$$\begin{aligned}
 S_{\hat{y}}^2 &= bS_{xy} + cS_{xy} + dS_{xy} \\
 &= (0.0091842 \times 1130.65430) + (-0.071338 \times 1634.014) + (0.13039) \\
 &\quad (392.54111) = 132.09915884
 \end{aligned}$$

回帰からの簡差の平方和

$$S_{dY, 123} = S_y^2 - S_{\hat{y}}^2 = 133.27424109 - 132.09915884 = 1.17508225$$

推定の誤差の分散と標準誤差

$$\begin{aligned}
 SY_{123} &= S_{dY, 123} / df = 1.17508225 / 211 = 0.005569725 \\
 SY_{123} &= 0.043866
 \end{aligned}$$

回帰係数の標準簡差

$$\begin{aligned}
 Sb &= SY_{123} \sqrt{c_{11}} = 0.043866 \sqrt{0.00279408} = 0.0073326 \\
 Sc &= SY_{123} \sqrt{c_{22}} = 0.043866 \sqrt{12.566677} = 0.15550 \\
 Sd &= SY_{123} \sqrt{c_{33}} = 0.043866 \sqrt{0.0249400} = 0.0069273
 \end{aligned}$$

回帰係数の有意性の検定

$$\begin{aligned}
 t_b &= b/Sb = 0.0091842 / 0.0073326 = 12.525^{**} \\
 t_c &= c/Sc = -0.071338 / 0.15550 = -0.459 \\
 t_d &= d/Sd = 0.13039 / 0.0069273 = 18.82^{**}
 \end{aligned}$$

重相関係数

$$R^2 = S_{\hat{y}}^2 / S_y^2$$

$$= 132.09915884 / 133.2742409 = 0.99118$$

$$R = 0.99558^{**}$$

偏相関係数

表4.2Rより得られた全相関係数の値は次の通りである。

$$Y_{12} = Y_{y, x_1} = 0.86829 \quad Y_{23} = Y_{x_1, x_2} = 0.83080$$

$$Y_{13} = Y_{y, x_2} = 0.97507 \quad Y_{24} = Y_{x_1, x_3} = 0.84775$$

$$Y_{14} = Y_{y, x_3} = 0.99444 \quad Y_{34} = Y_{x_2, x_3} = 0.98093$$

オ7節の式から

$$-R_{12} = 0.00095 \quad R_{11} = 0.01263$$

$$-R_{13} = -0.00010 \quad R_{22} = 0.00042$$

$$-R_{14} = 0.00985 \quad R_{33} = 0.00248$$

$$R_{44} = 0.01187$$

1)式により

$$Y_{12 \cdot 34} = -R_{12} / \sqrt{R_{11} R_{22}} = 0.12040$$

$$Y_{13 \cdot 24} = -R_{13} / \sqrt{R_{11} R_{33}} = -0.019472$$

$$Y_{14 \cdot 23} = -R_{14} / \sqrt{R_{11} R_{44}} = 0.87719^{**}$$

$$Y_{14 \cdot 23} \text{ 以外は有意ではなかった。}$$

オ5節 独立変数 x_2 の削除

参照) オ2章 オ10節 独立変数の削除

回帰係数の検定及び偏相関係数から独立変数 $x_2 (= D^2)$ はこの残積式では大した役割をはたしていないと思われるので、 x_2 を削除した残積式で残積表を複製しても精度は余り落ちず計算は非常に楽になる。

x_2 を削除した場合の回帰係数、標準誤差、C未数をオ2章オ10節に示した式から計算する。

C未数

$$(C_{11})R = C_{11} - \frac{(C_{12})^2}{C_{22}} = 0.000279392$$

$$(C_{33})R = C_{33} - \frac{(C_{23})^2}{C_{22}} = 0.003040404$$

$$(C_{13})R = C_{13} - \frac{C_{12}C_{23}}{C_{22}} = -0.000781342$$

回帰係数

$$b_R = b - \frac{C_{12}}{C_{22}} C$$

$$= 0.0091868$$

$$d_R = d - \frac{C_{23}}{C_{22}} C$$

$$= 0.0310061$$

回帰に帰因する平方和

$$S_{\hat{y}}^2 = S_y^2 - \frac{1}{C_{22}} C^2$$

$$= 132.09915884 - (0.071338)^2 / 0.566677$$

$$= 132.09875387$$

回帰からの偏差平方和

$$SdY^2_{13} = S_y^2 - S_{\hat{y}}^2 R^2$$

$$= 133.27424109 - 132.09875387$$

$$= 1.17608722$$

推定の誤差の分散と標準誤差

$$SY_{13}^2 = SdY_{13}^2 / d.f. = 1.17608722 / 6.12 = 0.001921711$$

$$SY_{13} = 0.043837$$

重相関係数

$$R^2 = S_{\hat{y}}^2 / S_y^2 = 0.99118 \quad R = 0.9956$$

此後記号を簡略にするためRを省略する。

オ6節 資料の棄却

オ5節で求めた回帰係数により回帰式は

$$\hat{y} = \bar{y} + b(x_1 - \bar{x}_1) + d(x_3 - \bar{x}_3)$$

$$= (\bar{y} - b\bar{x}_1 - d\bar{x}_3) + b x_1 + d x_3$$

$$= \{ (0.44331 - (0.0091868)(15.212) - (0.310061)(1.232158) \} + 0.0091868 x_1 +$$

$$0.310061 x_3 = -0.07848 + 0.0091868 x_1 + 0.310061 x_3$$

表4.1の右の空らんを利用して資料全部について $Y - \hat{y}$ を計算し、その値が0.0700を超えるものについて棄却群を計算した。

*印は棄却されるものを示す。

Datum	D	H	D ² H	V - $\bar{V}$	$(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$	$\frac{1}{n} \sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$	$\sqrt{1 - r^2}$	
24	234	22.3	267350	00837	162011	000239	099261	01132
26	265	15.8	110956	-1166*	-007356	189	99811	1132
28	229	21.8	169693	821	306728	964	99036	1128
30	309	22.4	219877	929	652759	839	99461	1128
32	328	16.5	173210	1493*	064992	184	99816	1132
34	337	14.9	169218	-773	-13801	251	99749	1132
36	342	18.9	221062	980	362030	270	99730	1132
38	367	16.5	222357	830	128727	307	99698	1132
40	366	22.2	293382	1451*	1219162	546	99454	1130
42	355	23.9	301200	1687*	1548461	817	99183	1129
44	378	17.8	248979	869	326954	321	99679	1131
46	323	19.8	282910	771	234592	360	99620	1131
48	327	19.8	281415	847	727715	376	99624	1131
50	352	24.4	356055	783	2142119	824	99176	1129
52	323	24.4	338805	1949*	1969583	836	99164	1128
54	349	24.4	372250	1847*	2380920	854	99146	1128
56	395	19.5	304249	1432*	778422	458	99542	1131
58	394	21.0	329314	1933*	1195568	524	99476	1130
60	408	22.5	374544	1703*	1834634	702	99298	1129
62	427	23.2	378661	1115	2443560	738	99262	1129
64	390	25.2	383292	937	2600740	944	99056	1128
66	423	21.3	381119	701	1573208	764	99236	1129
68	422	21.0	373976	807	1454408	780	99260	1129
70	425	21.2	382925	932	1558254	782	99218	1129
72	427	21.6	393831	1328*	1731936	825	99175	1129
74	424	23.7	426049	927	2574251	943	99057	1128
76	402	17.0	332119	950	376025	992	99008	1128
78	444	19.2	378501	909	1921140	994	99006	1128
80	438	20.5	393280	919	1431339	926	99074	1128
82	404	23.8	440753	1415*	2603803	1034	98966	1127

Datum	D	H	D ² H	V - $\bar{V}$	$(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$	$\frac{1}{n} \sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$	$\sqrt{1 - r^2}$	
84	439	23.4	450967	995	2687558	01104	098896	01127
86	439	23.6	454822	1004	2785490	1120	98880	1127
88	444	26.1	514525	1382*	4265768	1446	98534	1125
90	445	26.8	530707	2131*	8726896	1577	98223	1124
92	460	19.3	408388	1644*	1169205	1276	98724	1126
94	461	21.3	452670	-1084	2009669	1359	98641	1125
96	463	22.3	478043	-1228*	2518272	1459	98541	1125
98	465	22.4	484344	-1785*	2600122	1510	98490	1125
100	452	21.5	439254	-979	1991039	1194	98806	1126
102	465	24.7	534076	-2242*	3903170	1712	98288	1123
104	461	25.6	544054	-1015	4376715	1723	98277	1123
106	468	27.1	593555	8251*	5597034	2090	97910	1121
108	488	20.4	485814	1255*	1885510	1967	98033	1122
110	475	21.4	482838	765	2229656	1682	98318	1124
112	479	21.9	502406	-1308*	2541042	1816	98184	1123
114	489	23.6	564326	-1271*	3705324	2355	97745	1120
116	478	25.1	573495	1011	4457762	2093	97907	1121
118	487	24.7	585807	-1360*	4994615	2317	97683	1120
120	509	23.7	414022	-1248	4171851	2981	97019	1116
122	523	24.4	477342	-1120*	4546959	2841	97159	1117
124	483	24.3	594609	916	4253274	2466	9876	1119
126	494	25.1	612530	2314*	4844209	2604	97396	1118

オ7節 棄却済資料による残積式の再計算

オ1項 平方和 積和の計算

表 4.4

$n = 590$	X_1	X_2	Y
和	87875	648,4572	235,0991
平均			
1 $5X_1^2$ など	14194409	12237309062	44403,11113
2 補正項	13088162	4653,526296	350158193
3 $5X_1^2$ など	1106247	2583782828	90152920
4 $\sqrt{5}X_1$ など	105,17828	3092,48334	1053,05335
5 相関係数		0.83550	485611
1 $5X_2^2$ など		1576,516935226	551629310624
2 補正項		712,0218209395	258,268602422
3 $5X_2^2$ など		364,495148331	293,360708182
4 $\sqrt{5}X_2$ など		29,40230	294,37818
5 相関係数			0.99654
1 $5Y^2$			193,92238253
2 補正項			58,68065563
3 $5Y^2$			100,24773190
4 $\sqrt{5}Y$			10,01208

オ2項 行列式の元の小数点の移動

$$A = \begin{pmatrix} 1106247 & 25837828 \\ 25837828 & 36449511 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix} \text{ を } A \text{ の両側から乗ずる。}$$

$$B = DAD = \begin{pmatrix} 1106247 & 25837828 \\ 25837828 & 36449511 \end{pmatrix}$$

$$\text{列ベクトル } g = \begin{pmatrix} 90152920 \\ 29336071 \end{pmatrix}$$

$$R = Dg\lambda = \begin{pmatrix} 90152920 \\ 29336071 \end{pmatrix} \lambda \quad \lambda = 10^{-1} \text{ とすれば}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.90152920 \\ 2.9336071 \end{pmatrix}$$

方程式 $Bv = R$ を簡易 Doolittle 法で解く

オ3項 簡易 Doolittle 法による解法
表 4.5 簡易 Doolittle 法による解法

行	b	d	Forward	Solution	Check
1	1106247	25837828	0.90152920	45915590	0.90152920
2	25837828	36449511	2.9336071	14,1623410	2.9336071
3	1106247	25837828	0.90152920	45915590	4,150573064
4	1	25837828	0.814943860	4,150573064	3,438,161707
5	25837828	36449511	0.8279969172	3,438,161707	13172061681
6	2610192535	1	0.3172061681	13172061681	13172061681
7	0.074067870	0	0.074067870		
8	0	0	0.3172061681		

Backward Solution

$$C_3 = 1/2610192535 = 0.383113501$$

$$U_2 = -U_3(2.335629204) = -0.894811081$$

$$U_1 = 1/1106247 - U_2(2.335629204) = 0.9039572254 + 2.089946893 = 2.993904147$$

Check

$$U_1(1106247) + U_2(25837828) = 1000000000$$

$$U_2(25837828) + U_3(36449511) = 1000000000$$

得られた結果を元のオーダーに直す

$$\mu = Dv\lambda = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.90152920 \\ 2.9336071 \end{pmatrix} \times 10$$

$$= \begin{pmatrix} 0.0074067870 \\ 0.29336071 \end{pmatrix}$$

C 乗数

$$A^{-1} = D B^{-1} D$$

$$= \begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.99300415 & -0.89481108 \\ -0.89481108 & 0.38113501 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.000299300415 & -0.00089481108 \\ -0.00089481108 & 0.0038113501 \end{pmatrix}$$

才4項 標準誤差、重相関係数および回帰係数の有意性の検定

回帰に帰因する平方和

$$S\hat{y}^2 = b Sx_1y + c Sx_2y$$

$$= (0.0074068)(901.52920) + (0.31721)(293.360708182)$$

$$= 99.73439673$$

回帰からの偏差平方和

$$Sdyx_1x_2^2 = S y^2 - S\hat{y}^2$$

$$= 100.24173190 - 99.73439673 = 0.50733517$$

推定の誤差の分散と標準偏差

$$S y x_1 x_2^2 = S dy x_1 x_2^2 / d.f.$$

$$= 0.50733517 / 587$$

$$= 0.00086087763$$

$$S y x_1 x_2 = 0.029341$$

回帰係数の標準偏差および有意性の検定

$$Sb = S y x_1 x_2 / \sqrt{C_{11}} = 0.029341 / \sqrt{0.00029937} = 0.00050760$$

$$Sd = S y x_1 x_2 / \sqrt{C_{22}} = 0.029341 / \sqrt{0.00381135} = 0.0018115$$

$$tb = b / Sb = 0.0074068 / 0.00050760 = 14.592^{**}$$

$$td = d / Sd = 0.31721 / 0.0018115 = 175.109^{**}$$

回帰係数はいずれも有意であった。

(自由度587)

重相関係数

$$R^2 = S\hat{y}^2 / S y^2$$

$$= 0.99494$$

$$R = 0.99745$$

この重相関係数はYKに対するHおよびD²Hの全相関係数0.8561/0.9965より幾分大とばっている。

重相関係数の有意性の検定

変動因	自由度	平方和	平均平方
回帰	2	99.73439673	49.8671984
推定の誤差	587	0.50733517	0.00086087763
全体	589	100.24173190	

$$F = 57926.00^{**}$$

重相関係数はきわめて有意であり、截積式はきわめて有意である。

才8節 10 cm 直径階毎の回帰係数間の差の検定

前章と同様にこの場合も全資料を10 cm 直径階に分けてそれぞれの回帰係数を求めその差を検定した。

才1項 10 cm 直径階別、平方和、積和、相関係数回帰係数

表 4.6 10 cm 直径階別和、二乗和等

直径級	本数	SX ₁	SX ₂	SY
6~10	79	673.5	5.14577	21610
12~20	203	2639.3	12.75692	29.3022
22~30	190	3077.2	20.32201	76.9382
32~40	77	1495.0	18.76796	66.0534
42~50	41	902.5	18.15306	60.6443
計		8787.5	648.14572	235.0991
直径級	SX ₁ ²	SX ₂ ²	SY ²	
6~10	604.13	0.4235899061	207332430	
12~20	35175.17	30.8492756014	496177506	
22~30	50798.00	208.0504102297	33.69279972	
32~40	29792.06	435.4014715672	61.70544780	
42~50	20174.73	82.77921880182	93.48904065	
計	141944.09	1576.5169353226	193.92238753	
直径級	SX ₁ X ₂	SX ₁ Y	SX ₂ Y	
6~10	48.038907	20.06844	0.175810341	
12~20	997.479459	401.08526	12.352383625	
22~30	3396.210701	1281.35100	82.357420325	
32~40	3751.625878	1337.30578	112.810444036	
42~50	4043.454137	1363.30065	276.931252177	
計	12232.309062	4840.311113	581.622810629	

Hの値を用いて表2.1の形式で計算した平方和積和を次表に示す。

表 4.7

直径級	Sx_1^2	Sx_2^2	$Sx_1 x_2$
6~10	262.33	20884.133378	4139589
12~20	860.37	47725.790108	51531956
22~30	960.32	183268.114379	87554442
32~40	765.76	372230.954300	144832369
42~50	308.72	302037.727166	77889828
6~50	11062.47	8644951.143831	2583782766
直径級	$Sx_1 y$	$Sx_2 y$	Sy^2
6~10	164523	2085050734	201421138
12~20	2011336	1850226870	273212518
22~30	3527611	6621695817	253760699
32~40	5484042	13451932799	504243934
42~50	2838649	10461588359	378828156
6~50	90152920	293360708182	10024173190

表4.7の値を用いて最小二乗法で求めた各直径級別回帰係数の値を次表に示す。

表 4.8

径 級	回 帰 係 数	
	b	d
6~10	-0.000118	0.402019
12~20	0.000446	0.382864
22~30	0.006718	0.329215
32~40	0.012362	0.313287
42~50	0.013055	0.312702
6~50	0.007407	0.317206

才2項 10cm直径級別 回帰に帰因する平方和など

10cm 直径級別の回帰に帰因する平方和などを次表に示す。

表 4.9

直径級	Sy^2	$Sdy_1 x_1$	$Sy_1 x_1$	R
6~10	201389660	200031478	2000004418	0.98886
12~20	271735385	201477133	2000073857	0.98986
22~30	241696535	212064164	20006451425	0.97599
32~40	489225379	215018555	20020295	0.98499
42~50	364192936	214635220	200385137	0.98049
6~50	9973439673	250733517	200086878	0.99745

才3項 6~50cmを一括した場合の検定

I 分散の一様性の検定

表 4.10

直径級	$Sdy_1 x_1^2$	K	n-3	$Sy_1 x_1^2$
6~10	200031478	79	76	2000004418
12~20	201477133	203	200	2000073857
22~30	212064164	190	187	200064514
32~40	215018555	77	74	20020295
42~50	214635220	41	38	20038514
	243226550 = $\bar{y}^2$		575 =f	

直径級	$\log Sy_1 x_1^2$	$f_v \log Sy_1 x_1^2$	$1/f_v$
6~10	-5.3828109	-409.0936284	0.0126582
12~20	-4.1316083	-826.3216600	0.0050000
22~30	-3.1903460	-596.5947020	0.0053476
32~40	-2.6926109	-199.2532066	0.0129870
42~50	-2.4143814	-91.7464932	0.0263158
		-2123.0096902 = $\sum f_v \log sy_1 x_1^2$	0.0623086 = $\sum 1/f_v$

$$S^2 = \bar{y}^2 / f = 243226550 / 575 = 0.00075177$$

$$\log S^2 f = \bar{x} \cdot 8760850 \times 575 = (-3.1239150) \times 575$$

$$= -1796.2511250$$

$$\chi^2 = \frac{1}{0.4329} \{-1796.25/250 + 2123.0096902\}$$

$$= 23026 (326.7585652)$$

$$= 752.394$$

$$\text{補正項 } C = 1 + \frac{1}{3(4)} (0.0623086 - 0.0017391)$$

$$= 1 + 0.083333 (0.0605695)$$

$$= 1 + 0.00505$$

$$= 1.00505$$

$$\text{補正された } \chi^2 = 756.194^{**}$$

分散は一様とは認められない。すなわち 6 ~ 50 cm の 5つの級の分散の等しいという帰零仮説は捨てられる。

前章と同様にいろいろな 10 cm 直径級の組合せについて “分散の一様性” の検定を行ったが、いずれも一様であるとは認められなかった。

この結果 5つの直径級にはそれぞれ別の残積式を適用する必要がある。

オ7節 残積式の決定と残積表の作製

$Y = a + bX_1 + dX_2$ に表 48 に示した回帰係数の値を入れ、ば次のような残積式が得られる。

直径級	本数	残積式	誤差率%
6 ~ 10	79	$Y = 0.00218 - 0.00011826X_1 + 0.40202X_2$	14.27
12 ~ 20	203	$Y = 0.00133 + 0.00044586X_1 + 0.38286X_2$	11.79
22 ~ 30	190	$Y = -0.05790 + 0.0067184X_1 + 0.32992X_2$	12.23
32 ~ 40	77	$Y = -0.13801 + 0.012362X_1 + 0.31329X_2$	10.47
42 ~ 50	41	$Y = -0.18224 + 0.013055X_1 + 0.31290X_2$	8.29

本式により求めた残積表を次表に示す。

誤差率は前章の説明と同じである。

棧積表 東京ヒノキ

[illegible]

$$(V = a + b\hbar + c d^2 + d \cdot d^2 \hbar \text{ KLB})$$

[illegible]

第5章 樹種間の比較

資料の僅少な樹種、或いは十分な資料が蒐集されな樹種であっても、樹種を二つに別した同一の回帰式で推定できることと保証されれば、それだけ計算の手間を省くことができ、また枝積表の数を減らすことが可能となるので、枝積表完成に先だてて樹種地域間の回帰式の比較を行う。

ここで用いられる統計的方法は、直径級間の比較に用いたものと全く同じである。

例として $y = 10^a d^b$ なる回帰式による比較を示そう。

オノ節 東京スギの枝積式の計算

東京森林局蒐集の管内スギ823本についてオノ章と同様な計算によって次の結果が得られた。

表5.1 直径級別平方和積和

直径級	$\sum x_i^2$	$\sum x_i^2$	$\sum x_i \cdot x_i$
6~10	0.27777462	0.45222186	0.24290138
12~40	13.21832229	8.06541619	9.02749700
42~50	0.11340009	0.533219094	0.02953598

$\sum x_i y_i$	$\sum x_i^2 y_i$	$\sum y_i^2$	n
0.75580029	0.91550404	2.34860220	48
33.36483327	24.63365176	86.40402821	604
0.20892344	0.63957646	1.33796175	160

表5.2 直径階別 回帰係数 回帰に帰因する平方和、推定値の分散

直径級	b	c	$\sum dy_i^2$	$\sum y_i^2$
6~10	1.79258	1.06161	0.02186001	0.00048578
12~40	1.86024	0.97207	0.39119594	0.00065091
42~50	1.55234	1.11348	0.30142813	0.00192031

なお 参考のためオノ章の東京ヒノキの計算結果を次表に示そう。

	50	60	80	100	200	500	Σ	
1	2.00	1.010	1.012	1.013	1.016	1.017	1.018	1
2	3.00	2.015	2.018	2.020	2.025	2.027	2.028	2
3	4.00	3.020	3.025	3.030	3.040	3.045	3.050	3
4	5.00	4.025	4.035	4.045	4.065	4.075	4.085	4
5	6.00	5.030	5.045	5.060	5.090	5.105	5.120	5
6	7.00	6.035	6.060	6.085	6.130	6.155	6.180	6
7	8.00	7.040	7.075	7.110	7.170	7.205	7.240	7
8	9.00	8.045	8.090	8.135	8.210	8.255	8.300	8
9	10.00	9.050	9.105	9.160	9.250	9.305	9.360	9
10	11.00	10.055	10.120	10.185	10.290	10.365	10.440	10
11	12.00	11.060	11.135	11.210	11.330	11.415	11.500	11
12	13.00	12.065	12.150	12.235	12.370	12.465	12.560	12
13	14.00	13.070	13.165	13.260	13.410	13.515	13.620	13
14	15.00	14.075	14.180	14.285	14.450	14.565	14.680	14
15	16.00	15.080	15.195	15.310	15.490	15.615	15.740	15
16	17.00	16.085	16.210	16.335	16.530	16.665	16.800	16
17	18.00	17.090	17.225	17.360	17.570	17.715	17.860	17
18	19.00	18.095	18.240	18.385	18.610	18.765	18.920	18
19	20.00	19.100	19.255	19.410	19.650	19.805	19.960	19
20	21.00	20.105	20.270	20.435	20.690	20.855	21.020	20
21	22.00	21.110	21.285	21.460	21.730	21.905	22.080	21
22	23.00	22.115	22.300	22.485	22.770	22.955	23.140	22
23	24.00	23.120	23.315	23.510	23.810	24.015	24.220	23
24	25.00	24.125	24.330	24.535	24.850	25.065	25.280	24
25	26.00	25.130	25.345	25.560	25.890	26.115	26.340	25
26	27.00	26.135	26.360	26.585	26.930	27.175	27.420	26
27	28.00	27.140	27.375	27.610	28.070	28.325	28.580	27
28	29.00	28.145	28.390	28.635	29.110	29.375	29.640	28
29	30.00	29.150	29.405	29.660	30.160	30.435	30.710	29
30	31.00	30.155	30.420	30.685	31.220	31.505	31.790	30
32	32.00	31.160	31.435	31.710	32.290	32.585	32.880	32
34	34.00	33.170	33.460	33.750	34.350	34.655	34.960	34
36	36.00	35.180	35.485	35.790	36.410	36.725	37.040	36
38	38.00	37.190	37.505	37.820	38.460	38.785	39.110	38
40	40.00	39.200	39.525	39.850	40.510	40.845	41.180	40
42	42.00	41.210	41.545	41.880	42.560	42.905	43.250	42
44	44.00	43.220	43.565	43.910	44.610	44.965	45.320	44
46	46.00	45.230	45.585	45.940	46.660	47.025	47.390	46
48	48.00	47.240	47.605	47.970	48.700	49.075	49.450	48
50	50.00	49.250	49.625	50.000	50.750	51.135	51.520	50
55	55.00	54.260	54.645	55.030	55.800	56.195	56.590	55
60	60.00	59.270	59.665	60.060	60.850	61.255	61.660	60
65	65.00	64.280	64.685	65.090	65.900	66.315	66.730	65
70	70.00	69.290	69.705	70.120	70.940	71.365	71.790	70
80	80.00	79.300	79.725	80.150	81.000	81.435	81.870	80
90	90.00	89.310	89.745	90.180	91.060	91.505	91.950	90
100	100.00	99.320	99.765	100.210	101.120	101.575	102.030	100
125	125.00	124.330	124.785	125.240	126.180	126.645	127.110	125

