

經 營	8 1
測 定	2 4

森 林 測 定 研 究 資 料

(2)

昭 和 3 5 年 3 月

農 林 省 林 業 試 驗 場 經 營 部

序

森林測定研究資料(I)においては、主として純測樹学的な問題を取扱った論文を収録したが、この集では最近ますます広く用いられる傾向のある森林標本調査法の、基礎的な問題を論じた論文を訳出した。この中には Sukhatme, Smith, および Hatherway & Williams の論文のように農作物の収量調査を対象としているものもあるが、前者はプロットの大きさと形状によって生ずる偏りを取扱っている点に興味があり、後二者は Hasel, Finney, Johnson & Hixon などの考えているプロットの最も有効な大きさと形状を定めるという問題で、有用と思われる手法を論じているのでとりあげた。

なお Hasel の抽出誤差の論文は、前に林野庁計画課編「米国林業に於ける標本調査」の中に収録されたことがあるが、ここでは Finney の第2の論文がこのデータをもとにして分析を進めている関係上改めて訳出したものである。

忽々の中に取まとめたので誤訳、思い違いも多いと思われるが、この問題に関心をもたれる方々に、多少なりとも参考になれば幸いである。

なおこの訳は真辺の原稿をもととして大友が手を加えたものである。

昭和35年2月

測定研究室長 大友 栄 松

測定研究室 真 辺 昭

目 次

1. 標本調査による林分材積の推定 (Finney)	1
2. 林分の標本調査について (Nair and Bhargava)	45
3. 地床植生の占有面積に対する系統的小よび無作為調査の 抽出誤差について (Osborne)	63
4. 林分調査における無作為抽出法と系統的小抽出法 (Finney)	75
5. 森林標本調査における周期変動の小例について (Finney)	131
6. 林分調査における抽出誤差 (Hase)	157
7. ストリップサンプリングによる林分材積の推定 (Hase)	197
8. 森林標本調査における周辺効果にもとづく偏りの 除去について (Finney and Palca)	238
9. 大規模収量調査におけるプロットサイズの問題 (Sukhatme)	263
10. 作物収量の変異性を説明する実験的法則について (Fairfield Smith)	281
11. 老令モミ林の調査に用いるプロットの最有効な大 きさと形状 (Johnson and Hixon)	315
12. プロットサイズと作物収量変動間 の 有効な推定法 について (Hathewey and Williams)	329

標本調査による林分材積の推定

Volume Estimation of Standing Timber by Sampling

By D.J. Finney

(Forestry 21 1948 後 The efficiency of enumeration と題して
Bull No.146 For Res.Inst.Dehra Dun India に再録)

標本調査による林分材積の推定

Volume Estimation of Standing Timber by Sampling.

By D. J. Finney

(Forestry, 21, 1948. 後 *The efficiency of enumeration*
と題して Bull. No. 146. For. Res. Inst. Dehra Dun,
India に再録)

1. 緒 言

林分総材積を査定するため、林地の全林木を測定するのに要する時間と費用は極めて大であるから、有用な結果が一層経済的に得られそうに思われる方法があればそれが如何なる方法でも慎重に吟味検討しなければならない。それでも保守的な人々は、林分を抽出調査して求めた立木材積の推定値には十分な信頼がかけないと思っている。しかし誰でも、今日応用科学の多くの分野で手段として採用されている *sampling* の方法に対立した決定を下そうとする場合には、*sampling* の実行に経験を有する人々の主張を注意深く考慮してから行なうべきだということには異議がないに相違なからう。ここでは森林標本調査の完全な解説を行うつもりではなく、サンプリングによる推定が非常に重要であるという確信の例として、また条件の異なる調査の代表的なものとして最近公表された Griffith (1945 a-g, 1946 a-c (6) から (15)), Hase (1938 (16)), Ilvessalo (1942 (17)), Matérn (1947 (20)) および Schumacher and Chapman (1942 (22)) の著書を引用しよう。

著者自身はサンプリングの長所は普通その短所を補って余りあるものであることを確信するもので、Griffith (1946 c (15)) がサンプリングの結果の多方面にわたる研究の結果到達した、*“広範な費用のかかる 100 % の毎木調査から必ずしも蓄積の妥当な推定値を得ることはできない”* という結論に全面的に同意するものである。それにもかかわらず彼は、両者の論議がそれらに含まれる基礎原理の不明確さのために、屢々混乱するということを指摘して