戸分布の2.5%点

$$U^2(\text{total}) = \frac{\sum f_i^2}{N} - \frac{(\sum f_i)^2}{N^2}$$

-281-

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
1.642	1.645	1.648	1.651	1.654	1.657	1.660	1.663	1.666	1.669	1.672	1.675	1.678	1.681	1.684	1.687	1.690	1.693	1.696	1.699	1.702	1.705	1.708	1.711	1.714	1.717	1.720	1.723	1.726	1.729	1.732	1.735	1.738	1.741	1.744	1.747	1.750	1.753	1.756	1.759	1.762	1.765	1.768	1.771	1.774	1.777	1.780	1.783	1.786	1.789	1.792	1.795	1.798	1.801	1.804	1.807	1.810	1.813	1.816	1.819	1.822	1.825	1.828	1.831	1.834	1.837	1.840	1.843	1.846	1.849	1.852	1.855	1.858	1.861	1.864	1.867	1.870	1.873	1.876	1.879	1.882	1.885	1.888	1.891	1.894	1.897	1.900	1.903	1.906	1.909	1.912	1.915	1.918	1.921	1.924	1.927	1.930	1.933	1.936	1.939	1.942	1.945	1.948	1.951	1.954	1.957	1.960	1.963	1.966	1.969	1.972	1.975	1.978	1.981	1.984	1.987	1.990	1.993	1.996	1.999	2.002	2.005	2.008	2.011	2.014	2.017	2.020	2.023	2.026	2.029	2.032	2.035	2.038	2.041	2.044	2.047	2.050	2.053	2.056	2.059	2.062	2.065	2.068	2.071	2.074	2.077	2.080	2.083	2.086	2.089	2.092	2.095	2.098	2.101	2.104	2.107	2.110	2.113	2.116	2.119	2.122	2.125	2.128	2.131	2.134	2.137	2.140	2.143	2.146	2.149	2.152	2.155	2.158	2.161	2.164	2.167	2.170	2.173	2.176	2.179	2.182	2.185	2.188	2.191	2.194	2.197	2.200	2.203	2.206	2.209	2.212	2.215	2.218	2.221	2.224	2.227	2.230	2.233	2.236	2.239	2.242	2.245	2.248	2.251	2.254	2.257	2.260	2.263	2.266	2.269	2.272	2.275	2.278	2.281	2.284	2.287	2.290	2.293	2.296	2.299	2.302	2.305	2.308	2.311	2.314	2.317	2.320	2.323	2.326	2.329	2.332	2.335	2.338	2.341	2.344	2.347	2.350	2.353	2.356	2.359	2.362	2.365	2.368	2.371	2.374	2.377	2.380	2.383	2.386	2.389	2.392	2.395	2.398	2.401	2.404	2.407	2.410	2.413	2.416	2.419	2.422	2.425	2.428	2.431	2.434	2.437	2.440	2.443	2.446	2.449	2.452	2.455	2.458	2.461	2.464	2.467	2.470	2.473	2.476	2.479	2.482	2.485	2.488	2.491	2.494	2.497	2.500	2.503	2.506	2.509	2.512	2.515	2.518	2.521	2.524	2.527	2.530	2.533	2.536	2.539	2.542	2.545	2.548	2.551	2.554	2.557	2.560	2.563	2.566	2.569	2.572	2.575	2.578	2.581	2.584	2.587	2.590	2.593	2.596	2.599	2.602	2.605	2.608	2.611	2.614	2.617	2.620	2.623	2.626	2.629	2.632	2.635	2.638	2.641	2.644	2.647	2.650	2.653	2.656	2.659	2.662	2.665	2.668	2.671	2.674	2.677	2.680	2.683	2.686	2.689	2.692	2.695	2.698	2.701	2.704	2.707	2.710	2.713	2.716	2.719	2.722	2.725	2.728	2.731	2.734	2.737	2.740	2.743	2.746	2.749	2.752	2.755	2.758	2.761	2.764	2.767	2.770	2.773	2.776	2.779	2.782	2.785	2.788	2.791	2.794	2.797	2.800	2.803	2.806	2.809	2.812	2.815	2.818	2.821	2.824	2.827	2.830	2.833	2.836	2.839	2.842	2.845	2.848	2.851	2.854	2.857	2.860	2.863	2.866	2.869	2.872	2.875	2.878	2.881	2.884	2.887	2.890	2.893	2.896	2.899	2.902	2.905	2.908	2.911	2.914	2.917	2.920	2.923	2.926	2.929	2.932	2.935	2.938	2.941	2.944	2.947	2.950	2.953	2.956	2.959	2.962	2.965	2.968	2.971	2.974	2.977	2.980	2.983	2.986	2.989	2.992	2.995	2.998	3.001	3.004	3.007	3.010	3.013	3.016	3.019	3.022	3.025	3.028	3.031	3.034	3.037	3.040	3.043	3.046	3.049	3.052	3.055	3.058	3.061	3.064	3.067	3.070	3.073	3.076	3.079	3.082	3.085	3.088	3.091	3.094	3.097	3.100	3.103	3.106	3.109	3.112	3.115	3.118	3.121	3.124	3.127	3.130	3.133	3.136	3.139	3.142	3.145	3.148	3.151	3.154	3.157	3.160	3.163	3.166	3.169	3.172	3.175	3.178	3.181	3.184	3.187	3.190	3.193	3.196	3.199	3.202	3.205	3.208	3.211	3.214	3.217	3.220	3.223	3.226	3.229	3.232	3.235	3.238	3.241	3.244	3.247	3.250	3.253	3.256	3.259	3.262	3.265	3.268	3.271	3.274	3.277	3.280	3.283	3.286	3.289	3.292	3.295	3.298	3.301	3.304	3.307	3.310	3.313	3.316	3.319	3.322	3.325	3.328	3.331	3.334	3.337	3.340	3.343	3.346	3.349	3.352	3.355	3.358	3.361	3.364	3.367	3.370	3.373	3.376	3.379	3.382	3.385	3.388	3.391	3.394	3.397	3.400	3.403	3.406	3.409	3.412	3.415	3.418	3.421	3.424	3.427	3.430	3.433	3.436	3.439	3.442	3.445	3.448	3.451	3.454	3.457	3.460	3.463	3.466	3.469	3.472	3.475	3.478	3.481	3.484	3.487	3.490	3.493	3.496	3.499	3.502	3.505	3.508	3.511	3.514	3.517	3.520	3.523	3.526	3.529	3.532	3.535	3.538	3.541	3.544	3.547	3.550	3.553	3.556	3.559	3.562	3.565	3.568	3.571	3.574	3.577	3.580	3.583	3.586	3.589	3.592	3.595	3.598	3.601	3.604	3.607	3.610	3.613	3.616	3.619	3.622	3.625	3.628	3.631	3.634	3.637	3.640	3.643	3.646	3.649	3.652	3.655	3.658	3.661	3.664	3.667	3.670	3.673	3.676	3.679	3.682	3.685	3.688	3.691	3.694	3.697	3.700	3.703	3.706	3.709	3.712	3.715	3.718	3.721	3.724	3.727	3.730	3.733	3.736	3.739	3.742	3.745	3.748	3.751	3.754	3.757	3.760	3.763	3.766	3.769	3.772	3.775	3.778	3.781	3.784	3.787	3.790	3.793	3.796	3.799	3.802	3.805	3.808	3.811	3.814	3.817	3.820	3.823	3.826	3.829	3.832	3.835	3.838	3.841	3.844	3.847	3.850	3.853	3.856	3.859	3.862	3.865	3.868	3.871	3.874	3.877	3.880	3.883	3.886	3.889	3.892	3.895	3.898	3.901	3.904	3.907	3.910	3.913	3.916	3.919	3.922	3.925	3.928	3.931	3.934	3.937	3.940	3.943	3.946	3.949	3.952	3.955	3.958	3.961	3.964	3.967	3.970	3.973	3.976	3.979	3.982	3.985	3.988	3.991	3.994	3.997	4.000

Example: $P\{U^2(8,20) < 2.91\} = 0.975\%$

$U^2_{0.25}(\text{total}) = 1/U^2_{0.975}(f_0+1)$ Example: $U^2_{0.25}(8,20) = 1/U^2_{0.975}(20,8) = 1/4.10 = 0.250$

Higher Hall's Statistical Tables and Formulas (6)

Approximate formula for $\log U^2_{0.25} = \frac{19.08}{\sqrt{f_0+1}} - 0.846\left(\frac{1}{f_0} - \frac{1}{f_1}\right)$ where $f_0 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ and larger than 30.

表 5.3 東京ヒノキ直径階別平方和積和

直径階	$\sum x_1^2$	$\sum x_2^2$	$\sum x_1 x_2$
6~10	0.51231071	0.59956108	0.39268582
12~40	9.84939128	4.22290087	5.04972232
42~50	0.03851169	0.16799382	0.02678673

$\sum x_1 y$	$\sum x_2 y$	$\sum y^2$	n
134361222	130578895	3.82498143	74
23.25709337	13.79152801	57.34327483	473
0.08947806	0.22592995	0.42384958	57

表 5.4 直径階別、回帰係数、回帰に帰因する平方和、推定値の分散

直径階	b	C	$\sum dy x_2^2$	$\sum y x_1 x_2^2$
6~10	1.91432	0.92412	0.04618168	0.00065045
12~40	1.77521	1.14310	0.29190500	0.00062107
42~50	1.56111	1.09595	0.03655641	0.00067697

オ2面 東京スギとヒノキの比較

I 6~10 cm 直径階の比較

1) 分散の一様性の検定 表 5.2 5.4より

樹種	自由度	平方和	平均平方
スギ	45	0.02186001	0.00048578
ヒノキ	71	0.04618168	0.00065045

$$F = \frac{0.00065045}{0.00048578} = 1.3390$$

有意差なし

〔注意〕

単分散の検定にF検定を用いる場合、Fの値は小さい方で、

大きい方を割り、その値をF表の2.5%の値と比較する。

この場合は普通のF検定（帰無仮説は等しい、対立仮説が $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ ）と違い対立仮説が $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ であるので、両側検定を行うことになるから、2.5%の値と比較して95%信頼度の判断が生れるのである。

2.5%のFの値を次表に示す。

2) 回帰係数間の差の検定

表 5.1 と表 5.3 の 6~10 cm 直径級の積和、平方和を合計して
最上二乗法により回帰係数を計算する。

$$\sum_{i=1}^n (Sx_i^2)_i = 0.79008533$$

$$\sum_{i=1}^n (Sx_i^2)_i = 1.05178294$$

$$\sum_{i=1}^n (Sx_i x_{2i})_i = 0.63558720$$

$$\sum_{i=1}^n (Sx_i y_i)_i = 2.09941251$$

$$\sum_{i=1}^n (Sx_{2i} y_i)_i = 2.22129299$$

$$\sum_{i=1}^n (Sx_i^2)_i = 6.17358363$$

$$b' = 186475$$

$$C' = 0.98507$$

表 5.5 の 1 手備的分散分析表

変動因	自由度	平方和
回 帰	4	6.10554194
誤 差	116	0.06804169
計	120	6.17358363

表 5.5 の 2 分散分析表

変動因	自由度	平方和	平均平方
全回帰	2	6.10301612	
粗回帰	2	0.00252582	0.00126291
回帰計	4	6.10554194	
誤 差	116	0.06804169	0.00058657
計	120	6.17358363	

$F = 2.153$
有意差なし

回帰係数間には有意差のないことが分つたので、次に回帰平面の
高さの差を検定する。

3) 回帰平面の高さの差の検定

オ 2 章オ 9 節の備考で示した方法で計算を行つてみた。

$$\begin{aligned} \psi &= (\bar{x}_{11} - \bar{x}_{12})^2 \sum_{i=1}^n (Sx_i^2)_i + 2(\bar{x}_{11} - \bar{x}_{12})(\bar{x}_{21} - \bar{x}_{22}) \sum_{i=1}^n (Sx_i x_{2i})_i \\ &\quad + (\bar{x}_{21} - \bar{x}_{22})^2 \sum_{i=1}^n (Sx_i^2)_i \\ &= (0.00032041)(1.05178294) + (0.00037948)(0.63558720) \\ &\quad + (0.00011236)(0.79008533) \\ &= 0.00033700 + 0.00024119 + 0.00008877 \\ &= 0.00066696 \end{aligned}$$

$\bar{x}_{11}, \bar{x}_{12}$ はそれぞれすぎ、ひのきの x_1 の平均値

$\bar{x}_{21}, \bar{x}_{22}$ はそれぞれすぎ、ひのきの x_2 の平均値

$$\Delta = \left\{ \sum_{i=1}^n (Sx_i^2)_i \right\} \left\{ \sum_{i=1}^n (Sx_i^2)_i \right\} - \left\{ \sum_{i=1}^n (Sx_i x_{2i})_i \right\}^2 = 0.42702718$$

$$h = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{\psi}{\Delta} \quad \left\{ \begin{array}{l} n_1: \text{すぎの標本の大きさ} \\ n_2: \text{ひのきの標本の大きさ} \end{array} \right.$$

$$= 0.0208 + 0.0135 + 0.0016$$

$$= 0.0359$$

$$\sqrt{h} = 0.1895$$

$$S\sqrt{h} = 0.0242$$

S: 分散分析表の誤差の値

$$\begin{aligned} d &= \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = \bar{y}_1 - \bar{y}_2 - b'(\bar{x}_{11} - \bar{x}_{12}) - C'(\bar{x}_{21} - \bar{x}_{22}) \\ &= (0.4086 - 0.3823) - (186475)(0.9319 - 0.9140) - (0.98507)(0.021 - 0.0227) \\ &= 0.0256 \end{aligned}$$

$$t = \frac{d}{S\sqrt{h}} = 0.0256 / 0.0242 = 1.06 < t_{0.05} \quad d.f. = 116$$

有意差がない。すなわち回帰平面の高さには差のないことが分
つた。

したがつて 8~10 cm 直径級の面樹種は共通の回帰式すなわち
それぞれの回帰係数くすぎ $b = 1.79258$ $C = 1.06161$ (ひのき $b = 1.9432$
 $C = 0.92412$) の代りに $\bar{x}$ および $\bar{y}$ にて計算した回帰係数 $b' = 186475$
 $C' = 0.98244$ によつて材積を推定することができる。

II 12~40 cm 直径級の比較

1) 分散の一様性の検定

表 5.2 5.4 から

樹種	自由度	平方和	平均平方
すぎ	601	0.39119594	0.00065091
ひのき	470	0.28190500	0.00062107

$F = 1.048$
有意差なし

4. 回帰係数間の差の検定

表5.1と5.3の12~40 cm 直径級の積和、平方和を合計した値を用いて最小二乗法で回帰係数を計算した。

$$D = 181568$$

$$C = 104697$$

表5.6の1 予備的分散分析表

変動因	自由度	平方和
回帰	4	143.06420210
誤差	1071	0.68310094
計	1075	143.74730304

分散分析表			
変動因	自由度	平方和	平均平方
回帰	2	143.0371	
回帰間	2	0.0371	0.0136
回帰計	4	143.0642	
誤差	1071	0.6831	0.00064
計	1075	143.7473	

この結果ヒノキ、スギの12~40 cm 直径級は一階級で必ず、別々の回帰式から材積を推定しなければならぬ。

[備考]

1. 地域間の検定も全く同じ方法で行える。
2. 検定の順序としては、樹種ごとの直径級間、樹種間、地域間について行うのが普通である。
3. 地域間の検定は地域的材積調製を指定された営林局において進めて行われるものであるが、特に1営林局管内でも生育形体の異なるため、一樹種について二つ以上の材積表を依頼しようとする場合にも適用される。

第6章 調和曲線法による材積表調製方法

第1節 き え が き

この方法は与えられた d, b, h 、樹高をもつ立木の材積を曲線で示された平均材積から推定する方法である。

d, b, h 級、樹高級はあらかじめその間隔を決めておかなければならない。立木材積表調製要綱によれば、 d, b, h 級は2 cm、樹高級は1 mごとに材積を求めることになっているので d, b, h 級は2 cm 間隔 (2, 4, 6, ... cm) 樹高は1 m 間隔 (1, 2, 3, ... m) とするのが望ましい。

従って材積をとり (従属変量) 横軸に d, b, h をとり (独立変量) d, b, h 対材積の曲線を描けば材積は近似的に d, b, h の平方に比例して変化するので曲線は上凸な拋物線を示す。

横軸に樹高をとって、 d, b, h 級ごとに樹高対材積の曲線を描けば一定の積をもつ直線で表わされる。

材積が円筒形、すなわち $V = 0.005454 D^2 L$ で表わされる時にはプロットされた点は、正確に曲線上にあり、その点を結ぶ線は平滑な曲線となる。

しかし、現実には、この線は平滑とはならないし、また直径級 (樹高級) ごとの樹高 (直径) 対材積曲線の間隔は規則的とはならないであろう。材積曲線の間隔および平滑化については、その相互関係および平均材積に含まれている法則に従って、互いに調和のとれた関係にこれらをついてくるように主観的判断をする必要がある。

第2節 free hand 曲線の直合

調和曲線法で材積表を調製するとき、材積曲線は普通 free hand 法で描かれるので、これについて簡単に説明する。

free hand で曲線を描くときには、次の三つの規則を心に留めておかなければならない。

- 1) 曲線から各点までの正または負の差の合計は0となる。
- 2) 曲線からの各点の距りは正と負の合計が算術的に、換言すれば符号に無関係にできるだけ小さくなるようにする。
- 3) 曲線の型は経験、類似の曲線の型、その中に含まれている法則につ

いての知識と一致させる必要がある。

free hand 法は、適当な大きさのグラフ用紙上にプロットされた各測点の間を繋いで、他の測点と互いに関連させながら、曲線を描く方法であつて、点をプロットすることは、質く機械的であるが、曲線を描くときには、要領がある。

つぎに free hand 法で曲線を描く手順について簡略に説明しよう。

1) 独立変量（直径、樹高）に対応する従属変量（材積）をグラフ上にプロットする。

一つの独立変量に対して同じ従属変量をもつものが2つ以上あるときには、その点の上に従属変量の個数に相当する数字を記入してこれを表示す。すなわち weight をつける。

2) プロットされた点の相互関係、上記の規則、weight を考慮において曲線を描く。

3) その曲線とプロットされた点との関係を目測で判断しながら修正する。

4) さらに高い精度が必要であれば、各独立変量の級に対する従属変量の平均値がプロットされ、その点をとつて曲線が描かれる。

この時も、こと同じ事項を考慮しなければならない。

5) 曲線の修正

修正は次式に従つて行う。

$$M = A + \frac{\sum(x)}{N}$$

A: 曲線上の値

x: プロットされた点と曲線上の値との差

N: 個数

M: 修正値

右辺の第二項が正であれば曲線は低すぎ、負であれば高すぎるのであるから、それに応じて曲線を上げたり下げたりする。

第3節 移動平均法による曲線の平滑化

材積曲線を描く方法としては free hand 法が一般的であるが、移動平均法による曲線の平滑化は free hand 曲線の適合を一層よくするための手段として用いられる。

点 x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) に対応する系列 y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) があるとする。

今点 x_i を中心としてその前後に m 個ずつ相隣れる $2m+1$ 個の点に対応する系列

$$y_{i-m}, y_{i-m+1}, \dots, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+m}$$

の平均値 $\bar{y}_i$ 即ち

$$\bar{y}_i = \frac{y_{i-m} + y_{i-m+1} + \dots + y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + \dots + y_{i+m}}{2m+1}$$

を中央点 x_i に対応する正常値とする。

移動平均法とは中央点 x_i を系列の全範囲にわたつてこのような正常値を求める方法である。

中央点を次々移動させてできる点列 $(x_i, \bar{y}_i)$ の変動は原変動より著しく緩慢になる。

$$y_{i-m}, y_{i-m+1}, \dots, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+m}$$

の最大値よりも小さくなり最小値よりも大となるので点列 $(x_i, \bar{y}_i)$

は点 (x_i, y_i) の間を繋いで変動するのである。

移動平均法は観測値と移動平均値との較差の和が0に近いほど観測の傾向を示すものであると解釈されている。
詳細については成実清松、原麻健児、鍋谷清治著「統計解析の理論」を参照されたい。

平均に使う階数として3, 5, 7, 11というような奇数を使えば平均値が必ずこの階の値に相当するの便利である。これをそれぞれ3点平均、5点平均などと呼ぶ。

計算例として、河田浩著「間伐と林内統計」から引用したものを示す。

表 6.1 移動平均法による計算例

直径階	平均材積 × 100	三 点 平 均		五 点 平 均		七 点 平 均	
		平均値	較 差	平均値	較 差	平均値	較 差
16	13.0	—	—	—	—	—	—
18	15.3	14.8	+ 0.5	—	—	—	—
20	16.0	16.1	- 0.1	15.8	+ 0.2	—	—
22	17.0	16.9	+ 0.1	16.8	+ 0.2	16.6	+ 0.4
24	17.6	17.8	0.0	17.5	+ 0.1	17.5	+ 0.1
26	18.2	18.2	0.0	18.2	0.0	18.2	0.0
28	18.9	18.9	0.0	18.9	0.0	19.0	- 0.1
30	19.5	19.6	- 0.1	19.6	- 0.1	19.6	- 0.1
32	20.3	20.3	0.0	20.3	0.0	20.2	+ 0.1
34	21.2	21.0	+ 0.2	20.8	0.4	20.9	+ 0.3

36	21.6	21.4	+0.2	21.6	0.0	21.3	+0.3
38	21.4	22.1	-0.7	21.8	-0.4	21.9	-0.5
40	23.3	22.1	+1.2	22.4	+0.9	22.5	+0.8
42	21.5	22.9	-1.4	22.9	-1.4	—	—
44	24.0	23.3	+0.7	—	—	—	—
46	24.5	—	—	—	—	—	—
計			$\frac{+2.9}{-2.3}$ +0.6	$\frac{+1.8}{-1.9}$ -0.1		$\frac{+2.0}{-0.7}$ +1.3	

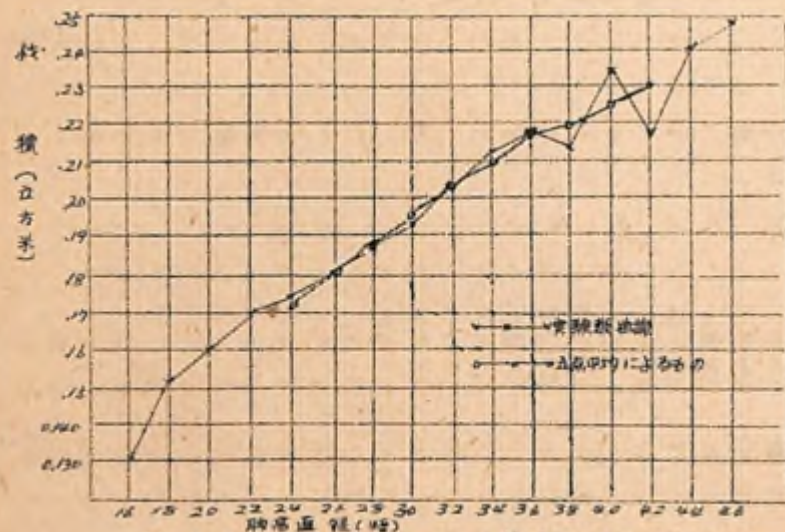


図 6.1 移動平均による樹高曲線の平滑化

第4節 調和曲線法による枚積表調製

第1項 調製の手順

1) 各単木資料を d.b.h. 樹高級に分類する。

直径の範囲が 40 吋以下の時には普通 1 吋級が使われ、樹高は 5 米または 10 呎間隔であるが、級数は 7~8 未満とするのが普通である。

資料の記載は表 6.2 のようにすれば便利である。この表は New

England H の red spruce 607 木の d.b.h. 樹高級別の平均枚積を示すものである。

計算例について説明すれば、三点平均では直径階 18cm の平均枚積 $\times 100$ の

14.8 は 16cm 級、20cm 直径階の平均値である。

$$\frac{1}{3} (13.0 + 15.3 + 16.0) = 14.8$$

順次同じような計算を各直径階について行う。

表 6.2 資料の記載例

直径級	樹高級	本数	平均直径	平均樹高	平均枚積	直径級	樹高級	本数	平均直径	平均樹高	平均枚積
3 吋	20 呎	1	30 吋	24.5 呎	0.57	10 吋	50 呎	15	10.0 吋	51.1 呎	12.91
	30	5	3.2	30.9	0.92		60	22	10.1	58.5	14.51
	40	1	3.5	38.0	1.38		70	6	10.1	69.4	17.31
4	20	7	4.1	20.0	0.91	11	40	1	10.9	38.0	10.20
	30	10	4.0	32.3	1.40		50	17	11.1	50.1	14.55
	40	10	4.2	37.8	1.83		60	19	10.9	59.0	16.69
	50	1	4.2	46.0	2.30		70	4	10.9	67.0	19.05
5	20	9	5.3	20.6	1.51	12	40	1	12.2	40.0	11.29
	30	13	5.0	33.1	2.29		50	4	12.0	50.5	16.70
	40	38	5.1	40.2	2.87		60	7	12.0	58.8	19.22
	50	7	5.2	48.8	3.69		70	7	12.0	70	16.1
6	20	4	6.1	23.2	2.21	13	40	1	13.0	38.0	14.11
	30	6	6.0	32.3	3.09		50	2	12.6	53.8	20.08
	40	43	6.1	40.8	4.02		60	8	13.2	58.6	22.71
	50	19	6.1	48.9	4.96	14	50	1	14.1	53.0	21.30
	60	1	5.8	60.0	5.17		60	2	14.3	59	21.90
7	30	4	7.1	34.0	4.26		70	1	14.0	66.0	24.80
	40	44	7.0	42.0	5.37	15	50	2	15.3	55.0	25.03
	50	23	7.0	50.2	6.08		60	1	14.7	61.5	27.17
	60	8	7.1	57.7	7.56	16	60	1	15.7	66.0	31.18
8	40	30	7.9	41.0	6.40	計		107			
	50	55	8.0	50.8	8.38						
	60	17	8.0	59.5	10.00						
	70	1	8.5	66.0	13.11						
9	40	12	9.0	43.0	8.65						
	50	41	9.0	50.2	10.07						
	60	27	9.1	59.7	12.74						
	70	4	9.3	67.3	15.00						
10	30	1	10.4	34	8.88						
	40	8	9.8	41.9	9.33						

2) 平均枚積を縦軸、平均直径を横軸にとり、各樹高級ごとにプロットした点を軽く結みつける。この線を基準として前記の *free hand* 法、その他の方法で平滑な曲線を描く。この曲線から任意の直径の直径をもつ木の曲線上の枚積を正確に読みとれる。

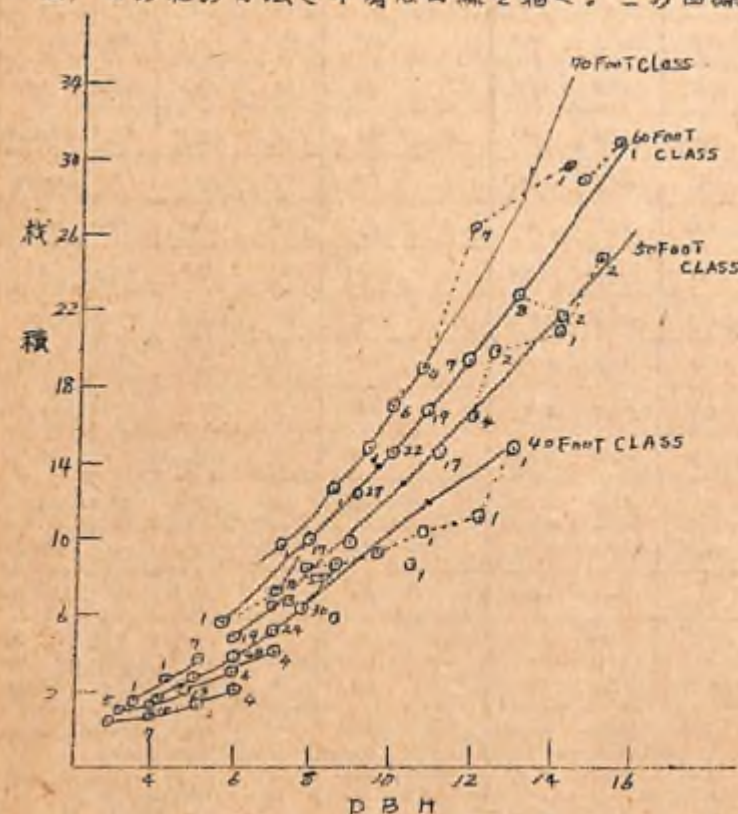


図 6.2

10 呎 樹高級別 db, h-枚積曲線

38.0 呎から 43.2 呎まで、50 呎級では 46.0 呎から 55.0 呎まで変化しており、また各直径級では、平均樹高は正確に 10 呎間隔とはなっていない。すなわち、9 吋直径級では 43.2, 52.2, 59.7, 67.3 呎である。樹高の不規則性に対して曲線を調整する時は、表 6.2 に従って樹高級別にプロットしなおす必要はない。というのは直径の不規則性のため同様な結果が生ずるからである。したがって次の段階が必要である。

3) 図 6.2. の曲線を使って各直径級に対する枚積を読みとり、図 6.3 のように平均樹高を横軸にとりて直径級ごとに実際の平均樹高に対し

てその枚積をプロットする。

たとえば、11 吋直径級 40 呎樹高級の実際の平均樹高は 38 呎であるから、図 6.3 では、読み取られた枚積は 38 呎に対してプロットしなければならない。プロットされた点は直径級ごとに軽く結み付けられる。

4) この曲線を使って平滑な曲線を描く。

この場合樹形、組りを考にいなければ(枚積は樹高に比例して増加するから)理論的には直線となるであろう。全ての直径級の平均形状比が与えられた樹高傾向線内に落ちる場合だけ曲線は同じように直線となる。現実にはこの平均形状比は相異なる級の間でいくぶん違っており、さらに直径、樹高の変化とともに変化している。

このため結み付けられた点は不規則に並び、平均形状比は直径とともに増加するものであるから、上向の傾向のある曲線が得られる。

図 6.3 で、小さい方の 3 直径級の平均を結んだ線はいずれも直線となっているがこれ以外の直径級では明らかにいくぶん上向の曲線となっている。

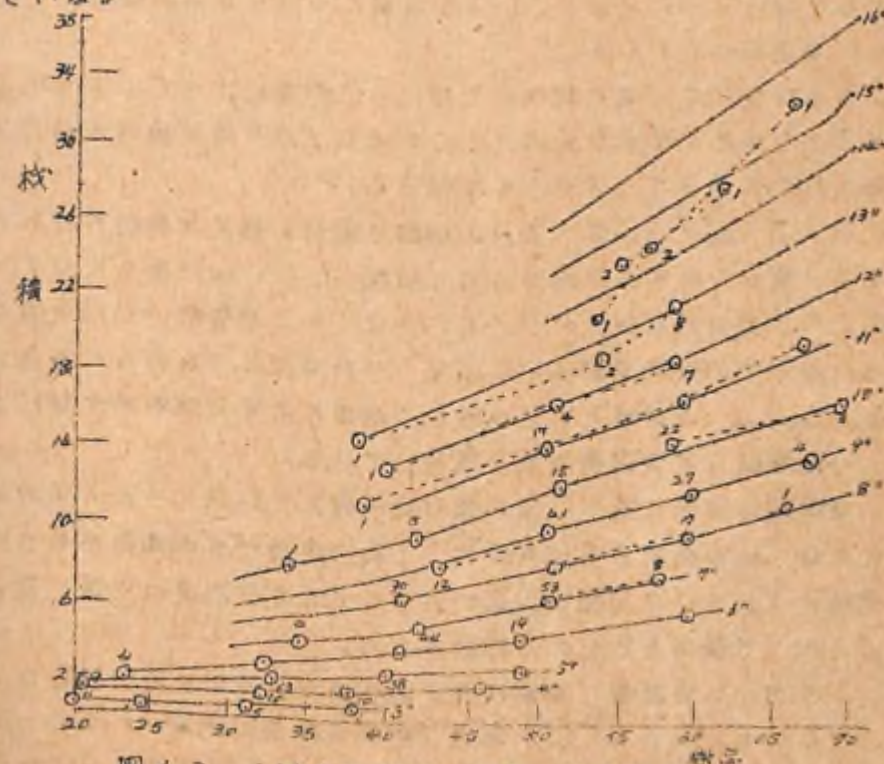


図 6.3 1 吋直径階別 樹高-枚積曲線

これは樹高が高くなるほど形比は大となり、従って一層大きな材積をもっているということを示しているのである。

資料の多い直径級では曲線の適合は比較的に良好であるが、標本木の少ない大径級では、他の曲線の一般的傾向とかなりかけ離れている。

普通このような大径級でも多数の本の平均値は、小径級の平均値と同様な一般的傾向を示すであろうと考えられる。このような時には、プロットされた点に曲線を適合させるようなことはしないで、曲線の間隔、傾について、小径級と同じ一般的傾向に従って曲線をこれらの点に適合させるのである。

こうしなければ、図6.3ではノタ時級とノミ時級の樹高-材積曲線は交錯してしまう。ノミ時級の本は平均して同樹高のノタ時級の本より大きい材積をもっているのであるから、もつと多数の標本木が取られたならば、このような交錯はあり得ないことである。

上記の理由で、ノタ時とノミ時級の曲線は意識的に小径級の曲線に対してほぼ平行に描かれているが材積に及ぼす直径の影響のため尚に一層急傾斜している。

ある直径級の極端な樹高は平均に近い樹高に比べて、より少数の本で示されるのが普通である。したがってその平均材積は多数の本から得られたものより一層激しく変動する。

5) 図6.2, 図6.3, のいずれの曲線の適合も個人的判断で行われているから、樹高対材積の曲線から前と同様にして材積を読みとり、これをふたたび直径対材積のグラフ上にプロットし樹高級ごとに曲線を結びつける。その結果を図6.4に示す、これは図6.3で行った調和 (harmonizing) の意味として後立ち、樹高に対する曲線を平滑にされなかった微細な不規則性が取り除かれている。

曲線間隔はほぼ等しくなり傾向は一致している。この方法で得られた直径、樹高級別の平均材積は、これの幾層倍もの測定値から求めた曲線によらない平均値から見いだされるものと精度は恐らく変らず、したがって費用をそれだけ節約できる。

この図から各直径、樹高に対する材積が読み取られ、必要ならば幾の形にまとめられる。この場合10呎曲線の間隔が10等分されておれば1呎間隔の樹高の材積を読みとることができるが、そうでなければ

は算術的に補間する必要がある。

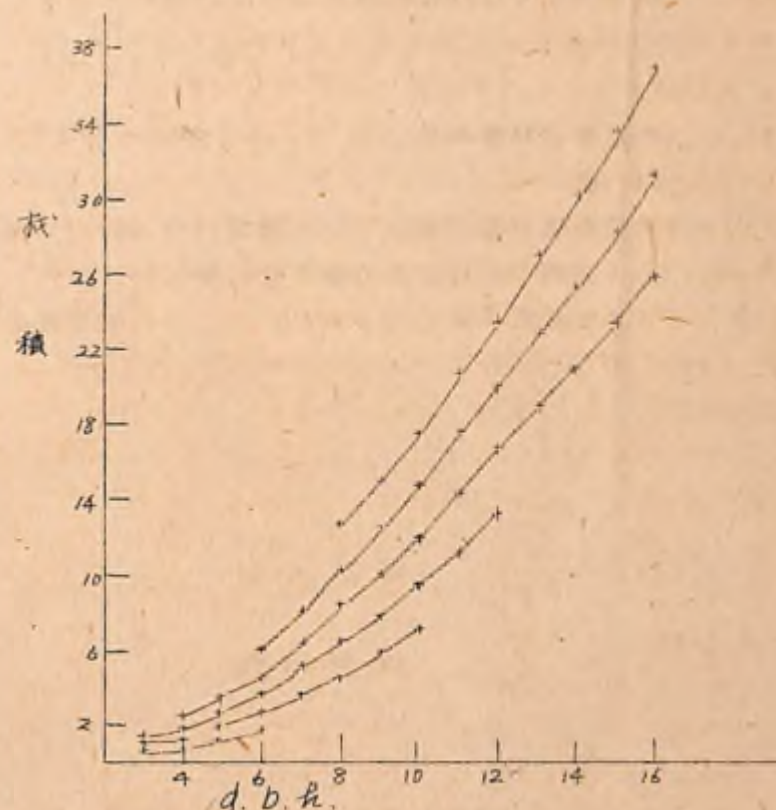


図 6.4

第2項 材積表の精度

与えられた直径、樹高をもつ木の実材積と補間によつて図から読みとられた推定材積からオノ章オノ節で説明した方法で精度を吟味する。

(備考17.)

図6.2, 図6.3, で単一材積曲線を描くとき、ある樹高(直径)級について何本かの曲線を引き、そのうち最良なるものとして採用する曲線を決めるには次の方法が便利である。

最小二乗法による材積表調製でも説明したが従属変数の本来の変化、すなわち材積の標準偏差は標準誤差と推定値の標準偏差に分けられる。

$$\sigma_y^2 = \sigma^2 + \sigma_{\hat{y}}^2$$

σ_y^2 ; 従属変量の標準偏差 $\sigma_y^2 = \frac{1}{n-1} \{SY^2 - \frac{1}{n}(SY)^2\}$
 σ^2 ; 標準誤差すなわち校検曲線からの残差の標準偏差

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \{SZ^2 - \frac{1}{n}(SZ)^2\}$$

$\sigma_{\hat{y}}^2$; 推定値の標準偏差 $\sigma_{\hat{y}}^2 = \frac{1}{n-1} \{S\hat{Y}^2 - \frac{1}{n}(S\hat{Y})^2\}$
 n ; 個数

この式から従属変量の全分散はそれに相関のある部分と無相関の部分に分けられ、この関係から相関的分散の全分散に対する比、すなわち、 $\frac{\sigma_{\hat{y}}^2}{\sigma_y^2}$ (重回帰では重相関係数と呼ばれている) から従属変量の何%が独立変量と関係し何%が他の因子に基づくかがわかる。

上式の両辺を σ_y^2 で割り

$$1 = \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} + \frac{\sigma_{\hat{y}}^2}{\sigma_y^2}$$

$$A.I = \frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} \quad \text{離反指数}$$

$$C.I = \frac{\sigma_{\hat{y}}^2}{\sigma_y^2} \quad \text{相関指数}$$

とすれば

$$1 = (A.I)^2 + (C.I)^2$$

A.I. の小さいほど曲線の適合の良いたことが示されているので、A.I. を使って適合性を検討する。

ここで前に述べた正と負の残差が釣合っているということだけで曲線が修正された位置にあることの決定的証明でないことに注意してもらいたい。

残差の算術合計が、たとえ小さくとも、離反指数が大となれば曲線の適合は悪いことを示している。

【参 考】

直径、樹高、令級と関連せしめた White pine と Jack pine の形は G.H.D. Bedell の *Silvicultural Research* nst No.89 1948 (Ottawa) に発表したものゝ要約である。

諸 君

単木校検が直径、樹高および細り(又は形状)により変化することは一般に認められているところである。

1910年 Jor Janssen は樹木をテーパー級に分類するため使用される胸高直径と胸高より梢端までの中央の箇所の直径との百分率(絶対形率)を提唱した。立木校検測定の一因子をなす細りの研究は1918~1922年に互り Dominion Forest Service で行われ、その成果は1927年報告のかたちで発表された。この報告の著者は細り率曲線を作るため10%間隔の胸高直径と胸高以上の直径の比を使用した。細り数値は二つ以上(通常三つ)の直径群に正確に分ける必要はないと彼は述べている。校検表はこの二または三つの直径群に対する細りの数値から作られるのである。従って各令級別の直径群に対する材積の平均値から作られるのではないのである。この研究の成果は1930年の材積材積表シリーズに発表されている。

形級校検表を使用する場合には必ず平均形級(5本の平均)をサンプリングされる林分に対して使用しなければならぬ。しかしながら、5本の木の測定によって形級の修正された測定値を得ることはできるがサンプリングにはかなりの注意を払ふ必要がある。起り易い誤りには次のようなものがある。

- 形級は時には現木を伐倒、測定せずに推定される。
- 標本木がサンプリングされる母集団全体からではなく局部でとられる。
- 標本木が直径、樹高の範囲全体にわたって適当に散らばっていない。
- 各令級について形級が決定されないで種々なる令級の標準木が平均されることが多い。

資 料 の 解 析

Pelawau のデーターの予備的分析は簡単に測れる因子である直径、樹高および狭い範囲では林令に対する形級の変動を示している、かかる変数の形級に及ぼす影響は小さい方において最大であることがわかった。これらの因子の影響を除くため曲線解析を使う。基礎データーとしては形級校検表調製のためとられた樹幹析解の資料を使用した。

形級を従属変数とし直径、樹高、樹令を独立変数にとつた。解析には主として Dwight の修正を用いた。その手順は次のとおりである。

1. 形級データーを林令、樹高、直径級別に記載する。Jack pine では

3 令級、1~50 51~100 101~150 に分類された、各令級は 10 呎樹高級に分けられ各樹高級は 1~3 吋、4 吋~6 吋等の直径級 (度付) に分けられた。

令級、直径級の巾は樹種および利用できるデータの量で異なるが、少なくとも 3 つの令級をとる必要があり直径の巾は主な樹高級のいずれにも最小 3 直径級を含むように選ばねばならぬ。

2. 形級対直径の曲線は、図 1、図 2、に示すごとく各令級樹高級ごとに作られる。

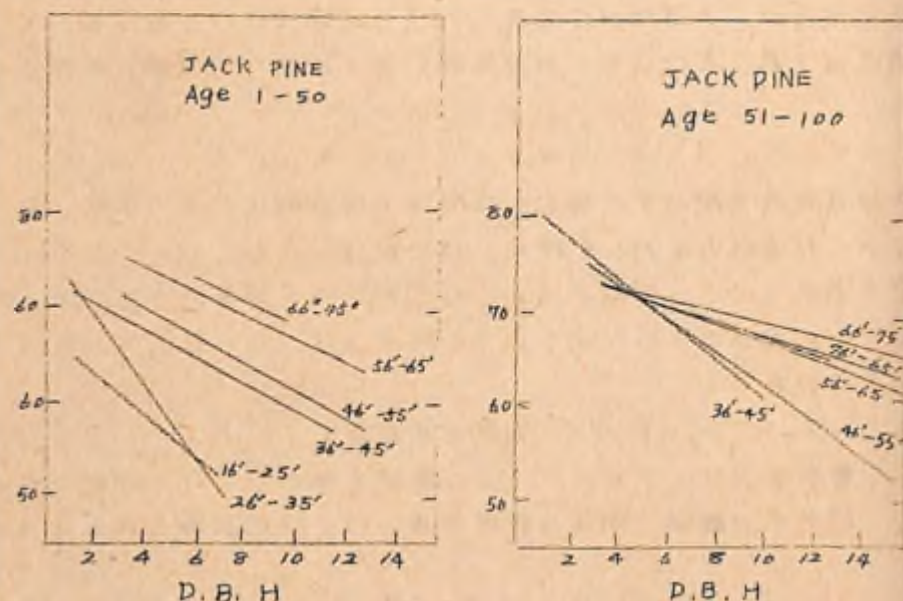


図 1.

図 2.

3. 各樹高級内の樹高と直径の相関を補うため Dought の修正が用ひられた。56~60 呎の木が含まれている 60 呎樹高級では直径と樹高間に相関が存在している。整理表からの資料を用ひてこの相関を示すように曲線が描かれている。(図 3、図 4、参照)

4. 形級対全樹高曲線は 1 吋直径間隔で描かれた。図 5、図 6、直径ごとにプロットされた形級の値は、図 7、図 8 から得られ樹高は図 3、図 4、で調製される。

(Dought の修正)

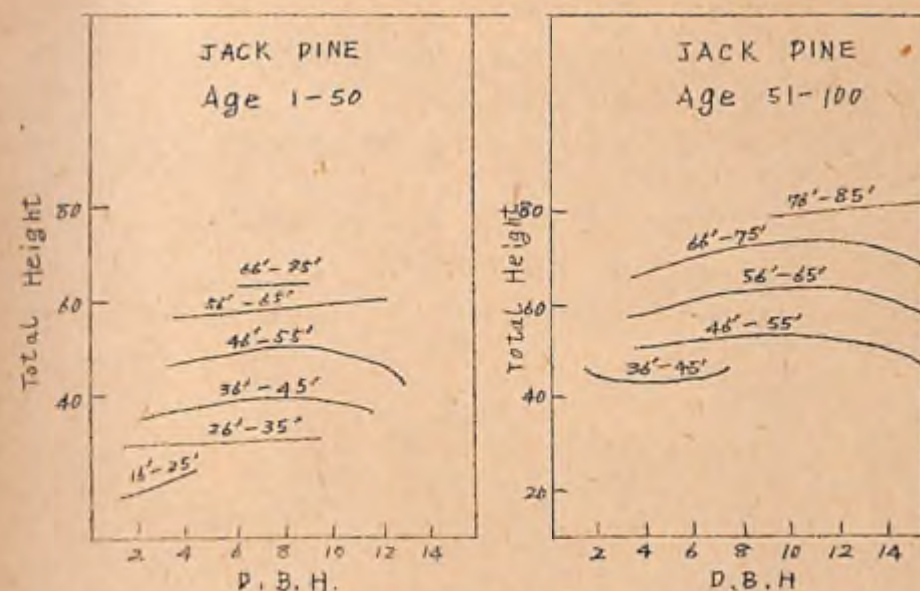


図 3.

図 4.

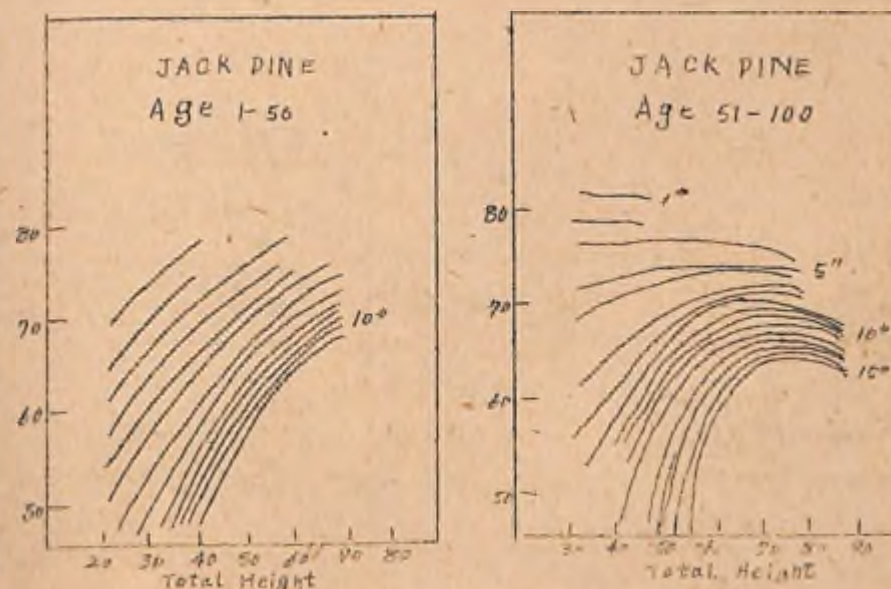


図 5.

図 6.

5. 全ての10呎樹高級ごとの形級は図5, 図6から得られ図7, 図8にプロットされる直径(皮付)に対する10呎樹高級全体にわたる形級の変動を示す, 曲線(直線)が描れた。
6. 解析のオス段階として直径, 樹令樹高の相互の関係を導くために,

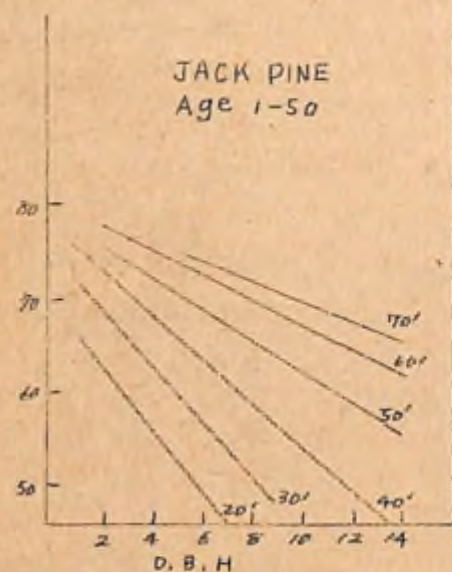


図 7.