いる。とりわけこのことは、種々の形式のサンプリングの相対的な価値を論ずる場合において著しい。統計学の僅かの知識を身につけてサンプリング調査に従事している人々の意見は、二つの極端な意見の間に分類することができる。ある人々はサンプリングには極く初等的な統計的概念以外には何も必要でなく、現場員には、統計専門家の助言は不要であると主張する。他の人々は、資料や既往に計画された調査の知識がなくても、統計家は特定の精度の結果を得るのにとらねばならない手順を正確に示しうるものだと言明して、彼等を当惑させる。これらは何れも間違っている。サンプリングの実際的な困難を知らないような統計家は、妥当な勧告や殆んどすべてのサンプリングの問題において本質的である統計理論の適用あるいは資料の数値的な分析すら行ない得るとは思えない。一方においてサンプリングの原理とか実行には両方とも論理的に微妙な問題や、また往々にして程度の高い統計理論が含まれるものである。

サンプリング調査においては殆んどすべての場合、便利さとか実用性を考慮して、方法についての多くの決定を下さねばならない。利用し得る時間や労力には限界があり、また机上で最も有効と思われるサンプリング計画でも、その実行に責任を負う調査員の能力をこえるという理由で、採用できないこともあり得る。他の決定、特に抽出単位(sampling unit)の大きさや分布に関しては全く統計的な根拠から決定が下されるであろう。これらは統計の一般理論を参照することによって解決し得るような諸問題と広範かつ典型的な資料数値の詳細な分析を要する問題とに細分することができる。後者の問題においては研究している資料に適切な優れたサンプリングの原則を生み出すことができるかもしれない。問題の型には何もはっきりした差異があるわけではないが、この場合の事情を正しく理解するためには、このような幾つかの分類が重要と思われる。

最近の多くの刊行物はサンプリングの数学的および統計的理論

を論じており、また他の多くは、それらは屢々統計的問題の厳密な認識において欠けるところがあるとしても、サンプリングの技術やサンプリング調査から得られたデータの分析を説明している。この論文の著者の希望は、実際的な考慮の観点を必ずしも失なうことなく、多くのサンプリング方法に対する統計的必要条件を平易な言葉で記述し、統計家のなし得ることとなし得ないことを示すことによつて、これ迄の刊行物の間のギャップをうずめることに主力を注ぐことである。この論文は、現在準備中でシステマティックサンプリング(系統的抽出法)の幾つかの問題を一層完全に論ずる予定の第2の論文の序説の積りで書いたものである。結論の多くは極く初等的であるように思えるかもしれない。サンプリングでの論理的な問題は数学的な問題よりも一般に難かしいから、概念や用語の明白な定義は初めには不必要である。説明は重要でない複雑な要素はめきにして、統計的な問題点を強調する様に注意深く平易化してある。例えば外周が不規則な地域のサンプリングは、原理的には矩形地域のサンプリングと違わないが、複雑な実際問題はこの論文の主目的を不明瞭にするであろう。

2. 推定の目的(The objects of estimation)

サンプリングの方法を論ずる前に、目的について多少の考察を行なうことが大切である。標準誤差(standard error)や相対的効率(relative efficiency)の計算に夢中になった統計家は、時として、彼の推奨する方法の主たる目的である与えられた林分総材積のできるだけ近い数値を得るということを忘れる危険がある。総材積でなく、問題を本質的には変えないまま、考慮が特定の樹種または林木のある種の形質に限定される場合もあるかもしれない。但しその場合にはもし幾つかの樹種又は形質を同時に推定しなければならないとすると、すべてについて満足できる方法を選ぶには何等かの妥協、もしくは何れか一つの目的に対して最適であるような条件を無視しな

ければならなくなるかも知れない。⁽¹⁾

全面積が既知と仮定すれば、総材積の推定と単位面積当り材積の推定とは同じことであり、後者の数値は林分間の比較において一層便利なが多い。

第一のものと重要性において必ずしも劣らない第二の目的は、材積推定値の精度の尺度をなるべくなら慣用されている統計的な用語、即ち標準誤差および信頼限界 (*fiducial limit*) で、もしそうでなければ誤差は特定の値よりも小さいことが殆んど確かであるという様な言い方で求めることである。林分の各部分の毎木調査から得られる推定値は、調査員による過誤を別にすれば、測定値の正確さの限度内では、正しい筈である。ここでは、調査員が十分信頼でき、また彼等への指令も十分明瞭であって、それらの過誤が推定値に与える影響は無視してもよいと仮定する。⁽²⁾

どれ程多くの統計的分析を行っても、現場における粗雑な不注意や、調査員に対する指令のあいまいさによる影響を除去することはできない (cf. sec. 5)。この論文の“誤差”という用語は、その統計的な意味においてのみ用いることにする。

一方、サンプリング調査では、最終的な推定値は、調査方法における過誤 (もしあれば) と、統計的な“誤差”即ち全体から標本を抽出したことに帰せらるべき変動の組合わさった量だけ林分の真の材積と異なるであろう。第二の成分は偶然に抽出がうまく