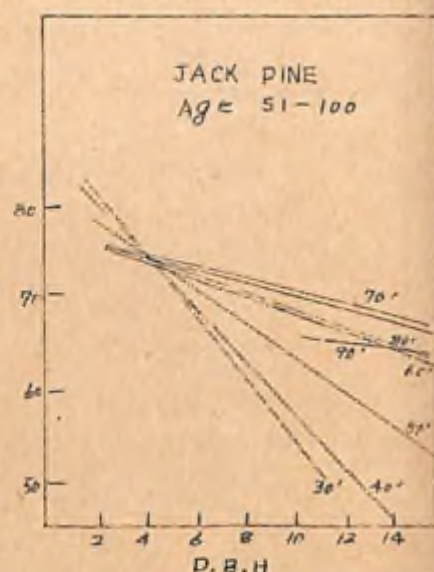


図 8.

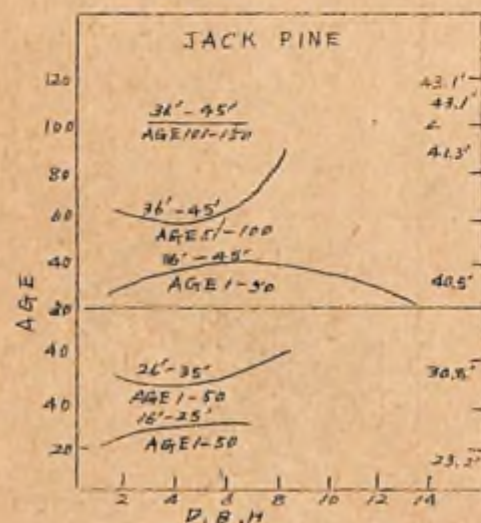


図 9

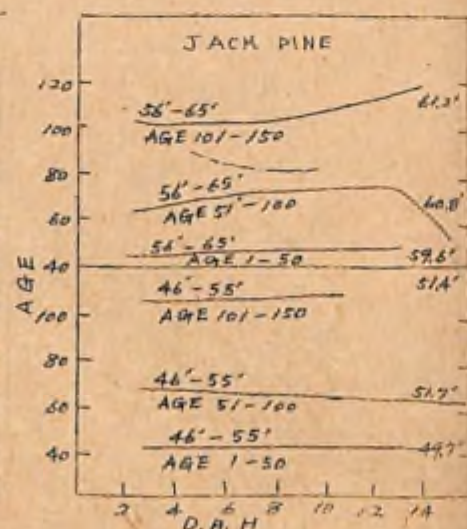


図 10.

Dwight の修正が使われた。

a) 整理法の平均値を用いて令級別に樹高級ごとに樹令対直径の曲線が描かれた。図9, 図10, 各樹高級の平均樹高は各曲線ごとに, グラフの右側に記入してある。

b) 図9, 図10, から樹令に対する値が読み取られ, 図9, 図10の右側に示されている, 平均樹高を用いて, 図11, 12, にプロットされる, したがって, 図11, 12は令級および各直径級ごとの樹令対樹高曲線である。

7. 図7, 8から各直径に対する形級が読み取られ, 図11, 12の曲線から樹令を読みとりながら図13にプロットする。

形級対樹令曲線は図13に示しているように, 10呎樹高間隔で描かれる。

8. 必要な樹令に対する形級は, 図13, の曲線から直接読みとることができ決定された令級ごとに表が調製される。

9. 直径に対する形級の曲線は最終的な表に対する平滑された値で表における令級別に各樹高級ごとに描かれた。

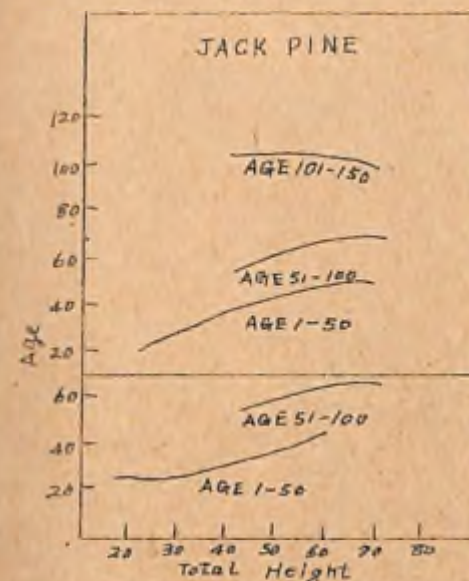


図 11.

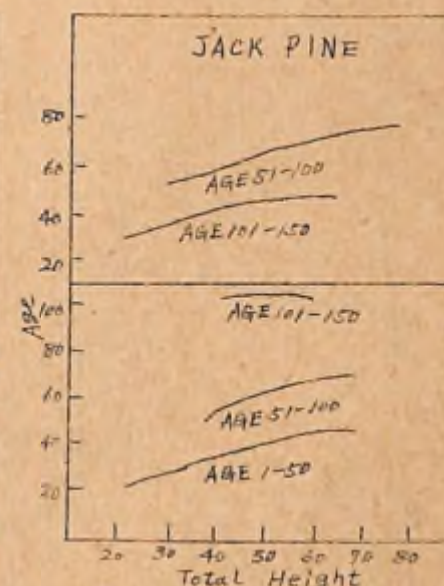


図 12.

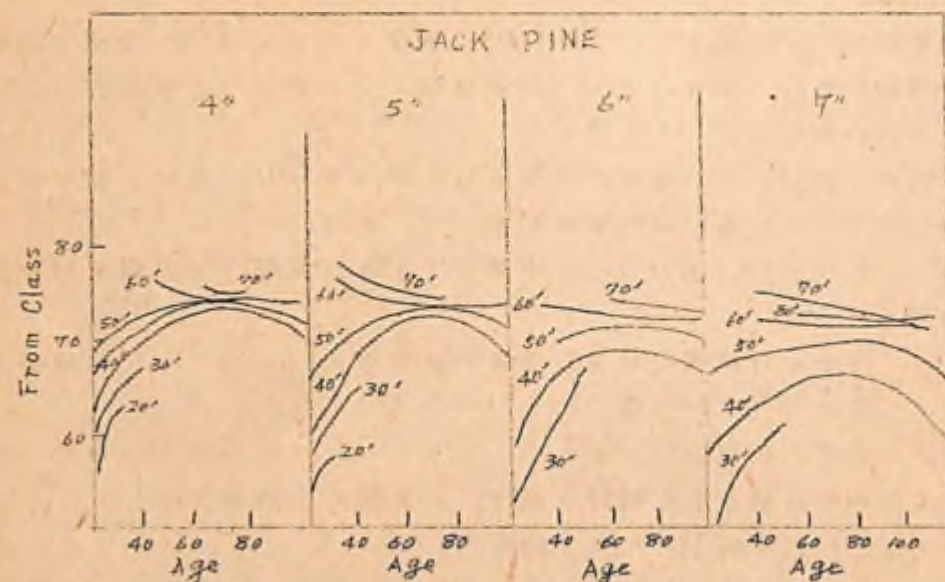


図 13.

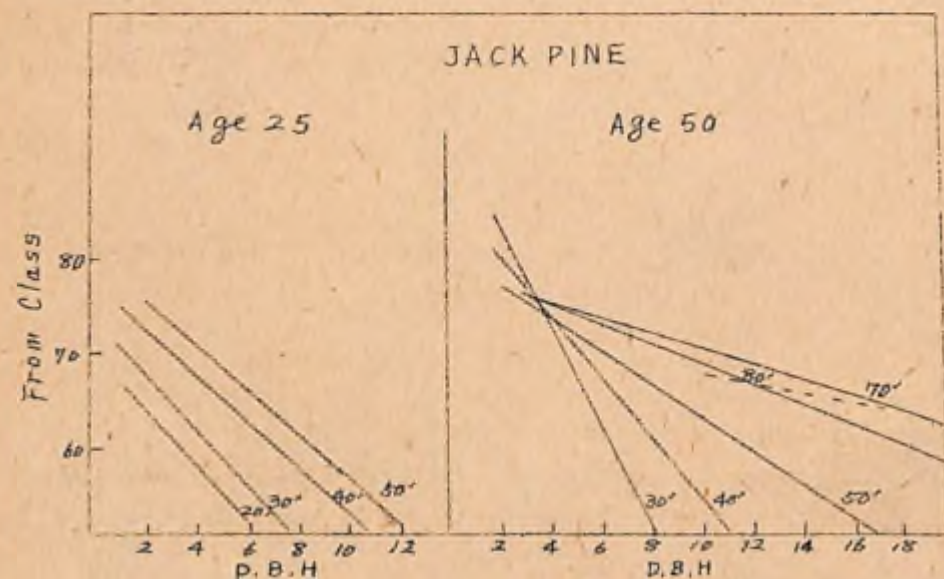


図 14

表の値(樹高に対しては補間されるが樹令および直径に対しては補間されない)は元のデータに対して吟味を行い、その代数的平均偏差が表ごとに示される。

このようにして Jack pine, white pine の表が調製された。この表は形級が直径、樹高、樹令とともに変ることを示している。

このような表を使えば一般的形級表からかなりの精度で地方的積算表を調製できる。ここで述べたような表を作製するにはどのようなセクションに対しても令級および大いさ級を置いて最少 300 本の測定値が必要である。このデータから各林分の樹高曲線をもつて地方的積算表を作製することが出来る。その方法を以下に示す。

地方的積算表の調製

地方的積算表は直径対樹高曲線を用いることができる。林分ごとに調製される必要ならぬ必要なデータは

- 樹種、令級、林相別の信頼できる直径対樹高曲線
- サンプリングされる林分ごとに査定された令級

次の例は 70 年生 White pine の地方的積算表でその計算過程は次のとおりである。

- 直径対樹高曲線から直径に対する樹高を読みとる、1 列 2 列に記入
- 表 1 の値を補間して与へられた直径、樹高、樹令の木の形級を定める 3 列に記入
- 直径級ごとに Dominion Forest Service 形級積算表から補間によって積算を決定する、4 列に記入
- 直径に対する積算がプロットされ不規則性を平滑化するため曲線が描かれ計算の偶然誤差に対して吟味される。5 列に記入

White pine

70 年生

Petawawa 林業試験場

D.B.H.	全樹高	形級	全積算	全積算(曲線より推定)
吋	呎		立方呎	立方呎
2	25	62	1.23	1.23
3	36	64	1.74	1.74
4	42	69	1.64	1.64
5	47	70	2.86	2.86

P.B.H. 吋	全樹高 呎	形 状	全材積 立方呎	全材積(曲線より推定) 立方呎
6	51	93	4.65	4.50
7	56	93	4.95	4.65
8	61	92	10.70	9.25
9	64	92	12.86	12.36
10	68	92	14.74	17.15
11	70	91	21.1	21.3
12	71	90	24.5	24.5
13	71	89	28.5	28.3
14	72	89	33.5	33.0
15	72	88	38.1	38.1
16	72	88	43.4	44.5

1.
形 状 の 決 定
White Pine
板

DBH 吋	2.5	5.0	7.5	10.0	12.5
1	20 30	20 30 40 50 60 70	20 30 40 50 60 70 80	50 60 70 80 90 100 110	
2	40 48	61 67 72			
3	60 66	59 65 70			
4	84 83	57 64 67 74 76	58 61		
5	52 60	55 62 68 73 75 76	54 59 66 74 75 75		
6	49 58	53 60 67 72 74 75	53 57 65 73 74 75		
7		51 64 65 71 73 74	55 62 72 74 74	74 75 75 75	76 77 78 79
8		57 64 70 71 73	55 62 72 74 74	73 75 76 78	
9		65 73 79 70 72	54 63 71 73 73 71	72 73 74 73	71 72 75 77
10		53 62 68 69 71	53 62 70 73 73 70	71 73 73 73	70 73 74 76
11		51 61 69 72 72 69	51 61 69 72 72 69	70 72 72 72	68 72 73 75
12		50 60 68 72 72 67	50 60 68 72 72 67	72 72 72	71 72 74 75
13		59 67 71 71 68	59 67 71 71 68	71 71 71	69 71 73 74
14		58 67 71 71 67	58 67 71 71 67	70 71 70	68 70 72 73
15		57 66 70 70 67	57 66 70 70 67	70 70 70	67 69 71 72 72
16		55 64 69 66	55 64 69 66	69 69 69	66 68 70 71 71
17		54 61 63 65	54 61 63 65	68 69 68	65 67 69 70 71
18		52 60 62 64	52 60 62 64	68 68 68	64 66 68 69 70
19		50 59 61 63	50 59 61 63	67 68 67	63 65 67 69 69
20		48 58 60 62	48 58 60 62	66 67 66	64 66 68 68
21		46 56 58 60	46 56 58 60	65 65 67 67	63 65 67 67 68
22		44 54 56 58	44 54 56 58	64 64 66 66	62 64 66 66 67
23		42 52 54 56	42 52 54 56	63 63 65 65	61 63 65 65 66
24		40 50 52 54	40 50 52 54	62 62 64 64	60 62 64 64 65
25		38 48 50 52	38 48 50 52	61 61 63 63	60 61 63 63 64
26		36 46 48 50	36 46 48 50	60 60 62 62	60 61 63 63 64
27		34 44 46 48	34 44 46 48	59 59 61 61	60 61 63 63 64
28		32 42 44 46	32 42 44 46	58 58 60 60	60 61 63 63 64
29		30 40 42 44	30 40 42 44	57 57 59 59	60 61 63 63 64
30		28 38 40 42	28 38 40 42	56 56 58 58	60 61 63 63 64

表 1 (続)
形 級 の 求 定
White Pine

D.B.H.	全 高 (尺)									
	150	100	90	80	70	60	50	40	30	20
8	71	76			75	75				
9	71	74	75	75	73	74				
10	64	72	73	74	72	73				
11	58	70	72	73	73	74				
12	68	70	72	73	74					
13	64	69	71	72	73	72				
14	64	68	70	71	73	72				
15	67	69	71	72	71					
16	65	68	70	72	71					
17	64	68	69	71	71					
18	63	67	68	71	70	67				
19	61	66	68	70	70	64				
20	60	65	67	70	70	62				
21	59	64	66	69	69	60				
22	63	63	69	69	67	57				
23	62	65	68	68	68	55				
24	61	65	67	68	68	52				
25	60	64	67	68	68	50				
26	59	63	66	67	67	48				
27	58	63	66	67	67	45				
28										
29										
30										

カナダ産全樹種に対する直径、樹高及び材令別の樹木及び材分の形級を示す。
Ontario の 6 地方及 New Brunswick の 5 地方ととられた 776 本のデータから得られたものである。
元のデータから代数平均偏差は -0.3 である。

表 2
形 級 の 求 定
Jack Pine

D.B.H.	全 高 (尺)					全 高 (尺)					全 高 (尺)				
	25	30	40	50	60	75	80	90	100	110	125	130	140	150	160
1	13	22	76			85	81	77	77						
2	15	19	72	76		80	78	75	75						
3	17	24	68	72		74	74	74	75						
4	56	61	65	70		68	70	72	74						
5	55	58	63	68		63	67	70	72	74					
6	52	55	60	67		58	63	68	71	73					
7		52	58	66		53	60	68	70	72					
8			56	65		49	54	65	69	71	69				
9			55	64		53	63	68	71	73	18				
10			53	64		50	61	67	70	72	18				
11			51	63			60	66	69	71	17				
12				52			58	65	68	71	17				
13							56	65	68	71	16				
14							54	64	67	71	16				
15							53	63	66	71	15				
16							51	62	66	71	15				
17								61	65	71	14				
18									60	64	70	14			
19									59	63	69	13			
20															
21															
22															
23															

D.B.H.	全 高 (尺)										全 高 (尺)									
	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
4	35	40	50	60	70	80	90	100	110	120	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
5	68	71	74	76	78	80	82	84	86	88	61	68	70	71	73					
6	64	69	72	73	75	77	79	81	83	85	60	67	70	71	72					
7	60	66	70	72	74	76	78	80	82	84	59	66	69	70	72	71				
8	57	64	68	71	73	75	77	79	81	83	57	64	67	70	72	70				
9	53	60	65	69	71	73	75	77	79	81	56	64	67	70	71	70	70			
10		55	62	67	69	71	73	75	77	79	54	63	66	69	70	70	69			
11			60	66	68	70	72	74	76	78	52	65	68	69	69	69	69			
12			58	65	67	69	71	73	75	77	51	64	68	69	68	68				
13			56	64	67	69	71	73	75	77	50	63	67	68	68	67	67			
14			55	64	66	68	70	72	74	76	49	62	66	67	67	67	66	66		
15			53	63	66	68	70	72	74	76	48	62	65	67	67	67	66	66	65	
16				61	65	68	70	72	74	76	47	61	65	66	66	66	66	65	65	
17				60	64	67	69	71	73	75	46	60	64	66	66	66	65	65	64	
18				59	64	67	69	71	73	75	45	59	63	65	65	65	65	64	64	
19				58	63	66	68	70	72	74	44	58	63	65	64	64	64	63	63	
20											43	62	64	64	64	64	63	63	62	
21												63	62	62	62	62	62	62	61	
22																				
23																				

カナダ産全樹種に対する直径、樹高、樹令別の樹木及び材分の形級を示す。
表は Ontario の 6 地方及び Manitoba の 4 地方でとられた 1109 本に基づいている。
原資料からの代数平均偏差は -0.07 である。

第7章 共線図表法による材積表の調製

第1節 ま え が き

共線図表、すなわち統計の多くの分野でよく知られているノモグラフは方程式を表わす有効な方法を与える。これは1917年 Bruce によりグラフ化の手段として、また1931年 Bruce と Reineck により、重相関方程式の曲線化の修正手段として林学に取り入れられたものである。しかし、彼等は重相関方程式に対する一般的方法で作られた材積表は、別の一種有効な方法で作られた表の精度の半分の正確さしか持たないことを発見し、その翌年(1932年 Bruce と Reineck) 基本共線図表を使う 特殊な方法を提示した。

立方呎材積表では基本共線図表は d, b, h, 樹高にそれぞれ等しい直径、高さを持つ円筒体積の $\frac{1}{4}$ の容積を与える。すなわち、基本共線図表は樹高係数が 0.4 の時の材積に修正されたものである。

ボード呎材積表の場合には、拋物線体、円錐体のような幾何学的立体のボード呎単位の中積に基いている時には、常に 実際のデータで図の値を検討し、推定値を良くするため、これ以上修正の必要がないと思われるところまで逐次近似法で図の軸は修正される。

共線図表法は材積表調製方法としてかなり広く使われている。この方法では、測樹学的制約を大して必要とせず、充分満足ゆく結果が得られる。欠点も二、三ある。第一に、余り使うことのない調製済の基本図を必要とし、さらに図は余り正確には読み取れないし、グラフの次元の変化のため誤差を生じやすい。

逐次近似法は三つの軸が互に修正される時、通刺に修正されるのを避けるため 相当主観的判断が入り、その結果、最後に得られた曲線は理論的な型となるであろう。最後に得られた材積表は最終的吟味をするためプロットする必要がある。材積が各樹高級別に d, b, h, に対してプロットされ、次いで各直径級別に樹高に対してプロットされれば、明瞭な偏倚を修正し得る。

基本図を使わぬようにするため、Dewitt と McIntyre (1932) は Bruce と Reineck の共線図表の修正法を提 案した。樹高軸、直径軸はそれぞれ対数方眼紙に樹高、直径に対して材積をプロットすることで

目盛がつけられる。このようにして樹高に対する材積(或いは直径に対する材積)の足掛けの回帰が樹高軸(直径軸)の目盛をつけるのに使われる。

統計的に修正するには、樹高(直径)に対する材積の値の回帰を使うねばならない。

共線図表はあらゆる材積方程式の検定並びに曲線的傾向を結ぶつけるのに利用できる。

かくて対数方程式は最小二乗法で解かれ、方程式は共線図表で表わされ、各変量について曲線性が検討される。このようにすれば、図の軸は修正されて、最後にでき上る材積表は元の方程式からではなく、直接図から読みとって調製される。

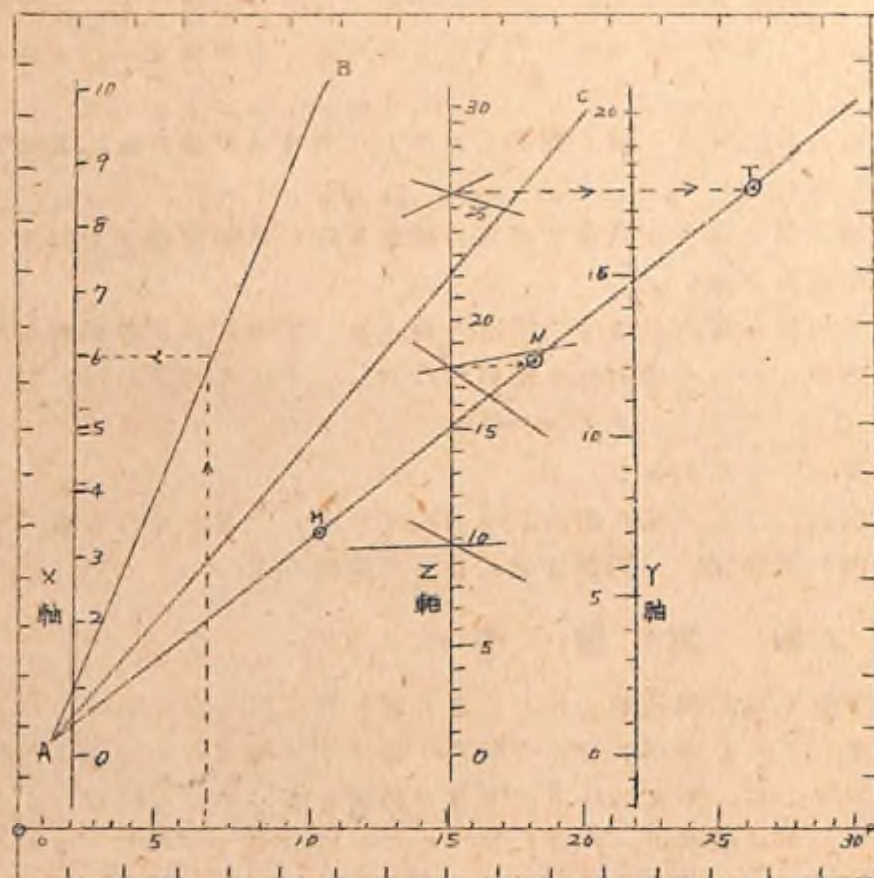
共線図表による材積表調製方法を述べる前に、基本となる図、すなわち加算図と積算図の 調製方法について説明しよう。

第2節 加 算 図

数学方程式は共線図表で表わせる。最も簡単な方程式は二つの量の和、すなわち、 $x + y = z$ の型の方程式である。共線図表でこのような方程式を表わすには、加えられる x と y の範囲を知っておかねばならない。すなわち、 x の値は 0~10 または 5~50, y は 5~50, または 9~46 であるということである。例えば、 x が 0~10, y が 0~20 まで変化し、両者の目盛が共線図表で略同じ長さであることが望まれているとする。調製は次の順序で行う。

1. 方眼紙の一番下に 0~30 まで等間隔 の目盛をつけた OP を引く (x と y の最小値の和から最大値の和に至るもの)。
2. 図の左端に x に対する垂直軸を設け、その上に任意の最大値と最小値、すなわち 10 と 0 の位置を定め、図の右端で y について同じようなことを行う。
3. OP の O 点で x 軸の O と水平の位置にある A を見つける。

同様に B は OP 上の 10 と x 軸上の 10 との交点である。二点 A, B を直線で結ぶ。これが目盛直線または“目盛曲線”であつて、 x 軸の中間の値は 1 図の値 6 で示してあるように、目盛 OP で与えられた x の値から AB まで垂直に、次いで x 軸まで平行に読みとることで求めらる。



違った尺度の独立変数の加算図

図 7.1

4. Y軸に対する目盛曲線は同様な方法で作られY軸が目盛られる。
 5. Z軸の位置は交叉法で決められる。2箇でされば、3箇のZの値—
 この場合には10, 18, 26—が選ばれ、Zの値に対する二組の、X, Y
 の値が決のように計算される。

X	Y	Z
6	4	10
3	7	10
10	8	18
5	13	18
10	16	26
8	20	26

直線定規で一組のXとYの値を結び、図の中央部近くに置く線を引き
 同じZの値となるオニの組を同じように結び、最初の線と交わるよう
 に置く線を描く。この交点の位置に、相当するZの値を記入する。別
 の2箇のZの値について この方法を繰り返す。最後に 3つの交点を
 通る線が引かれる。

6. Z軸はX, Y軸を目盛ったのと同じ方法で目盛曲線(MNT)により目盛がつけ
 られる。点MはZ=10とOP上の10の交点、NはZ=18とOP上の
 18の交点、Tも同様である。
 7. この図は直ぐ使へる。目盛の範囲内にあるXとYとどのような組合
 せに対するZの値も、直線定規でこの組合せを結び、Z軸との交点を
 読み取ることで求められる。

変数が2つの時にはいつでも二変数の和として取扱われる。例えば
 方程式が $X-Y=Z$ のように引算を含んでいる時には、この式を $X+(-Y)=Z$ とすることが出来る。こゝで(-Y)はY軸の目盛がZ軸
 と逆、すなわち上向の代りに下向につけられていることを意味する。

調製方法は上記と同じである。

一般の直線式すなわち加算方程式 $aX + bY = Z$ の場合にはちよつと
 複雑になるが、手順は前とはほぼ同じである。すなわち、必要されるZの
 交点の計算はZを見出す前にZの値にaを乗じ、Yにbを乗ずる計算が
 先介に加わってくる。

方程式が $aX + bX + cY = Z$ のように3箇の独立変数と、1箇の従
 属変数を持っている時には軸交換によつて二段に分けて行われる。

方程式は二つの独立変数の方程式になるように変換する。例えば $aX + bX = T$ (E.E.し、 $T = Z - cY$) のように変換する。 $aX + bX = T$ の図が一般的方法で調整される。
 Tは交点を結ぶことで定められる交換軸である。全体にわたつて目盛をつける必要はないが、また
 は3箇の選ばれた交点は残しておくのは好ましい。

オノ段階が終了すれば $T = Z - cY$ 、すなわち、 $T + cY = Z$ という新し
 い方程式を取扱う。

前のTはそのまゝにしておいて、新たにY軸を設け、両者の間に交点
 をZ軸を定め、目盛をつける。図を読みとる際にはZとYの値を直線定
 規で結び、T軸と交わる点を探し、その点を通して必要とされるYの値
 を通るよう定規を移す。Z軸との交点がZの値を与える。

第3節 積算図表

積算方程式の最も簡単な形は $xy = z$ で表わされる。対数を使えばこれを加算方程式の形に変換できる $\log x + \log y = z$

この方程式の計算図表の作成は、軸が対数で目盛られ、軸上には対数のとられた算数が記入してあることを除いて、簡単な加算図の時と全く同じである。

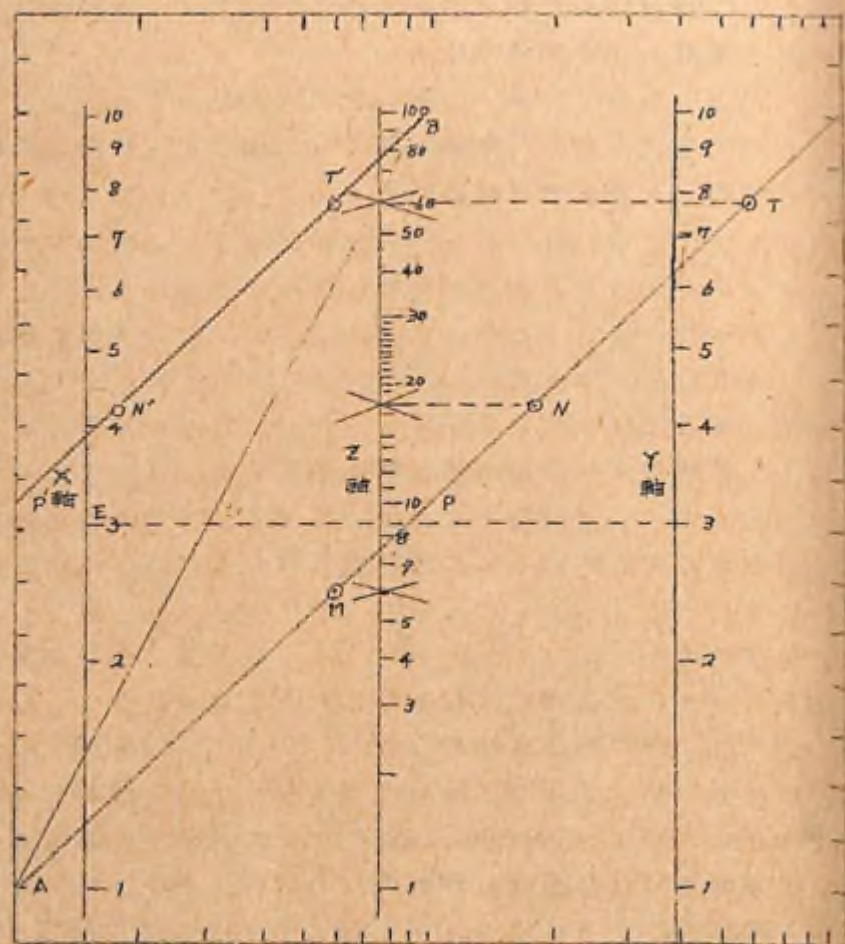


図 7.2 積算共線図表

積算図表を作る時にはまず軸の長さが仮定される。例えば軸の長さを10とすると、1と10に対する目盛はそれぞれ対数に8を乗じて10単位で決められる。相連続する目盛の距離は次に示すようなものとなる。

目盛	対数	軸の下端からの距離 mm
1	0.0000	0.0000
2	0.3010	2.4080
3	0.4771	3.8168
4	0.6021	4.8168
5	0.6990	5.5920
6	0.7782	6.2256
7	0.8451	6.7608
8	0.9031	7.2248
9	0.9542	7.6336
10	1.0000	8.0000

このようにしてX, Y軸が定められ注意して目盛がつけられれば、これは軸上に記入された値の対数を加え合わせるための簡単な加算図となる。これ以外の調製方法は前に説明したものと同じである。すなわち、Z軸は一定のX, Yの値の交点とこの軸上の目盛を決めるための交点を繰返し求めることで定められる。

最初から対数方眼紙を使えば比較的簡単な方法で同一結果が得られる。次の例では半対数方眼紙が使っている。

この方眼紙では目盛をつけるためのスケール線を横軸にとった。XとYの値はいずれも1〜10まで変化しているので、ABのような線が引かれる。ここでAはスケールの最小値1、Bは最大値10に対して定めたものである。

さて任意の間隔でX, Y軸を定め、ABを目盛線として使って目盛をつける。

次に6, 18, 60のような3つ以上のZの値を仮定してZ軸を定める。Zの値を求めるため、組になったXとYの値を計算する。この例では次のようなXとYの組が使われた。

X	Y	Z
3	2	6
2	3	6
6	3	18
3	6	18
10	6	60
6	10	60

三軸上の6, 12, 60の既知の位置から、M, N, TがスケールOP上にプロットされこれを通してZ軸目盛曲線(直線AC)が引かれる。

必要ならば目盛曲線を使って単位より小さい目盛を軸上に定めることもできる。

このようにすれば計算尺と同じような正確さで1/10×3.2、或いは1/10×32のような計算を行うことができる。

第4節 伐積表の調製(米国山林局法)

第1項 基本共線図表の作製

伐積表調製に共線図表を直接応用するには円筒形に対する計算図表が修正して使われる。

立方呎単位の円筒形伐積の公式は $V = BL$ で、これを直径で表わせれば $V = D^2(0.005454)L$ となる。両辺の対数をとれば

$$\log V = 2 \log D + \log(0.005454L)$$

となる。

計算図表の時と同じ法則を使えば円筒形に対する共線図表を作ることができる。しかしながら、樹木は決して円筒形をしていないのでこれを直接行うことはできない。伐積は次式でうまく表わされる。

$$V = 0.005454 D^2 H F$$

Fは円筒形数

すべての樹木が同じ形数を持っておれば共線図表は簡単に調製できるが、形数は普通、樹種、樹冠、立地条件、その他の因子により約0.300から約0.500まで変化している(平均して0.40)のでこのようなことはあり得ない。

平均形数0.40をオノ次の近似値として選が上式に代入すれば、

$$V = 0.005454 D^2 H (0.40) = 0.0021816 D^2 H \quad \text{すなわち、}$$

$$\log V = 2 \log D + \log 0.0021816 H$$

次図はこの修正された円筒形方程式によってU.S.山林局が作製した「基本図」である。

この基本図では10×200の方眼紙が使われ、直径は1~60吋、樹高は10~200呎まで目盛つてある。方眼紙は半対数方眼紙、すなわち一方は対数(この場合には)で他方は算用数字で目盛つてあるものである。

比較をした後、

伐積に一致する様に軸の目盛を修正するため各軸のそばには狭い余白が残してある。

d, b, h, 樹高および伐積の目盛曲線は横で軸の再目盛を簡単にするための図上に示してある。

完全な円筒形に計算する伐積目盛曲線が点線を描かれこれを V_c とする。 V_{mc} は修正円筒形目盛曲線、すなわち円筒形の体積を0.4倍したものである。直径、樹高目盛曲線を夫々 D_c 、 H_c とする。

次の段階は他の伐積表調製方法で行われるのと全く同じく、標本木を直径・樹高別に分類することである。

しかし、この場

合には各単木測定値は表21のオノ列に記入してあるようにする。あとで図から読みとつた伐積を記入するため、実伐積の右にさらに4つの列が設けてある。上段に記入されている木は正確面にわたるred spruceの標本の内で二つの個体、樹高別に含まれているものである。

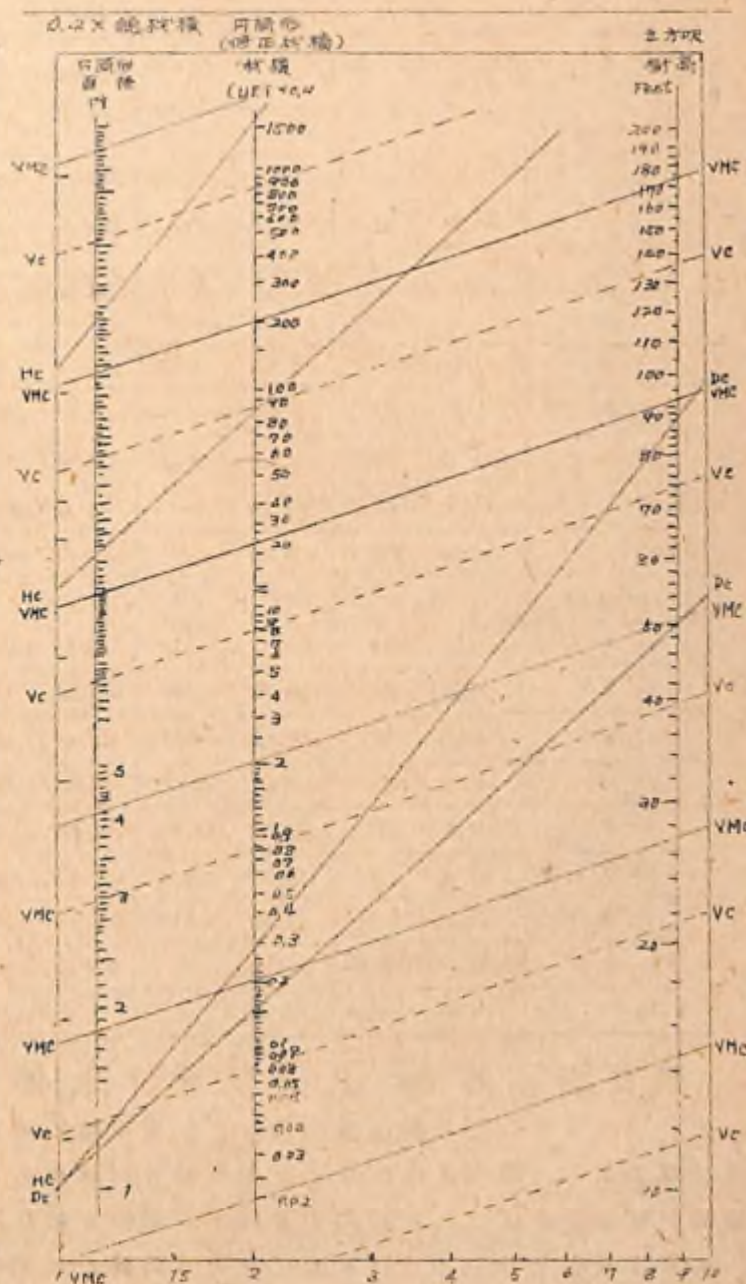


図 7.3 U.S.山林局で使われている修正円筒形共線図表

表7.1 共線図表法による材積表調製のための資料取扱め表

樹木番号 (1)	Dbh (2)	樹高 (3)	実材積 (4)	オ1次 推定材積 (5)	オ2次 推定材積 (6)	オ3次 推定材積 (7)	オ4次 推定材積 (8)	最終推定 値の偏差 (9)
12時40分級:	cm	m	立方尺	立方尺	立方尺	立方尺	立方尺	%
6.2	11.8	60	19.84	18.00	20.00	19.90	20.00	0.8
6.0	11.7	55.5	18.46	16.38	18.50	18.00	18.50	6.2
5.9	12.5	57.5	20.85	19.50	21.20	21.00	21.05	1.0
7.2	12.3	60.5	20.12	20.00	22.00	21.65	22.00	8.5
7.7	11.7	61	18.92	18.00	20.00	19.85	20.00	5.4
7.8	11.8	61	19.08	18.25	20.50	20.00	20.50	7.3
8.2	12.4	58	20.82	19.15	21.30	20.70	21.10	0.9
計	84.2	413.5	138.64	—	144.60	141.10	143.05	24.1
平均	12.03	49.1	19.42	—	20.66	20.16	20.43	3.4
12時80分級:								
10.9	11.6	70	24.32	20.35	22.50	23.00	23.30	6.4
10.8	11.8	70	26.28	21.00	23.50	23.60	24.00	9.1
11.6	12.3	73	28.84	24.10	24.50	26.70	27.20	6.1
11.7	11.6	73	25.08	21.45	23.80	24.20	24.50	2.4
11.5	11.8	69	23.88	20.90	23.00	23.30	23.60	1.1
12.1	12.3	69	23.29	22.30	25.00	24.85	25.40	8.3
12.8	12.5	67	30.94	22.40	25.00	24.85	25.20	23.0
計	83.9	491	183.13	—	168.80	170.10	173.20	66.3
平均	12.0	70.1	26.16	—	24.11	24.30	24.74	8.04

第2項 共線図表のオ1次修正

オ1項で作られた共線図表を使って、実材積と修正された円筒材積とを比較できる。実際のd.b.h.と全樹高をそれぞれのスケール上で見つけ、直線定規を使えばこれに対応する図上材積が求められる。

60尺の樹高を持つ11.8寸の木に相当する修正円筒形の材積は18.00であることがわかり、オ1次推定値として表7.1のオ5列に記入する。

この方法は各標本木について行われ、オ1次推定値はd.b.h. - 樹高の組ごとに平均する。樹木が0.4という形数をもっていることは期待できないので、図面一回で修正された値を与えるであろうとは考えられない。

しかしオ1次推定値に基づいて正確な読みが得られるように材積軸を目盛しなおすことができる。このため面対数方眼紙に実材積の級平均を縦軸、対応するオ1次推定値の級平均を横軸としてプロットする。

推定材積を横軸にとつたのは修正円筒形の共線図表のスケールを目盛しなおすためであり、このため推定材積を基礎の値、すなわち独立変量一方実材積を仮に従属変量と考える。各標本の値をプロットすることは可能であるが、後の段階で何人の利益ともならない多数の点を生ずることになるであろう。これを補う方法として小さい木については1へ2立方尺から出発するが、大きさが増すにつれて5へ10立方尺以上の点から出発する推定材積別に標本を分類する。

図7.4にプロットした点は、伐倒した木の材積を立方尺単位で測定した607本のred spruce から得られたオ1次推定値から換算の方法で作られたものである。

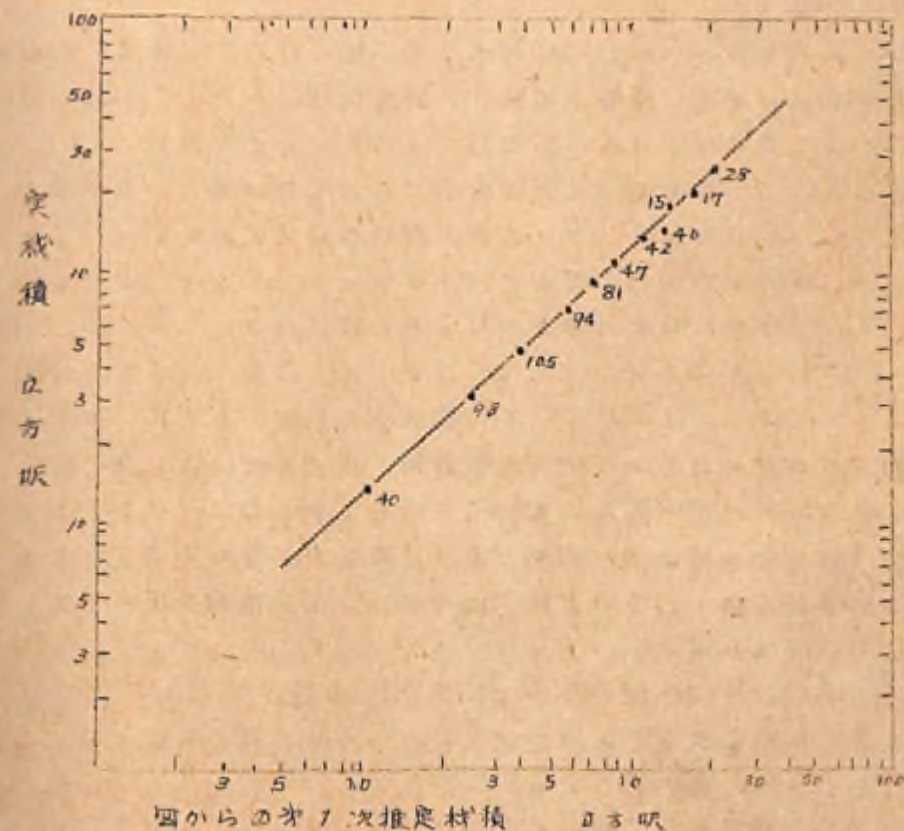


図7.4

曲線—この場合には直線—をプロットした点に適合させる。

この線が 1, 1; 10, 10; 100, 100 の点を通る 45° の線をしておれば、図の目盛は修正されていると理論的に仮定できる。各直径級の本はすべて 0.40 という形数をもっているものと仮定してあるので、現実には曲線がこのような性質をもっていることは、たとえあつたとしてもきわめて稀である。

図 7.4 の適合せしめられた点是指定された点の上側を回っている。換言すれば実伐積は平均して推定伐積より大きく、したがって、平均形数は仮定された 0.40 より大きい。

曲線も、平均形数が直径級に従って一様に変化していることを示す正確に 45° の傾をしていない。この例では傾は 45° より幾分小さく、形数が木の大きさに従って僅かに小さくなっていることを示している。

直合させた曲線の形は直線である必要はなく、上端では、下向の曲線となることが多い。

このことは同令林分からとられた木でよく見られる。このような林分では最大の木はおそらく優勢木であり、強大な樹冠を持ち、かなり摘観となっている。完満な木は狭小な樹冠をもつものと小型に多い。

図 7.4 は平均して実伐積 1 立方呎の木は 0.8 立方呎、10 立方呎は、8.7 立方呎、30 立方呎は 27 立方呎の伐積であると推定されたことを示している。図の目盛を付けなおせば、すなわち 0.8 を 1、8.7 を 10、27 を 30、とすれば伐積は修正されて読み取られることになるであろう。このようにことは実際に行われている。点の数値を読み取り、図 7.5 のように V_d という線によって目盛曲線の基礎としてプロットする。

この曲線は伐積軸の左側の余白で伐積軸を再目盛するのに使う。

ここまでの段階で図作製の作業が完成することが多いけれど、時には直径或いは樹高軸が不適當な間隔であつて修正の必要があることもある。

修正の必要性を調べるため目盛のつけ替はれた伐積軸を使って才二次推定値を図から読み取る。

第 3 項 共線図表の才二次修正

才二次推定伐積を読みとり、前記の表 7.1 の才と列の対応する木の所に記入する。

まず、それを直径級別に集計して平均する。

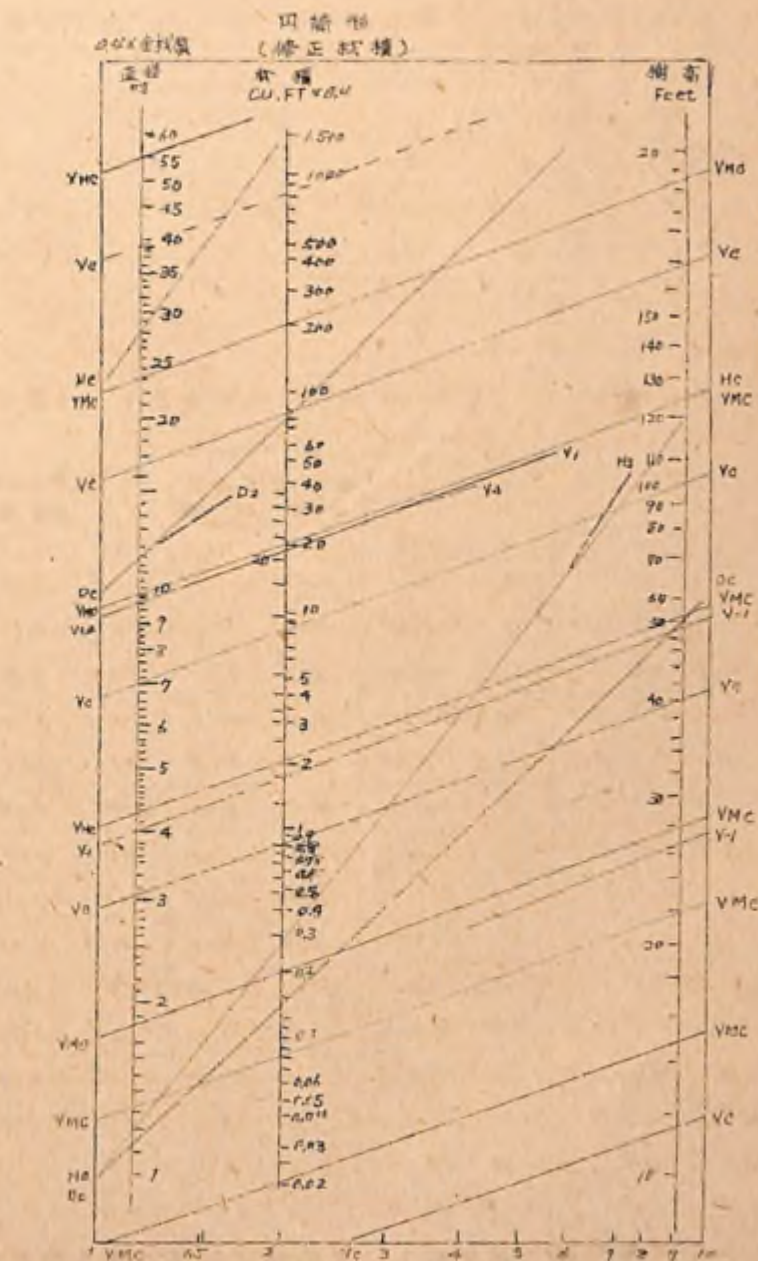


図 7.5 同令林分 × 0.4 より換算された Red Spruce の伐積の共線図表

(表 7.2, 7.3)

表 7.2 樹高と組合せた d, b, h 級別のグルー7"

直径級	樹高級	本数	d, b, h 計	実伐積計	二次推定伐積計
吋 (1)	呎 (2)	本 (3)	吋 (4)	立方呎 (5)	立方呎 (6)
5	20	9	47.7	13.57	4.27
5	30	13	54.2	29.74	28.18
5	40	38	195.1	109.10	116.70
5	50	7	36.4	25.88	24.41
計	--	67	343.6	178.29	173.57
平均	--	--	5.1	2.66	2.59

表 7.3 d, b, h 級別 実伐積と二次推定伐積の平均値

直径級	平均樹高	平均実伐積	平均二次推定伐積	本数	新しい目盛間隔
吋 (1)	吋 (2)	立方呎 (3)	立方呎 (4)	本 (5)	吋 (6)
3	3.24	0.93	0.89	7	3.32
4	4.10	1.47	1.43	28	4.13
5	5.10	2.66	2.57	67	5.18
6	6.10	4.11	4.02	78	6.17
7	7.00	6.04	5.94	109	7.02
8	8.00	8.11	8.16	103	7.98
9	9.00	11.01	10.95	84	9.03
10	10.00	13.47	13.71	52	9.87
11	11.00	15.88	16.40	41	10.88
12	12.00	21.01	20.97	19	12.00
13	13.00	21.50	22.92	11	12.52
14	14.20	23.73	23.95	4	13.00
15	15.10	26.41	30.70	3	13.92
16	15.70	31.18	35.00	1	14.95

次いで樹高級で再分類し、実伐積と推定伐積を樹高級別に集計し平均する。

(表 7.4, 7.5)

表 7.4 d, b, h と組合せた樹高級別グルー7"

樹高級	直径級	本数	樹高	実伐積	二次推定伐積
呎 (1)	吋 (2)	本 (3)	呎 (4)	立方呎 (5)	立方呎 (6)
20	3	1	24.5	0.57	0.50
20	4	7	140.0	6.39	6.27
20	5	9	187.5	13.57	14.27
20	6	4	93.0	8.84	9.39
計	--	21	445.0	29.37	30.44
平均	--	--	21.2	1.40	1.45

(表 7.5 樹高級別 実伐積と二次推定伐積の平均値

樹高級	平均樹高	平均実伐積	平均二次推定伐積	本数	新しい目盛間隔
呎 (1)	呎 (2)	立方呎 (3)	立方呎 (4)	本 (5)	呎 (6)
20	21.20	1.40	1.45	21	20.6
30	32.60	2.88	2.36	37	33.0
40	41.00	4.97	5.04	196	40.7
50	49.30	8.97	9.07	217	50.3
60	59.20	14.54	14.45	113	59.8
70	72.90	22.21	19.16	23	77.3

意し、横軸に実直径、縦軸に新しい目盛間隔を同じ尺度でとる。オ2列の値に対応するオ6列の値をプロットし、この点を直つて平滑な曲線を引く。

各実直径に対応する新しい目盛間隔を曲線から読みとつて直径軸を再目盛する。

図から目盛曲線をプロットするのに必要な値を読みとることができ、普通の方法で軸を再目盛する。

図 7.5 の D₂ という曲線はこの新しい目盛曲線である。特にこの場合には オ7の6列の曲線が3吋〜約10.5吋まで直線となっていることに注意せよ。10.5吋以上では下降している。このことは10.5吋以上を除

表 7.2 は例として引用した。

607本の Red spruce の 5吋直径級を集めたものであり、表 7.3 は直径級全体についての平均値を表す。

今直径軸を吟味するため、オ二次推定値の平均値(オ4列)で示される点で伐積軸と交わるように直線定規を級の平均直径(オ2列)の上におく。定規をこの位置に保てば、樹高軸上の交点が導かれる。針か細い鉛筆で樹高軸の交点をおさえ、定規がオ3列の平均実伐積で示されている値で伐積軸を切るようにこの点を軸として定規を回転させる。直径軸で新たに直径が読みとられ、"新しい目盛間隔"としてオ6列に記入する。これを各直径級について繰返す。

別に普通目盛の方眼紙を用

いて目盛しなおす必要のないことを意味している。

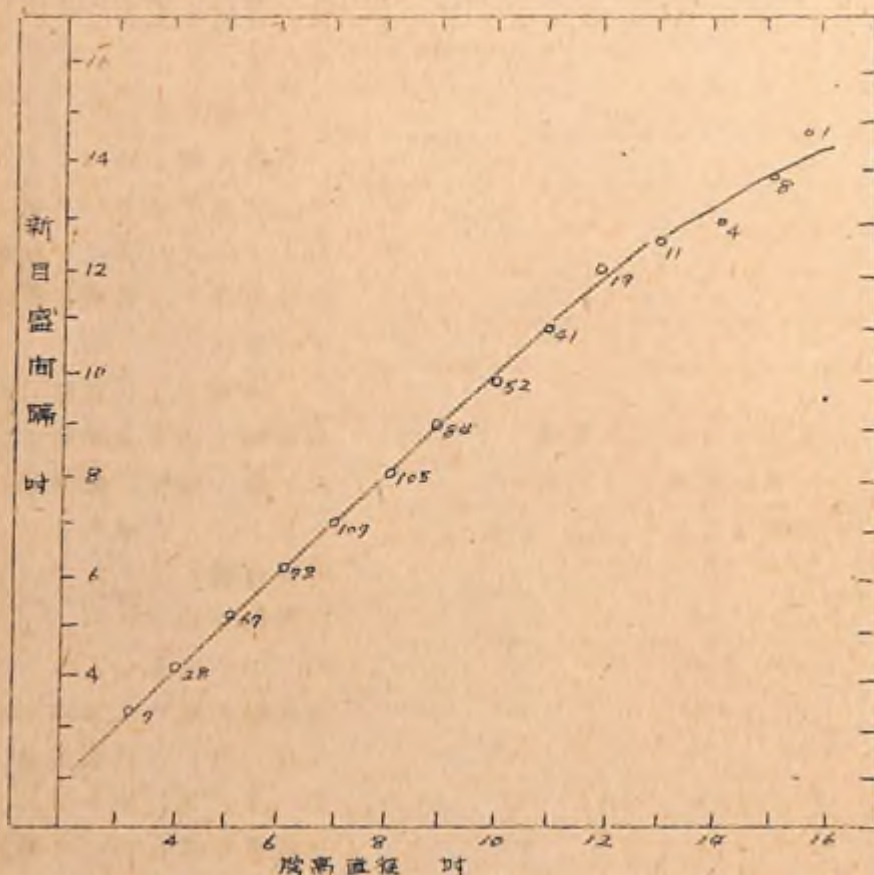


図 7.6 d.b.h 軸を再目盛する基礎

第 4 項 共線図表の 3 次修正

次に同じような方法で樹高軸を吟味しなければならない。20 呎級について行った表 7.4 のように直径識別に始められる。

樹高、実材積、3 次推定材積を樹高級毎に合計しその平均を求める。表 7.5 は 60 ク本の red spruce の平均値を集めたものである。

新しい目盛間隔は直径軸の時と同じ方法で求められる。すなわち、樹高軸の平均樹高点を置つて 3 次推定平均材積 (オタ列) で示される値で中心軸と交わるようにおく。直径軸との交点を固定して平均実材積 (オヨ列) で材積軸と交わるまで定規を回転させる。

定規が樹高軸を切る点から新しい目盛間隔を読みとり、オタ列に記入する。

d.b.h の資料について行ったのと同じく同様に普通目盛の断面に実樹高に対する新樹高をプロットする。その結果として得られた曲線が縦軸と横軸の等しい値を画する 45° の直線であれば、図の樹高軸は直径軸の場合と同じように厳密に修正しなければならない。図 7.7 はこの値に基づく樹高のグラフである。この図から 60 呎以下では 45° の線をしていることがわかる。これは 60 呎以上だけについて再目盛の必要のあることを意味している。図 7.5 の線 M₂ はこれに相当する目盛曲線である。

d.b.h 軸と樹高軸の再目盛の効果を定めるため材積の 3 次推定値を読みとる。d.b.h 軸は 10.5 吋以上、樹高軸は 60 呎以上だけが再目盛されているのであるから、この d.b.h 樹高 44 呎の木の 3 次推定値

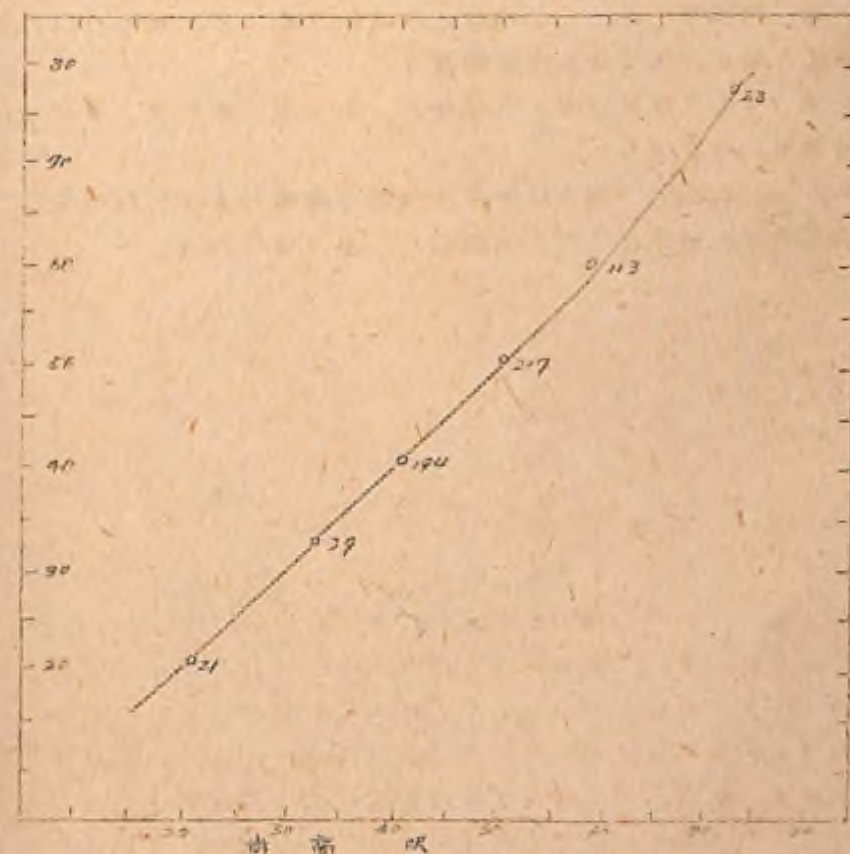


図 7.7 樹高軸を再目盛する基礎

はオ3次推定値と等しくなるであろう。したがって繰返して行う必要はない。

オ3次推定値は表1、オ7列に記入し、オ1次推定値と同様に合計と平均値と同様に合計と平均値を求める。

第5項 共線図表の完成

オ1次推定値の時と同様に再対数方眼紙にプロットすることでオ3次推定値の平均と実材積とを比較する。直径軸と樹高軸の目盛が相当交つておれば一度材積軸を目盛しなおす必要がある。*red spruce* の例ではプロットされた点は相等的な縦軸と横軸を画っていないので材積軸を再目盛した。

材積軸が目盛しなおされるので、オ4次推定値を求め、前と同様に、*b, b* 軸、樹高軸について二回目の検定をする。どの軸についてもこれ以上修正の必要がなくなるまで繰返す。

オ4次、オ6次推定はオ2次推定に、オ3次、オ5次、オ7次推定はオ1次推定に相当する。

red spruce の例ではオ4次推定で確実なものとなった。共線図表から読みとられた材積表を、表7.6に示す。

表7.6 Northeast の *red spruce* の材積表
(Mc Glade & Pomeroy)

D. b. 吋	20	全 30 材	樹 40 積	高 50 立	吹 60 方 呎	70	本 数
3	0.50	0.73	0.94	1.20			7
4	0.85	1.30	1.70	2.10	2.48		28
5	1.35	1.97	2.62	3.28	3.88		67
6	1.94	2.89	3.80	4.70	5.49		78
7	2.63	3.90	5.04	6.38	7.50	8.95	109
8		4.97	6.60	8.18	9.65	11.50	103
9		6.25	8.20	10.10	12.00	13.70	84
10		7.60	10.00	12.40	14.70	17.60	52
11		9.20	12.00	14.80	17.70	21.00	41
12			13.70	16.90	20.20	24.70	19
13			15.60	19.40	23.60	28.00	11
14			17.50	22.00	26.50	31.70	4
15				24.00	29.00	34.00	3
16				25.00	30.10	36.00	1
本 数	21	39	194	217	113	23	

データはマサチューセッツ州 Amherst の東北林業試験場が New England で蒐集したものである。本表は元のデータの範囲を示す。材積は地上1呎以上の全樹幹に対するものである。

表は共線図表法で調整されたものである。

累積偏差は表では0.47%高く、平均偏差は±6.29%である。

修正円筒板 — この例では円筒板材積メーターに基づく基本図が使われるが、抱筒板体、或いは円筒体の体積も上手に使うことができるし、また使われてもよい。しかし、新しい技巧は全然含まれておらず、方法は前述のものと全く同じである。

オ6項 精度の検定

オノ章オ3節で説明した方法で精度を吟味する。

附録1 マトリックス(行列)

1.1 はしがき

1.2 マトリックスの定義

$$\begin{bmatrix} 5 & 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 12 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

矩形行列 次数 (m, n)

正方行列 (m = n)

$$(1,3) \text{ 次: } \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}, (3,2) \text{ 次: } \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$2 \text{ 次: } \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, 3 \text{ 次: } \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

1.3 行と列

要素(元) a_{ij} ($i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,n$)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m,n-1} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

行と列の区別

オ i 行の要素は $a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in}$

オ j 列の要素 $a_{j1} \quad a_{j2} \quad \dots \quad a_{jn}$

行列式では

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 17$$

マトリックスでは

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

1.4 転置行列

$A \rightarrow A'$ A の行と列を入れかえたもの

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A = [a_{ij}] \quad A' = [a_{ji}]$$

$$(i) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1.5 対角行列

正方行列で対角線上の要素以外はすべて0の行列。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{例} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

対角行列の対角要素が1のものを単位行列。

I_n または E_n

$$I_1 = [1] \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

必ず正方行列であること。

1.6 対称行列

正方行列で対角線を軸として対称要素が相等しいもの、対称行列の転置行列はもとのものと等しい。

$$\text{例} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

逆対称行列 $A' = -A$

$$\text{例} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

1.7 零行列

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.1 行列の理論

2.2 行列の相等

定義：二つの行列 $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ があって、両者の次数が等しく、すべての相対応する要素が等しいとき、すなわち

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (2.1)$$

のとき A と B とは相等しいといひ、 $A = B$ で示す。

行列式では、要素や次数がどうあろうと、その数値が等しければ相等しい。例えは

$$\begin{vmatrix} 11 & 26 \\ -4 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

行列では

$$\begin{bmatrix} 11 & 26 \\ -4 & -9 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

(m, n) 次の二つの行列 $X = [x_{ij}]$, $A = [a_{ij}]$ があって、 $X = A$ であれば $x_{ij} = a_{ij}$ である。この関係は各要素について成立つから、 m, n 箇のこのような連立一次方程式が出てくる。並に m, n 箇の連立一次方程式は、一箇の式 $X = A$ によって完全に表現できる。

例. $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, $x_3 = a_3$, $x_4 = a_4$ をマトリックスで示せ

解 $X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]$, $A = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4]$ とすると $X = A$

$$\text{又は} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \quad \text{とすると} \\ X = A$$

2.3 行列の加法

定義 次数の等しい二つの行列 $A = [a_{ij}]$ と $B = [b_{ij}]$ があるとき

$$C_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (2)$$

を要素とする行列 $C = [C_{ij}]$ を A, B の和といひ $C = A + B$ であらわす。

$C = A + B = B + A$ (交換法則)

例1 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} =$

例2 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 7 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix} =$

例3 $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} =$

例4 n を正の整数とすると

$$n[a_{ij}] = [na_{ij}]$$

なることを示せ。

解 $n[a_{ij}] = \underbrace{[a_{ij}] + [a_{ij}] + \cdots + [a_{ij}]}_n = [na_{ij}]$

例5 n を正の整数とすると

$$\frac{1}{n}[a_{ij}] = [\frac{1}{n}a_{ij}]$$

なることを示せ。

解 $n[\frac{1}{n}a_{ij}] = [\frac{1}{n}a_{ij}] + \cdots + [\frac{1}{n}a_{ij}] = [a_{ij}]$

$$\therefore [\frac{1}{n}a_{ij}] = \frac{1}{n}[a_{ij}]$$

例6 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix} =$

2.4 行列の減法

加法において符号を反対にしと考えるとよい。

次数の等しい二つの行列 $A = [a_{ij}]$ と $B = [b_{ij}]$ があると

き

$$d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

を要素とする行列 $D = [d_{ij}]$ を A, B の差 といひ $D = A - B$ で示す。

例 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} =$

2.5 行列の倍法 (スカラー乗法)

スカラー乗法 l を任意の数としたとき、行列 A を l 倍したものは、その要素を l 倍した行列に等しい。 すなわち、

$$lA = l[a_{ij}] = [la_{ij}] \quad (2.4)$$

なお $la_{ij} = a_{ij}l$ $lA = Al$

$$l(A+B) = lA + lB \quad lA + lA = (l+l)A$$

例1 $\begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
 $\begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \lambda^2(ad-bc)$

例2 $4 \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & -3 \end{bmatrix} =$

例3 $2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} =$

例4 $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -a & -c & 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 & -a & -b \\ a & -1 & -c \\ b & c & -1 \end{bmatrix}$

例5 A を n 次の正方行列とすると、 $A' = -A$ ならば A は反対称行列であることを示せ。

解 $A' = A$

$$\therefore A + A' = [a_{ij}] + [a_{ji}] = 0$$

従つて、 $a_{ij} = -a_{ji}$ $i = j$ のとき

$$a_{ii} + a_{ii} = 0 \quad \therefore a_{ii} = 0$$

対角要素 0 なる反対称行列となる。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \\ -3 & 0 & -2 \\ -7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -7 \\ 3 & 0 & 2 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \\ -3 & 0 & -2 \\ -7 & 2 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

例6 A を n 次の正方行列とすると

$$(A - A')' = -(A - A')$$

解 $A - A' = [a_{ij}] - [a_{ji}] = [a_{ij} - a_{ji}]$

$$\therefore (A - A')' = [a_{ji} - a_{ij}] = [a_{ji}] - [a_{ij}] = -(A - A')$$

反対称行列であることが例5よりわかる。

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 11 \\ 14 & 4 & -14 \\ 4 & -19 & 9 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} -4 & 14 & 4 \\ 3 & 4 & -19 \\ 11 & -14 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A - A' = \begin{bmatrix} 0 & -11 & 7 \\ 11 & 0 & 5 \\ -7 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - A')' = \begin{bmatrix} 0 & 11 & -7 \\ -11 & 0 & -5 \\ 7 & 5 & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & -11 & 7 \\ 11 & 0 & 5 \\ -7 & -5 & 0 \end{bmatrix} \\ = -(A - A')$$

例 7. n 次の正方行列は対称行列と反対称行列の和で示されることを証明せよ。

3.1 行列式の乗法

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{vmatrix}$$

次数の等しいこと、積の行列式はもとのものと同じ次数である。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \quad \text{は直接、積を作ることは出来ない。}$$

(勿論同乗にはできるが)

$$\text{この場合は} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \text{として次数を合せる。}$$

3.2 行列の乗法

(m, l) 次の矩形行列 $b = [b_{ij}]$ に (m, n) 次の矩形行列 $a = [a_{ij}]$ をかけて乗積をつくることのできる条件として $l = n$ が必要であると定義する。

$$\text{例} \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \text{可能}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{不能}$$

積の行列の次数は

$m \times m \times n = m \times n$ とする。

$[ba] = [p]$ とすれば

$$p_{ij} = b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \dots + b_{im}a_{mj}$$

$$p = ba \quad a \text{ に対する } b \text{ の左乗積}$$

$$q = ab \quad a \text{ に対する } b \text{ の右乗積}$$

$$\text{例 1.} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$\text{例 2.} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\text{例 3} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -12 \\ 3 & -7 & 18 \\ 2 & 4 & -31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} =$$

3.3 特別の場合の乗積

$$\text{列マトリックス } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\text{行マトリックス } y = [y_1, y_2, \dots, y_n]$$

- (i) (行列) $\times$ (列マトリックス) = 列マトリックス
(m, n) $\times$ ($n, 1$) = ($m, 1$)
- (ii) (行マトリックス) $\times$ (行列) = 行マトリックス
($1, m$) $\times$ (m, n) = ($1, n$)
- (iii) (行マトリックス) $\times$ (列マトリックス) = スカラー
($1, n$) $\times$ ($n, 1$) = ($1, 1$)

$$[a, a_2, \dots, a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [a, a_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n] \\ = a, b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

- (iv) (列マトリックス) $\times$ (行マトリックス) = 正方行列
($n, 1$) $\times$ ($1, n$) = (n, n)

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [b_1, b_2, \dots, b_n] = \begin{bmatrix} a_1 b_1, a_1 b_2, \dots, a_1 b_n \\ a_2 b_1, a_2 b_2, \dots, a_2 b_n \\ \vdots \\ a_n b_1, a_n b_2, \dots, a_n b_n \end{bmatrix}$$

例 1

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} =$$

例 2

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \end{bmatrix} =$$

例 3

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ のとき } b = ax \text{ を求めよ。}$$

$$\text{ただし, } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

3.4 対角行列による乗積

b を n 次の対角行列 a を n 次の正方行列としたとき $p = ba$,

$q = ab$ を求める。

$$b_{ij} = 0 \quad (i \neq j) : b_{ij} \neq 0 \quad (i = j)$$

故に $p = [p_{ij}] \quad q = [q_{ij}]$ とすると,

$$(1) \quad p_{ij} = b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \dots + b_{in}a_{nj} = b_{ii}a_{ij}$$

$$q_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = a_{ij}b_{jj}$$

$$(2) \quad p = ba = \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} & b_{11}a_{12} & \dots & b_{11}a_{1n} \\ b_{22}a_{21} & b_{22}a_{22} & \dots & b_{22}a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{nn}a_{n1} & b_{nn}a_{n2} & \dots & b_{nn}a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$q = ab = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} & \dots & a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} & \dots & a_{2n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} & a_{n2}b_{22} & \dots & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

b が単位行列の場合は

$$p_{ij} = a_{ij}, \quad q_{ij} = a_{ij} \quad \therefore p = q.$$

a, b とともに n 次の対角行列とすると

$$a_{ij} = 0 \quad (i \neq j) : a_{ij} \neq 0 \quad (i = j)$$

$$b_{ij} = 0 \quad (i \neq j) : b_{ij} \neq 0 \quad (i = j)$$

(1), (2) に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} p_{ij} &= 0 \quad (i \neq j) : p_{ii} = b_{ii}a_{ii} \\ q_{ij} &= 0 \quad (i \neq j) : q_{ii} = a_{ii}b_{ii} \end{aligned} \right\} \therefore p = q, \quad ab = ba$$

例 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\text{例 2} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

4.1 マトリックスの行列式

A を n 次の正方行列とすると、 A と同じ要素を持った行列式をマトリックスの行列式といい、之を $|A|$ であらわす。

$A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \quad P = AB = [p_{ij}]$ とすると

$$p_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

$|A|$ と $|B|$ の積の要素は行列式の理論より

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

となり P の要素と全く等しい。

$\therefore |AB| = |A||B|$
 λ をスカラーとすると λA は、 A のすべての要素が λ 倍されたマトリックスである。

$$|\lambda A| = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \dots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda^n \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\therefore |\lambda A| = \lambda^n |A|$$

4.2 行列式の展開

行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

において a_{ij} の余因数を A_{ij} とすれば

$$\left. \begin{aligned} a_{j1}A_{1i} + a_{j2}A_{2i} + \dots + a_{jn}A_{ni} &= |A| \quad (i=j) \\ &= 0 \quad (i \neq j) \end{aligned} \right\}$$

4.3 随伴行列

n 次の正方行列 $A = [a_{ij}]$ があるとき、その要素 a_{ij} の余因数を A_{ij} とするとき、 A_{ij} を要素とする行列の転置行列を考え、これを A の随伴行列といい、 A^* であらわす。

例 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ のとき A^* は如何

$$\begin{aligned} \text{又 } A \cdot A^* &= [a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn}] \\ &= \begin{bmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{bmatrix} = |A| I_n \end{aligned}$$

同様に、 $A^*A = |A| I_n$

例 1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ のとき A^* を A^*A , A^*A^* , A^*A を

求めよ。

又 $AA^* = |A| I_n$ 故に 両辺の行列式をとると、

$$|A| |A^*| = |A|^n \quad \therefore |A^*| = |A|^{n-1}$$

4.4 逆行列

A : n 次の正方行列とする。

$AX = I_n$ X は A の右逆行列

$YA = I_n$ Y は A の左逆行列

$X = Y$ のとき $X = Y = A^{-1}$ 逆行列

前節より $AA^* = A^*A = |A| I_n$ 故に、 $|A| \neq 0$ ならば、両辺を $|A|$ でわれば $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$ とある。

$|A| \neq 0$ 区別

$|A| = 0$ 特異

例 1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ のとき A^{-1} を求めよ。

例 2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ $|A| = 0$ となり A^* はあるが A^{-1} はない。

また、 $AB(AB)^{-1} = I$

$$A^{-1}AB(AB)^{-1} = A^{-1}I \quad B(AB)^{-1} = A^{-1}I$$

$$B^{-1}B(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}I \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}I = B^{-1}A^{-1}$$

$$-|A||B| [AB]^{-1} = |AB| (AB)^{-1} = (AB)^*$$

$$|A||B| B^{-1}A^{-1} = |B| B^{-1} |A| A^{-1} = B^* A^* \therefore (AB)^* = B^* A^*$$

4.5 乗積の転置行列

$A: (k, m)$, $B: (m, n)$, $AB: (k, n)$

$A': (m, k)$, $B': (n, m)$, $B'A': (n, k)$

$A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $AB = [c_{ij}]$

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj}$

$(AB)'$ の i 行 j 列の要素は c_{ij} の i と j が入れ交ったものに等しい。

$$c_{ji} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \dots + a_{jm}b_{mi}$$

$$= b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \dots + b_{mi}a_{jm}$$

B' の i 行 $\rightarrow$ (B の i 行) $\rightarrow b_{1i}, b_{2i}, \dots, b_{mi}$

A' の j 列 $\rightarrow$ (A の j 行) $\rightarrow a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jm}$

$B'A'$ の i 行 j 列 $\rightarrow b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \dots + b_{mi}a_{jm}$

$\rightarrow c_{ji}$ に等しい。

$$\therefore (AB)' = B'A'$$

例 $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 1 & -8 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \\ 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

AB , $(AB)'$, A' , B' , $B'A'$ を求めよ。

5.1 行列式の初等演算

(a) 列 (または行) を交換すること。

(b) 列 (または行) を k 倍すること。

(c) 列 (または行) を k 倍して他の列 (または行) に加えること。

例. 次の行列式を計算せよ。

$$|a| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

5.2 行または列の交換

I_n で i 行と j 行を交換したものを J_n とする。

$$P = J_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$g = aJ = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

定理(5.1) n 次単位行列の i 行と j 行とを交換したものを J とし、 a を n 次正方形行列とすると Ja は a の i 行と j 行を交換したものとなり、 aJ は a の i 列と j 列を交換したものとなる。

例

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5.3 行または列の入倍

$$P = La = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{24} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{41} & a_{42} & \dots & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{14} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{24} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{41} & a_{42} & \dots & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$g = aL = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

例

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

5.4 行を入倍して、他の行に加える演算

$$P = Ha = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} & a_{12} + \lambda a_{22} & \dots & a_{1n} + \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$g = aH = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11}\lambda + a_{12} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

単位行列の i 行 j 列の要素 0 の代りに λ とおいたものを H とし、 a を n 次正方形行列とすると、 Ha は a の j 行を入倍して a の i 行に加えた行列となり、 aH は a の i 列を入倍して、 a の j 列に加えた行列となる。

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -13 & -7 \\ 4 & -19 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$(3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

5.5 行列の標準形

n 次正方形行列 a が与えられたとき、これに初等演算 (a), (b), (c) を有限回施して得られる行列を a に等価な行列という。すなわち n 次正方形行列は、その行列式が 0 でなければ、初等演算を有限回施すことによってつねに n 次単位行列に等価に変えることができる。これを正則行列の標準形という。

$$\dots \dots \dots 2 H_1 H_2 H_3 \dots \dots L_1 L_2 \dots \dots = I_n \dots \dots (5.1)$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

ただし、頭首の要素が 0 のときは J をかけて、 i 行 (又は列) の要素を頭首にもってくる。

例 次のマトリックスを、初等演算で単位行列に直せ。

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

解

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$= H \quad H_1 \quad a \quad H_2 \quad H_3$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$H_3 \quad H_4 \quad L_1$

5.6 行列式の計算

(5) の (1) の両辺の行列式をとると、 H の行列式はすべて 1、 L の行列式もすべて 1 であるから、

$$|a| |L_1| |L_2| \cdots = 1$$

$$\therefore |a| = \frac{1}{|L_1| |L_2| \cdots} \quad (5.02)$$

ここでマトリックス L の行列式は対角要素の積に等しいから容易に計算できる。

また、三角行列

$$t = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{右三角行列})$$

$$t' = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ t_{12} & t_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{1n} & t_{2n} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{左三角行列})$$

$$|t| = |t'| = t_{11} t_{22} \cdots t_{nn}$$

a の行列式を求めるには

$$a H_1 H_2 \cdots H_{n-1} = t$$

$$\therefore |a| = |t| = t_{11} t_{22} \cdots t_{nn}$$

これを行うには要素を一つ一つ 0 にする代わりに行ごとく 0 にするのが便利である。これを次のマトリックスについて求そう。

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

計算

	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	$-\frac{a_{12}}{a_{11}}$	$-\frac{a_{13}}{a_{11}}$	$-\frac{a_{14}}{a_{11}}$	
(A)	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	1	0	0	(A')
	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	0	1	0	
	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	0	0	1	
	b_{11}	b_{12}	b_{13}		$-\frac{b_{12}}{b_{11}}$	$-\frac{b_{13}}{b_{11}}$		
(B)	b_{21}	b_{22}	b_{23}		1	0		(B')
	b_{31}	b_{32}	b_{33}		0	1		
		c_{11}	c_{12}		$-\frac{c_{12}}{c_{11}}$			(C')
(C)		c_{21}	c_{22}		1			
(D)			d_{11}					

(A) は与えられた行列の要素である。(A') は (A) の第一行の要素を a_{11} でわりーをつけ、その下に 3 次の単位行列をかいたものである。(B) は (A) の第二行を消いた行列と (A') との乗積である。

(B') は (B) の第一行の要素を b_{11} で割りーをつけ、その下に単位行列を書いたものである。以下同様。しかして、

$$|a| = a_{11} \cdot b_{11} \cdot c_{11} \cdot d_{11} \quad (5.5)$$

証明

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & -\frac{a_{14}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{31} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{41} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{31} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{41} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{b_{12}}{b_{11}} & -\frac{b_{13}}{b_{11}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & b_{11} & 0 & 0 \\ a_{31} & b_{21} & c_{11} & c_{12} \\ a_{41} & b_{31} & c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & b_{11} & 0 & 0 \\ a_{31} & b_{21} & c_{11} & c_{12} \\ a_{41} & b_{31} & c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{c_{12}}{c_{11}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & b_{11} & 0 & 0 \\ a_{31} & b_{21} & c_{11} & 0 \\ a_{41} & b_{31} & c_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

例. 次の行列式を計算せよ。

$$(a) \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(b) \Delta = \begin{vmatrix} 10 & 18 & 1 & 14 & 22 \\ 4 & 12 & 25 & 8 & 16 \\ 23 & 6 & 19 & 2 & 15 \\ 17 & 5 & 13 & 21 & 9 \\ 11 & 24 & 7 & 20 & 3 \end{vmatrix}$$

解

$$(a) \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 3 & -4 & -1 & 3 \\ \hline 0 & -1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & -1 & 3 & -1 & -3 & +1 & \\ \hline & -11 & -3 & -7 & 1 & 0 & \\ & -6 & 4 & -2 & 0 & 1 & \\ \hline & -36 & 4 & & \frac{1}{9} & & \\ & -14 & 2 & & 1 & & \\ \hline & & & & \frac{22}{9} & & \end{array}$$

$$\Delta = 1 \times (-1) \times (-36) \times \frac{22}{9} = 88$$

(b) 各行の和が65になっていることに注意して.

$$\Delta = 65 \begin{vmatrix} 1 & 18 & 1 & 14 & 22 \\ 1 & 12 & 25 & 8 & 16 \\ 1 & 6 & 19 & 2 & 15 \\ 1 & 5 & 13 & 21 & 9 \\ 1 & 24 & 7 & 20 & 3 \end{vmatrix} = 65 \begin{vmatrix} 1 & 18 & 1 & 14 & 22 \\ 0 & -6 & 24 & -6 & -6 \\ 0 & -12 & 18 & -12 & -7 \\ 0 & -13 & 12 & 7 & -13 \\ 0 & 6 & 6 & 6 & -19 \end{vmatrix}$$

$$= 65 \times 6 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 & 1 \\ 12 & -18 & 12 & 7 \\ 13 & -12 & -7 & 13 \\ -6 & -6 & -6 & 19 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 1 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ \hline 12 & -18 & 12 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & -12 & -7 & 13 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -6 & -6 & 19 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 30 & 0 & -5 & 0 & \frac{1}{6} & \\ \hline & 40 & -20 & 0 & 1 & 0 & \\ -30 & 0 & 25 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & -20 & \frac{20}{3} & & \frac{1}{3} & & \\ & 0 & 20 & & 1 & & \\ \hline & & & & 20 & & \end{array}$$

$$\Delta = 65 \times 6 \times 1 \times 30 \times (-20) \times 20 = -4,680,000$$

6.1 連立一次方程式の解法

与えられた方程式を

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right\} \quad (1)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \dots (2)$$

とすると, 与えられた式は

$$Ax = b \quad (3) \quad \text{となる。}$$

(a) $A \neq 0$ のとき並行列は存在するから

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$\therefore x = A^{-1}b \quad (4)$$

したがって、 a^{-1} を求めれば、 $x_1, \dots, x_n$ の値が直ちに求まる。

$$\frac{a^*}{|a|} = \frac{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}$$

A_{ij} は a_{ij} の余因数で a_{ij} に対する小行列式 Δ_{ij} に $(-1)^{i+j}$ をかけたもの。

6.2 逆行列の計算

$$aa^{-1} = a^{-1}a = I \quad (8)$$

両辺に J. H. L. を適当に組合せを三角行列 $t_1, \dots, t_m$ をかける。

$$t_m \dots t_2 t_1 a a^{-1} = t_m \dots t_2 t_1 I$$

これらの乗積により $t_m \dots t_2 t_1 a$ を I に直すことができる。

$$t_m \dots t_2 t_1 a = I \quad (9)$$

$$\therefore a^{-1} = t_m \dots t_2 t_1 \quad (10)$$

$$|a| = \frac{1}{|t_m| \dots |t_2| |t_1|} \quad (11)$$

例 1 $a = \begin{bmatrix} 36 & 16 & 4 \\ 15 & 9 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ の a^{-1} と $|a|$ を求めよ。

解 $\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 36 & 16 & 4 \\ 15 & 9 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} a^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

両辺と

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

の左乗積をつくる。

$$\begin{matrix} \frac{1}{4}r_1 & r_4 \\ \frac{1}{3}r_2 & r_5 \\ \frac{1}{2}r_3 & r_6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} a^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

この式の両辺と

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

との左乗積をつくる。

$$\begin{matrix} r_4 - r_6 & r_7 \\ r_5 - r_6 & r_8 \\ r_6 & r_9 \end{matrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} a^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

このようにして出てきた式の両辺に同時に初等演算を行い $t_m \dots$

$t_2 t_1 a = I$ に導く。

$$\begin{matrix} \frac{1}{2}r_7 - r_8 & r_9 \\ r_8 & r_{10} \\ r_6 & r_{11} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} a^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

両辺の行列式をとると、

$$1 \times |a| = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{48}$$

$$\therefore |a| = \frac{1}{|a^{-1}|} = 48$$

逆行列を求めるには更に計算を進める。

$$\begin{matrix} r_9 & r_{12} \\ r_6 - 2r_9 & r_{10} \\ r_6 - 3r_9 - 2r_{10} & r_{11} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} a^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 & -1 \\ \frac{1}{8} & -1 & \frac{7}{4} \end{bmatrix}$$

$$\therefore a^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 & -1 \\ \frac{1}{8} & -1 & \frac{7}{4} \end{bmatrix}$$

一表にすると、

	r_1	36	16	4	1	0	0
	r_2	15	9	3	0	1	0
	r_3	6	4	2	0	0	1
$\frac{1}{4}r_1$	r_4	9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	0
$\frac{1}{3}r_2$	r_5	5	3	1	0	$\frac{1}{3}$	0
$\frac{1}{2}r_3$	r_6	3	2	1	0	0	$\frac{1}{2}$
$r_4 - r_6$	r_7	6	2	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$
$r_5 - r_6$	r_8	2	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}r_7 - r_8$	r_9	1	0	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
	r_{10}	1	0	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
	r_8	2	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$
	r_6	3	2	1	0	0	$\frac{1}{2}$
$r_8 - 2r_9$	r_{10}	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	1	-1
$r_6 - 3r_9 - 2r_{10}$	r_{11}	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	-1	$\frac{7}{4}$

例 2. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$

解

	r_1	2	1	0	1	0	0
	r_2	1	3	-2	0	1	0
	r_3	0	-2	4	0	0	1
$2r_2 + r_3$	r_1	2	1	0	1	0	0
	r_4	2	4	0	0	2	1
	r_3	0	-2	4	0	0	1
$r_4 - r_1$	r_1	2	1	0	1	0	0
	r_5	0	3	0	-1	2	1
	r_3	0	-2	4	0	0	1
$3r_1 - r_5$	r_6	6	0	0	4	-2	-1
	r_5	0	3	0	-1	2	1
$2r_5 + 3r_3$	r_7	0	0	12	-2	4	5
$2r_6$	r_8	12	0	0	8	-4	-2
	r_9	0	12	0	-4	8	4
	r_7	0	0	12	-2	4	5

$$a^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 8 & -4 & -2 \\ -4 & -8 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

問. 次のマトリックスを計算せよ.

$$(a) \quad a^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$(b) \quad a^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

6.3 連立一次方程式の計算

例. $\begin{cases} x_1 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_4 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$ を解け.

解 $ax = b$

ただし $a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\therefore x = a^{-1}b$$

	r_1	1	0	3	1	1	0	0	0
	r_2	4	-1	1	-2	0	1	0	0
	r_3	1	3	0	5	0	0	1	0
	r_4	3	-1	2	1	0	0	0	1
$r_1 - r_4$	r_5	-2	1	1	0	1	0	0	-1
$r_2 + 2r_4$	r_6	10	-3	5	0	0	1	0	2
$r_3 - 5r_4$	r_7	-14	8	-10	0	0	0	1	-5
	r_4	3	-1	2	1	0	0	0	1
$10r_5 + r_7$	r_8	-34	18	0	0	10	0	1	-15
$2r_6 + r_7$	r_9	6	2	0	0	0	2	1	-1
$r_8 - 9r_9$	r_{10}	-88	0	0	0	10	-18	-8	-6
	r_{10}	-88	0	0	0	10	-18	-8	-6
	r_9	6	2	0	0	0	2	1	-1
	r_7	-14	8	-10	0	0	0	1	-5
	r_4	3	-1	2	1	0	0	0	1

a_{-1} を求めるには更にこの三角行列を単位行列にまで直す必要あり併し、方程式をとくには、次のようにする。

上の計算表の結果から、

$$\begin{bmatrix} -88 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \\ -14 & 8 & -10 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -18 & -8 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

したがって、

$$\begin{aligned} -88x_1 &= 20 - 18 + 8 - 18 = -8 & \therefore x_1 &= \frac{1}{11} \\ 6x_1 + 2x_2 &= 2 - 1 - 3 = -2 & \therefore x_2 &= -\frac{14}{11} \\ -14x_1 + 8x_2 - 10x_3 &= -1 - 15 = -16 & \therefore x_3 &= \frac{5}{11} \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3 & \therefore x_4 &= \frac{6}{11} \end{aligned}$$

同、マトリックスを用いて次の方程式を解け。

$$(a) \quad \left. \begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2x - y + 2z &= 6 \\ 3x + y - z &= 2 \end{aligned} \right\}$$

$$(b) \quad \left. \begin{aligned} 2x - 3y + 4z - w &= 11 \\ x + 2y - z + 2w &= -1 \\ 3x - y + 2z - 3w &= 9 \\ x - y + z - 7w &= 10 \end{aligned} \right\}$$

(以上)

付録 2. M, N が相互に独立なる場合、 M, N の積の分散

観測値 M, N がそれぞれ誤差 G M, G N を含み、M, N の母集団の真の特性値を $\mu M, \mu N$ とすれば

$$M = \mu M + G M$$

$$N = \mu N + G N$$

真の誤差 G M, G N は、相互に独立で、各、正、負同様の起りやすきとする。そうすれば、積は、 $MN = (\mu M + G M)(\mu N + G N)$

$$= \mu M \mu N + \mu M G N + \mu N G M + G M G N$$

積の誤差 G M N は

$$G M N = (MN - \mu M \mu N) = \mu M G N + \mu N G M + G M G N$$

上式の自乗の平均値が積の分散である。

G M, G N の平方の平均値は、 $\mu M G N$ の自乗の平均値 $\mu N G N$ のそれと比較して、無視でき、誤差が独立であるので $\sigma^2 MN = \mu M^2 \sigma^2 N + \mu N^2 \sigma^2 M$ 実際 M, N は $\mu M, \mu N$ の推定値である。もし M, N が独立に分布していれば標本分散の推定値を $V(M), V(N)$ とせば $V(MN) = M^2 [V(N)] + N^2 [V(M)]$, $V(MN)$ は MN の標本分散の推定値である。

付録 3. 正規方程式の誘導

観測値 y に対応する、推定値 Y が、三箇の独立変数 x_1, x_2, x_3 により $Y = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$ で表わされるとすれば、 b_1, b_2, b_3 なる回帰係数の値は最小自乗法により計算される。最小自乗法の応用とは、未知の b_1, b_2, b_3 を残差平方和 $S[(y - Y)^2]$ を最小ならしめるよう決定することである。母集団の観測値 (y, x_1, x_2, x_3) の独立な観測値の組がある場合は、このことは、 $S^2[(y - b_1 x_1 - b_2 x_2 - b_3 x_3)^2] \dots (1)$ を最小ならしめることである。また、もし観測値の全部が同じ変数をもつ、各 W なる重みを有する場合は、重みは残差平方和、

$$S^2 \{ W (y - b_1 x_1 - b_2 x_2 - b_3 x_3)^2 \} \dots (2) \quad \text{を最小と}$$

することである。(1) (2) の方程式では三箇の未知数を有するので、平方和に関する自由度は $(N - 3)$ である。その結果この場合にあつては残差の平均平方和を求むるためには、 N 箇の観測方程式は、3 以上なければ

ならぬ。(1)式は(2)式において、 $W=1$ の特例の場合であるから後者について説明する。

微分法から知られるように、(2)式の最小値は b_1, b_2, b_3 に関するオ一次導函数を0に等しいと置いて得られる。順々に各未知数に對して(2)式を微分して各オ一次導函数を0に等しいとおくと、

$$2 \frac{\partial}{\partial b_1} [W(y - b_1 x_1 - b_2 x_2 - b_3 x_3)(-x_1)] = 0$$

$$2 \frac{\partial}{\partial b_2} [W(y - b_1 x_1 - b_2 x_2 - b_3 x_3)(-x_2)] = 0$$

$$2 \frac{\partial}{\partial b_3} [W(y - b_1 x_1 - b_2 x_2 - b_3 x_3)(-x_3)] = 0 \quad \text{を得る。}$$

2で割って積と和を整頓すれば、三つの正規方程式は次のようになる。

$$b_1 [\frac{\partial}{\partial b_1} (W x_1^2)] + b_2 [\frac{\partial}{\partial b_1} (W x_1 x_2)] + b_3 [\frac{\partial}{\partial b_1} (W x_1 x_3)] = [\frac{\partial}{\partial b_1} (W x_1 y)]$$

$$b_1 [\frac{\partial}{\partial b_2} (W x_1 x_2)] + b_2 [\frac{\partial}{\partial b_2} (W x_2^2)] + b_3 [\frac{\partial}{\partial b_2} (W x_2 x_3)] = [\frac{\partial}{\partial b_2} (W x_2 y)]$$

$$b_1 [\frac{\partial}{\partial b_3} (W x_1 x_3)] + b_2 [\frac{\partial}{\partial b_3} (W x_2 x_3)] + b_3 [\frac{\partial}{\partial b_3} (W x_3^2)] = [\frac{\partial}{\partial b_3} (W x_3 y)]$$

観測から得られた数量は[]内に入れられる。未知の b_1, b_2, b_3 がこの三式を同時に満足するよう解くとよい。

観測方程式の重みが同じ様に定められている場合は、 W は1に等しいと考えてもよいから、(3)式の各項から除いて差支えない。

そうすると、(1)式より直接得た式と同じになる。

$$\text{正規方程式が} \quad Y = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots \dots (4)$$

の形を取るように、未知数 b が二箇しかない場合は(3)式からオ三行とオ三行を除けばよいだろう。この場合の正規方程式としては次の二を得る。

$$\left. \begin{aligned} b_1 [\frac{\partial}{\partial b_1} (W x_1^2)] + b_2 [\frac{\partial}{\partial b_1} (W x_1 x_2)] &= [\frac{\partial}{\partial b_1} (W x_1 y)] \\ b_2 [\frac{\partial}{\partial b_2} (W x_1 x_2)] + b_2 [\frac{\partial}{\partial b_2} (W x_2^2)] &= [\frac{\partial}{\partial b_2} (W x_2 y)] \end{aligned} \right\} (5)$$

付録々 回帰に独立な平方和

これは上の(1)または(2)式に示される平方和である。(2)式を展開する。

$$\begin{aligned} S^2 [W(y - b_1 x_1 - b_2 x_2 - b_3 x_3)^2] &= S^2 (W y^2) + b_1^2 S^2 (W x_1^2) \\ &+ b_2^2 S^2 (W x_2^2) + b_3^2 S^2 (W x_3^2) - 2 b_1 S^2 (W x_1 y) - 2 b_2 S^2 (W x_2 y) \\ &- 2 b_3 S^2 (W x_3 y) + 2 b_1 b_2 S^2 (W x_1 x_2) + 2 b_1 b_3 S^2 (W x_1 x_3) \\ &+ 2 b_2 b_3 S^2 (W x_2 x_3) \end{aligned}$$

これは多小扱い難いが、幸いかなり簡単になる。上式を次のように書き直せる。

$$\begin{aligned} S^2 [W(y - b_1 x_1 - b_2 x_2 - b_3 x_3)] &= S^2 (W y^2) + b_1 [b_1 S^2 (W x_1^2) \\ &+ b_2 S^2 (W x_1 x_2) + b_3 S^2 (W x_1 x_3)] + b_2 [b_1 S^2 (W x_1 x_2) + b_2 S^2 (W x_2^2) \\ &+ b_3 S^2 (W x_2 x_3)] + b_3 [b_1 S^2 (W x_1 x_3) + b_2 S^2 (W x_2 x_3) + b_3 S^2 (W x_3^2)] \\ &- 2 b_1 S^2 (W x_1 y) - 2 b_2 S^2 (W x_2 y) - 2 b_3 S^2 (W x_3 y) \end{aligned}$$

右辺の括弧内の各項は3の(3)式の左辺に同じものであるから、

$$S^2 [W(y - b_1 x_1 - b_2 x_2 - b_3 x_3)] = S^2 (W y^2) + b_1 S^2 (W x_1 y) + b_2 S^2 (W x_2 y) + b_3 S^2 (W x_3 y) - 2 b_1 S^2 (W x_1 y) - 2 b_2 S^2 (W x_2 y) - 2 b_3 S^2 (W x_3 y),$$

となり、残差の重み付平方和次のようになる。

$$S^2 [W(y - b_1 x_1 - b_2 x_2 - b_3 x_3)^2] = S^2 (W y^2) - b_1 S^2 (W x_1 y) - b_2 S^2 (W x_2 y) - b_3 S^2 (W x_3 y)$$

この形から次のことが明らかになる。自由度 n の y の重み付平方和 $S^2 (W y^2)$ は回帰に基く部分(自由度3)すなわち、 $b_1 S^2 (W x_1 y) + b_2 S^2 (W x_2 y) + b_3 S^2 (W x_3 y)$ と自由度が $(n-3)$ の回帰に關係のない残りの部分、すなわち、 $S^2 [W(y - b_1 x_1 - b_2 x_2 - b_3 x_3)]$ と分かれる。

次にフィッシャの所載の乗数(フィッシャー-最確計的方法 29, 29.1節参照)を述べるが、これは独立変数のみに依存するもので、この意味使用法を示すために5.6, 7, 8節を順次説明する。

付録5 行列式による正規方程式の解法

回帰方程式 $Y = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$ が与えられたとする。簡単にするために次のようにおく。

0, 1, 2, 3. でス々 y, x_1, x_2, x_3 を現はし。

$$S^2 (y^2) = (0.0); S^2 (y x_1) = (0.1); S^2 (y x_2) = (0.2); S^2 (y x_3) = (0.3)$$

$$S^2 (x_1^2) = (1.1); S^2 (x_1 x_2) = (1.2); S^2 (y, x_3) = (1.3)$$

$$S^2 (x_2^2) = (2.2); S^2 (x_2 x_3) = (2.3)$$

$$S^2 (x_3^2) = (3.3)$$

右辺の丸括弧は、 n 箇の独立な組の和を意味する。

この表示法によれば、回帰方程式は次のように現わされる。

$$\left. \begin{aligned} \text{I} \quad b_1 (11) + b_2 (12) + b_3 (13) &= (01) \\ \text{II} \quad b_1 (12) + b_2 (22) + b_3 (23) &= (02) \\ \text{III} \quad b_1 (13) + b_2 (23) + b_3 (33) &= (03) \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

独立変数だけで行列式をつくると、

$$D = \begin{vmatrix} (11) & (12) & (13) \\ (12) & (22) & (23) \\ (13) & (23) & (33) \end{vmatrix} = (11)A_{11} + (12)A_{12} + (13)A_{13} \dots (2)$$

A_{11}, A_{12}, A_{13} は元 $(11)(12)(13)$ の余因子である。

(1) の I, II, III にそれぞれ A_{11}, A_{12}, A_{13} を乗ずると、

$$\left. \begin{aligned} b_1 (11) A_{11} + b_2 (12) A_{11} + b_3 (13) A_{11} &= (01) A_{11} \\ b_1 (12) A_{12} + b_2 (22) A_{12} + b_3 (23) A_{12} &= (02) A_{12} \\ b_1 (13) A_{13} + b_2 (23) A_{13} + b_3 (33) A_{13} &= (03) A_{13} \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

この (3) 式を加えると

$$b_1 [(11) A_{11} + (12) A_{12} + (13) A_{13}] + b_2 [(12) A_{11} + (22) A_{12} + (23) A_{13}] + b_3 [(13) A_{11} + (23) A_{12} + (33) A_{13}] = (01) A_{11} + (02) A_{12} + (03) A_{13}$$

カニ、カニの括弧の項は二行が同じ行列式となるから 0 となり、(3) 式は次のようになる。

$$b_1 [(11) A_{11} + (12) A_{12} + (13) A_{13}] = (01) A_{11} + (02) A_{12} + (03) A_{13}$$

$$\therefore b_1 = \frac{(01) A_{11} + (02) A_{12} + (03) A_{13}}{(11) A_{11} + (12) A_{12} + (13) A_{13}}$$

または、

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} (01) & (12) & (13) \\ (02) & (22) & (23) \\ (03) & (23) & (33) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (11) & (12) & (13) \\ (12) & (22) & (23) \\ (13) & (23) & (33) \end{vmatrix}} = \frac{\quad}{D}$$

同帰係数 b_2, b_3 も同様にして得られる。

(2) 式はまた次の形にあらわされる。

$$D = (12) A_{12} + (22) A_{22} + (23) A_{23}$$

$$D = (13) A_{13} + (23) A_{23} + (33) A_{33}$$

$$b_2 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} (11) & (01) & (13) \\ (12) & (02) & (23) \\ (13) & (03) & (33) \end{vmatrix}$$

$$b_3 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} (11) & (12) & (01) \\ (12) & (22) & (02) \\ (13) & (23) & (03) \end{vmatrix}$$

直接使用の便を考慮して次のように変形しておいてよい。

$$b_1 = \frac{1}{D} [(01) A_{11} + (02) A_{12} + (03) A_{13}] \dots (4A)$$

$$b_2 = \frac{1}{D} [(01) A_{12} + (02) A_{22} + (03) A_{23}] \dots (4B)$$

$$b_3 = \frac{1}{D} [(01) A_{13} + (02) A_{23} + (03) A_{33}] \dots (4C)$$

付録 6 C 乗数の計算

C 乗数を上に用いた記号を用いて定義する。

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{A_{11}}{D}; & C_{12} &= \frac{A_{12}}{D}; & C_{13} &= \frac{A_{13}}{D} \\ C_{22} &= \frac{A_{22}}{D}; & C_{23} &= \frac{A_{23}}{D} \\ C_{33} &= \frac{A_{33}}{D} \end{aligned}$$

上の (4A), (4B), (4C) の各式にそれぞれ C 乗数を代入すると、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= C_{11} (01) + C_{12} (02) + C_{13} (03) \\ b_2 &= C_{12} (01) + C_{22} (02) + C_{23} (03) \\ b_3 &= C_{13} (01) + C_{23} (02) + C_{33} (03) \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

もし C 乗数の数値がわかれば同帰係数も、このように簡単に計算できる。これは上述の議論から推論できる。(2), (3) 式より、

$$(11) A_{11} + (12) A_{12} + (13) A_{13} = D,$$

$$(12) A_{11} + (22) A_{12} + (23) A_{13} = 0,$$

$$(13) A_{11} + (23) A_{12} + (33) A_{13} = 0.$$

これらを D で除くと、 $\frac{A_{11}}{D} = C_{11}, \frac{A_{12}}{D} = C_{12}, \frac{A_{13}}{D} = C_{13}$ であるから

$$\left. \begin{aligned} C_{11} (11) + C_{12} (12) + C_{13} (13) &= 1 \\ C_{11} (12) + C_{12} (22) + C_{13} (23) &= 0 \\ C_{11} (13) + C_{12} (23) + C_{13} (33) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (6A)$$

これらの式は独立変数のみしか含まれないから、この式により C_{11}, C_{12}, C_{13} の数値を定めることができる。同様に次の式が示される。

$$\left. \begin{aligned} C_{12} (11) + C_{22} (12) + C_{23} (13) &= 0 \\ C_{12} (12) + C_{22} (22) + C_{23} (23) &= 1 \\ C_{12} (13) + C_{22} (23) + C_{23} (33) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (6B)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{13} (11) + C_{23} (12) + C_{33} (13) &= 0 \\ C_{13} (12) + C_{23} (22) + C_{33} (23) &= 0 \\ C_{13} (13) + C_{23} (23) + C_{33} (33) &= 1 \end{aligned} \right\} \dots (6C)$$

付録 7. 同帰係数の分散並びに共分散

同として b_1 の分散の推定値 ($V(b_1)$) の求め方を解説する。

同帰方程式 $Y = b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3$ において、各観測値 y_i (従属変数) は、二成分の和とみなされる。

すなわち、独立変数 X_1, X_2, X_3 の一定値に対応する、従属変数 Y の値

の値 $\mu_{0.123}$ と、誤差値の真の値差、 $\epsilon_{0.123}$ との和である。

$$y = \mu_{0.123} + \epsilon_{0.123}.$$

b_1 を上の5節の(5)式にしたがい定義する。すなわち

$$b_1 = C_{11}(01) + C_{12}(02) + C_{13}(03)$$

この式の中の積の和は次のようになる。

$$(01) = S^2 \{ x_1 (\mu_{0.123} + \epsilon_{0.123}) \}; (02) = S^2 \{ x_2 (\mu_{0.123} + \epsilon_{0.123}) \}$$

$$(03) = S^2 \{ x_3 (\mu_{0.123} + \epsilon_{0.123}) \}$$

故に、上の b_1 は次のようになる。

$$b_1 = \{ C_{11} S^2 (x_1 \mu_{0.123}) + C_{12} S^2 (x_2 \mu_{0.123}) + C_{13} S^2 (x_3 \mu_{0.123}) \} \\ + \{ C_{11} S^2 (x_1 \epsilon_{0.123}) + C_{12} S^2 (x_2 \epsilon_{0.123}) + C_{13} S^2 (x_3 \epsilon_{0.123}) \}$$

上式で第一項の括弧内は、真の(母集団)回帰係数 β_1 である。

第二項の括弧内は、 b_1/β_1 に等しいから b_1 の真の誤差を表わしている。

$$\therefore (b_1 - \beta_1) = C_{11} S^2 (x_1 \epsilon_{0.123}) + C_{12} S^2 (x_2 \epsilon_{0.123}) + C_{13} S^2 (x_3 \epsilon_{0.123}).$$

しかして、これは次のようにも書くことができる。

$$(b_1 - \beta_1) = S^2 \{ \epsilon_{0.123} [C_{11} x_1 + C_{12} x_2 + C_{13} x_3] \}$$

さて、 b_1 の分散は、大いさ n と、このような独立変数と同一分布を有するすべての標本のすべての値に対する $(b_1 - \beta_1)$ の平方の平均である。

上式を平方し、独立なる値の和の平方は、その平方の和に等しいから

$$(b_1 - \beta_1)^2 = S^2 \{ E^2_{0.123} [C_{11} x_1 + C_{12} x_2 + C_{13} x_3]^2 \}.$$

展開すると、

$$(b_1 - \beta_1)^2 = S^2 \{ E^2_{0.123} \{ C_{11}^2 x_1^2 + C_{12}^2 x_2^2 + C_{13}^2 x_3^2 \\ + 2C_{12} C_{11} x_1 x_2 + 2C_{13} C_{11} x_1 x_3 + 2C_{13} C_{12} x_2 x_3 \} \}$$

$\epsilon_{0.123}$ の属々の値は、独立変数とは関係ないから、上式は $E^2_{0.123}$ の平均値、すなわち $\sigma^2_{0.123}$ に、その中の項の和を乗じたものとして、あらわされるだろう。

この后者を上の方の記号、すなわち、

$$S^2 (x_1^2) = (11); S^2 (x_1 x_2) = (12) \text{ 云々、を表現すれば、}$$

上式は、次のようにかかれる。

$$(b_1 - \beta_1)^2 = \sigma^2_{0.123} \{ C_{11} [(11) + C_{12} (12) + C_{13} (13)]$$

$$+ C_{12} [C_{11}(12) + C_{12}(22) + C_{13}(23)] \\ + C_{13} [C_{11}(13) + C_{12}(23) + C_{13}(33)] \} = C_{11} \sigma^2_{0.123}.$$

何とすれば、6節の(6a)式よりから、 σ_1 分散は1、 ϵ は0となるからである。

実際には、正確なる $\sigma^2_{0.123}$ はわからない。回帰方程式の廻りの残差の平均平方、すなわち、 $S^2_{0.123}$ はその不偏推定値である。それ故、回帰係数 b_1 の標本分散の推定値は、 $V(b_1) = C_{11} S^2_{0.123}$ 同様にして

$$V(b_2) = C_{22} S^2_{0.123}, \quad V(b_3) = C_{33} S^2_{0.123}$$

$$\text{Cov}(b_1, b_2) = C_{12} S^2_{0.123}, \quad \text{Cov}(b_1, b_3) = C_{13} S^2_{0.123}.$$

$$\text{Cov}(b_2, b_3) = C_{23} S^2_{0.123}$$

付録 8 回帰函数の分散

回帰方程式 $Y = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$ において、計算された Y の分散は函数の分散で、 $V(Y) = V(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3)$ である。

これは必ずしも相互に独立でない三項の和の分散であるから次のように表わされる。

$$V(Y) = V(b_1 x_1) + V(b_2 x_2) + V(b_3 x_3) \\ + 2\text{Cov}[(b_1 x_1)(b_2 x_2)] + 2\text{Cov}[(b_1 x_1)(b_3 x_3)] + 2\text{Cov}[(b_2 x_2)(b_3 x_3)] \dots (7)$$

x_1, x_2, x_3 の値は抽出誤差がないので、 $V(b_1 x_1) = x_1^2 [V(b_1)] = x_1^2 C_{11} S^2_{0.123}$ 。

$$\text{Cov}[(b_1 x_1)(b_2 x_2)] = x_1 x_2 [\text{Cov}(b_1, b_2)] = x_1 x_2 C_{12} S^2_{0.123}.$$

その他の項も同様を表わされる。

各独立変数に抽出誤差がないときは回帰方程式

$$Y = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3, \quad Y \text{ の分散は、}$$

$$V(Y) = S^2_{0.123} [C_{11} x_1^2 + C_{22} x_2^2 + C_{33} x_3^2 + 2C_{12} x_1 x_2 \\ + 2C_{13} x_1 x_3 + 2C_{23} x_2 x_3] = S^2 R \dots (8)$$

S^2 は重みが1で、回帰と独立な残差の平均の平方を表わし、 R は[7]式の量を表わす。故に $S^2 R$ は回帰方程式そのものに帰せられる抽出誤差の $V(Y)$ への寄与を表わす。式中の独立変数に抽出誤差があれば、その分散は

$$V(x_1); \quad V(x_2); \quad \text{Cov}(x_1, x_2) \\ V(x_3); \quad \text{Cov}(x_1, x_3) \\ \text{Cov}(x_2, x_3)$$

(7)式の各項は積の分散と共分散を表わし、その各因子は抽出誤差があ

るものである。すなわち、

$$V(b_1 X_1) = X_1^2 [V(b_1)] + b_1^2 [V(X_1)]$$

$$\text{Cov}[(b_1 X_1)(b_2 X_2)] = X_1 X_2 [\text{Cov}(b_1, b_2)] + b_1 b_2 [\text{Cov}(X_1, X_2)]$$

その他の項も同様に表示される。右辺の第一項は (8) 式に既に含まれている。右辺の第二項の和を S^2 とすれば

$$S^2 = b_1^2 [V(X_1)] + b_2^2 [V(X_2)] + b_3^2 [V(X_3)] + 2 b_1 b_2 [\text{Cov}(X_1, X_2)] + 2 b_1 b_3 [\text{Cov}(X_1, X_3)] + 2 b_2 b_3 [\text{Cov}(X_2, X_3)] \dots (9)$$

明らかに、 S^2 は、独立変量の抽出誤差に基づくものである。一般に、

$Y = b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3$ の分散は、(8) に (9) を加えれば求められる。

すなわち、 $V(Y) = S^2 R + S^2$

付録 9 回帰函数に適當な C 乗数

$Y = a + b_1(X_1 - \bar{X}_1) + b_2(X_2 - \bar{X}_2) + b_3(X_3 - \bar{X}_3)$ なる回帰方程式は a なる常数がついているだけ異なる。しかし、 $a = \bar{y}$ であるから、回帰方程式は

$$(Y - \bar{y}) = b_1(X_1 - \bar{X}_1) + b_2(X_2 - \bar{X}_2) + b_3(X_3 - \bar{X}_3)$$

記号をかえ、 $(y - \bar{y})$ を y 、 $(X_1 - \bar{X}_1)$ を x_1 、 $(X_2 - \bar{X}_2)$ を x_2 、 $(X_3 - \bar{X}_3)$ を x_3 と表わせば、変数間の平方和、積和は、次のように表わされる。

$$S^2[(y - \bar{y})^2] = (00); S^2[(y - \bar{y})(x_1 - \bar{x}_1)] = (01) \quad \text{等}$$

$$S^2[(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)] = (12) \quad \text{等}$$

括弧は 3 箇の独立の組の総和を示す。回帰係数の算に必要な正規方程式は (5) の (1) 式と同一となり、その結果

$$\text{I} \quad b_1(11) + b_2(12) + b_3(13) = (01)$$

$$\text{II} \quad b_1(12) + b_2(22) + b_3(23) = (02)$$

$$\text{III} \quad b_1(13) + b_2(23) + b_3(33) = (03)$$

C 乗数は、それで (6a), (6b), (6c) 式と同一の式より計算される。

付録 10 回帰函数 $Y = a + b_1(X_1 - \bar{X}_1) + b_2(X_2 - \bar{X}_2) + b_3(X_3 - \bar{X}_3)$ の分散

与えられた回帰方程式が $Y = a + b_1(X_1 - \bar{X}_1) + b_2(X_2 - \bar{X}_2) + b_3(X_3 - \bar{X}_3)$ とすれば、 Y の分散は次のようになる。

$$V(Y) = V(a) + V[b_1(X_1 - \bar{X}_1) + b_2(X_2 - \bar{X}_2) + b_3(X_3 - \bar{X}_3)]$$

すなわち、常数 a は、その他の項とは独立だから、 $V(a)$ は a の分散と回帰方程式のその他の部分の分散の和であらわされる。

さて、 a の分散は X_1, X_2 および X_3 がそれぞれ $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ である時の Y の分散であるから、 $V(a) = \frac{S^2_{0.123}}{n}$

ただし、 $S^2_{0.123}$ は重み加 1 の場合の残差の平均の平方である。回帰方程式の残りの部分の分散は、すなわち、

$V[b_1(X_1 - \bar{X}_1) + b_2(X_2 - \bar{X}_2) + b_3(X_3 - \bar{X}_3)]$ は必ずしも相互に独立でない各項の和の分散であるから展開すると次のようになる。

$$V[b_1(X_1 - \bar{X}_1) + b_2(X_2 - \bar{X}_2) + b_3(X_3 - \bar{X}_3)] + 2 \text{Cov}[b_1 b_2(X_1 - \bar{X}_1)(X_2 - \bar{X}_2)] + 2 \text{Cov}[b_2 b_3(X_2 - \bar{X}_2)(X_3 - \bar{X}_3)]$$

回帰方程式中の X_1, X_2, X_3 の値の抽出誤差を有するときは、上の各項、両因子とも抽出誤差を有する積の分散(又は共分散)となる。故に、

$$\begin{aligned} V[b_1(X_1 - \bar{X}_1)] &= (X_1 - \bar{X}_1)^2 [V(b_1)] + b_1^2 [V(X_1)] \\ V[b_2(X_2 - \bar{X}_2)] &= (X_2 - \bar{X}_2)^2 [V(b_2)] + b_2^2 [V(X_2)] \\ V[b_3(X_3 - \bar{X}_3)] &= (X_3 - \bar{X}_3)^2 [V(b_3)] + b_3^2 [V(X_3)] \\ \text{Cov}[b_1 b_2(X_1 - \bar{X}_1)(X_2 - \bar{X}_2)] &= (X_1 - \bar{X}_1)(X_2 - \bar{X}_2) [\text{Cov}(b_1, b_2)] \\ &\quad + b_1 b_2 [\text{Cov}(X_1, X_2)] \\ \text{Cov}[b_1 b_3(X_1 - \bar{X}_1)(X_3 - \bar{X}_3)] &= (X_1 - \bar{X}_1)(X_3 - \bar{X}_3) [\text{Cov}(b_1, b_3)] \\ &\quad + b_1 b_3 [\text{Cov}(X_1, X_3)] \\ \text{Cov}[b_2 b_3(X_2 - \bar{X}_2)(X_3 - \bar{X}_3)] &= (X_2 - \bar{X}_2)(X_3 - \bar{X}_3) [\text{Cov}(b_2, b_3)] \\ &\quad + b_2 b_3 [\text{Cov}(X_2, X_3)] \end{aligned}$$

共分散を 2 倍し、右辺の各列を加え合せ、 $V(b_1) = C_{11} S^2_{0.123}$;

$\text{Cov}(b_1, b_2) = C_{12} S^2_{0.123}$ 等を見い出せば和は次のようになる。

$$S^2_{0.123} [C_{11}(X_1 - \bar{X}_1)^2 + C_{22}(X_2 - \bar{X}_2)^2 + C_{33}(X_3 - \bar{X}_3)^2 + 2 C_{12}(X_1 - \bar{X}_1)(X_2 - \bar{X}_2) + 2 C_{13}(X_1 - \bar{X}_1)(X_3 - \bar{X}_3) + 2 C_{23}(X_2 - \bar{X}_2)(X_3 - \bar{X}_3)]$$

これに a の分散 $V(a) = \frac{S^2_{0.123}}{n}$ を加えたもの(式)中の独立変数が抽出誤差のない時の回帰函数の分散である。合計すると

$$S^2 R = S^2_{0.123} \left[\frac{1}{n} + C_{11}(X_1 - \bar{X}_1)^2 + C_{22}(X_2 - \bar{X}_2)^2 + C_{33}(X_3 - \bar{X}_3)^2 + 2 C_{12}(X_1 - \bar{X}_1)(X_2 - \bar{X}_2) + 2 C_{13}(X_1 - \bar{X}_1)(X_3 - \bar{X}_3) + 2 C_{23}(X_2 - \bar{X}_2)(X_3 - \bar{X}_3) \right]$$

(1) 式の右辺の第二項を 2 倍して作った列和は、独立変数の抽出誤差に帰因するもので S^2 で示すと、

$$S^2 = b_1^2 [V(X_1)] + b_2^2 [V(X_2)] + b_3^2 [V(X_3)] + 2 b_1 b_2 [\text{Cov}(X_1, X_2)] + 2 b_1 b_3 [\text{Cov}(X_1, X_3)] + 2 b_2 b_3 [\text{Cov}(X_2, X_3)]$$

付録 11. 同一の独立変数に対する回帰に独立

対な. なった残差の共分散

X_H, X_P に対する y_H の回帰が与えられ, その残差の平方和を

$$S^2[(y_H - k_H X_H - k_P X_P)^2]$$

とし展開すれば (4参照)

$$S^2(y_H^2) - k_H S^2(X_H y_H) - k_P S^2(X_P y_H)$$

すなわち, 残差の平方和は, X_H と X_P に対する回帰に因る部分 $k_H S^2(X_H y_H) + k_P S^2(X_P y_H)$ を y の総平方和から引いた残りに等しい。

対する残差の平方和は

$S^2[(y_H - k_H X_H - k_P X_P)(y_P - p_H X_H - p_P X_P)]$ の展開によるから, これは次のようになる。

$$S^2(y_H y_P) - k_H S^2(X_H y_P) - k_P S^2(X_P y_P) + k_H p_H S^2(X_H^2) + k_P p_H S^2(X_H X_P) - p_H S^2(X_H y_H) - p_P S^2(X_P y_H) + k_H p_P S^2(X_P X_H) + k_P p_P S^2(X_P^2)$$

すなわち

$$S^2(y_H y_P) + [k_H p_H S^2(X_H^2) + k_P p_H S^2(X_H X_P) - p_H S^2(X_H y_H)] + [k_H p_P S^2(X_P X_H) + k_P p_P S^2(X_P^2) - p_P S^2(X_P y_H)] - k_H S^2(X_H y_P) - k_P S^2(X_P y_P) \dots (7)$$

(7)の二つの「」内はそれぞれ p_H, p_P をくくり出し, 正規方程式と比較すれば0となる。故に

$$\begin{aligned} S^2[(y_H - k_H X_H - k_P X_P)(y_P - p_H X_H - p_P X_P)] \\ = S^2(y_H y_P) - k_H S^2(X_H y_P) - k_P S^2(X_P y_P) \\ = S^2(y_H y_P) - p_H S^2(X_H y_H) - p_P S^2(X_P y_H) \end{aligned}$$

付録 12. 行列の元の小数点を移動させる方法

(Kenney, Keeping: Mathematics of Statistics 304頁より)

独立変数の測定が非常に違う単位で行われる時は係数の行列の各元は数オーダーも大きさが異なってくる場合があるが, こういう場合は, 計算は厄介になる。特に主対角線の各元は0.1と10の間にあるようにしたい。

このためにまず0でない元が10の適当な巾となっている対角行列Dを

選んでAを $B (= DAD)$ に変換する。列ベクトル y は $y = Dy$ 入に変換される。入は適当な10のスカラー巾であるがこの結果 y の元は大体Bと同じオーダーとなる。しかして方程式 $By = y$ が解かれ, 原方程式 $Ay = y$ の解は $y = D^{-1}y$ となる。

Aの逆行列はBの逆行列から

$$A^{-1} = D B^{-1} D \dots (2)$$

より求められる。

証明は次のとおりである。

$$\begin{aligned} y &= B^{-1}y = (DAD)^{-1}y \\ &= D^{-1}A^{-1}D^{-1}Dy \\ &= D^{-1}A^{-1}y \\ &= D^{-1}y \end{aligned}$$

故に $y = D^{-1}y$

$A^{-1} = D B^{-1} D$ の証明は上の証より容易にわかる。

例 与えられた正規方程式の組は

$$\begin{bmatrix} 68.634 & 25.61 & 338.8 \\ 25.61 & 0.0892 & 0.178 \\ 338.8 & 0.178 & 4.41 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19.8 \\ 0.0293 \\ 0.106 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ を選ぶと}$$

$$B = \begin{bmatrix} 6.86 & 2.56 & 3.38 \\ 2.56 & 0.92 & 1.78 \\ 3.38 & 1.78 & 4.41 \end{bmatrix}$$

となり全部有効数字三桁に丸められる。

$$Dy = \begin{bmatrix} 0.198 \\ 0.293 \\ 0.106 \end{bmatrix}$$

その結果入の適当の値は10であるから

$$y = \begin{bmatrix} 1.98 \\ 2.93 \\ 1.06 \end{bmatrix} \text{ となる。}$$

変換された方程式の解は

$$y = [0.197, 0.277, -0.023] \text{ である。}$$

この場合

$$u = \begin{bmatrix} 0.0197 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.197 \\ 0.277 \\ -0.023 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

となり、したがって、 $u' = [0.00197, 0.277, -0.0023]$ となる。

別の解法 (実はガウスの消去法に等しく、かつ平方根を求める必要はない) は、各対角要素が1に等しい三角行列 T と $T'DT = A$ となるような対角行列 D を求めることである。もし

解くべき行列方程式が $Au = g$ であれば、 $T'DTu = g$ となり、これは次の三方程式に等しい。

$$T' \ell = g, \quad Dk = \ell, \quad Tu = k$$

これはすべて 三角 (或は対角) 行列である。

もし行列 T と D の形が

$$T = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ 0 & 1 & \dots & x_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_p \end{bmatrix}$$

ならば方程式 $TDT = A$ 、次の

ような関係を保っている。

$$\begin{aligned} d_1 &= a_{11} \\ x_{12}d_1 &= a_{12} \\ x_{13}d_1 &= a_{13} \\ \dots & \dots \\ x_{12}^2d_1 + d_2 &= a_{22} \\ x_{12}x_{13}d_1 + x_{23}d_2 &= a_{23} \\ x_{13}^2d_1 + x_{23}^2d_2 + d_3 &= a_{33} \end{aligned}$$

方程式の全数は $\frac{1}{2}p(p+1)$ で x_{ij} の $\frac{1}{2}p(p-1)$ 個の値と d_i の p 個の値を定めるのに丁度十分である。

行列 A の逆行列は $A^{-1} = T^{-1}D^{-1}(T^{-1})'$

により求められる。ここで T と D はそれぞれ三角及び対角行列で、その逆行列は容易に求められる。