(1) この論文は、林分の立木材積について書いたものであるが、方法や論法は、他の計量的な測定値についても同様に適用できる。特に林木の総本数またはある範囲に属する数に対しても、同様な方法で考えることができる。勿論その場合、林木材積に最適な方法が必ずしも本数や他の特性について最適であると限らないけれども。

(2) これらの誤差を最小にまで減少するという事は局所的な問題である。それらの誤差は効率的でない管理のもとで経験の少ない、低賃金の調査員を使ったためであることが多い。それらは例えば、調整不良の輪尺、安手の巻尺または修理不完全の巻尺、樹高の過少推定、調査帯の幅を正しく保たなかったこと、混交林での樹種の誤認等々によるものである (Griffith, 1945 a, 161)。調査者の個人誤差はなくすることはできないが、あらゆる可能な手段をとって、他の原因による推定誤差に比べて無視できるくらいにまで減少させるべきである (Griffith, 1945 c, 8)。

いった場合以外では、標本が全体のうちで非常に大きい部分を占めない限り無視できない。それは真の値が既知でないと正確には測定できない。しかし後に論ずる条件の下では、誤差の大きさについて、確率的な論述を行なうことが可能であるから、この推定値が特定の値以上真値からかけ離れていそうもないという主張ができる。

調査が全林毎木であると部分的なものであるとにかかわらず、データは大体ノエーカーないし他の便利な大きさの小単位に対する材積として記録される。

データの第三の用法は、単位当りの材積の多い地域と少い地域を示す林相図の調整である (あるいは、実際に、未知の地域の普通の地勢図の作製に)。

全林毎木の結果をこの用途に用いる場合に必要なのは、唯適当な小単位を置くことだけである。しかし部分調査においては、材積推定に最適なサンプリング方法と地図の作成に最適な方法とが必ずしも一致するとは限らない。この二つは全く異なる問題であって、実際、地図作成に対する最適条件を規定することは容易ではない。この二つの間の矛盾を統計家が解決することは不可能で、ただ研究の第一目的が何かという点での決定によってのみそれが可能となる。この論文は材積推定を取扱うものだから、地図作製が否定できない重要性をもつものではあるが、以下の節では折にふれて論及する以外には添入りしないことにする。

3. 全林毎木および部分調査 (標準地調査、標本調査)

材積推定の場合の全林毎木と部分調査の相対的利点は、他の多くのセンサスや調査の場合と同じく、これまでも屢々論ぜられている。

サンプリングによる部分調査が全林毎木より絶対的な利点をもつわけではない。実際既に指摘されている通り、サンプリングによる推定値は必然的に未知ではあるがある程度の誤差を含むから、

サンプリングで得られる情報は常に森林の与えるもの以下である筈である。もし労力や時間に制約がなければ、常に全林毎木調査が望ましいものである。

事実この選択が単純であることは滅多にない。普通ある林分の推定値を得るために利用し得る時間や労力には限度があり、その最も経済的な配分が考えられねばならない。一林分の全林毎木を実行すべき場合には、他の同様な重要性をもつ林分についてのすべての情報は放棄せねばならないであろう。一方サンプリングの方法は各林分の部分調査を試みるものであるからその結果として、各林分材積の幾何かの情報を得るものである。この二つのどちらを選ぶかの決定は、固有の状況に左右される筈である。明らかにどちらも全く十全とはいえない。

しかし資金の限度のために全林毎木が許されない場合には、どこにも第三の方法は開かれていないのである。従って、サンプリング調査で失われるものは何かという問題には慎重な考慮を払う価値がある。

サンプリングの方法の妥当性をすべて否定しようとする人々には、標本が全体の十分大きい部分を占めている限り、常に十分な推定値が得られるということを指摘できる。極端な例として、ある林の75%からなる標本を調査するとし、あらかじめ他の5%が極端に違った特性をもたない様に措置されていれば、大部分の情報は完全に得られ、小地域の除外は材積推定にはそう決定的な影響はもら得ない。もし大標本が信頼できると考えられるとしても、サンプリングによる森林調査が根本的に無力だということはありません。しかし明らかに75%の標本というようなものは全林毎木に比べて労力の節約は認められないだろう。50%の標本でさえ一般には、大きい経済的利得を得るためには大きすぎる。もし材積推定でサンプリングが実用的な価値をもつべきであるならば、採算上からは、全林分の10%かあるいはそれ以下の地域を調査する場合でも十分信頼できる推定値が導かれねばならない。

この場合統計的な論議ないしは分析が絶対に必要である。一般統計の原理から他のものより効果的なことが立証されそうな或種のサンプリング方法を与え得るかもしれない。しかし逆説的にいえば、資金を最も有利に用いて行なう特定の林の理想的なサンプリングの方法は、この林の毎木調査の結果をまっぴらめて決定できるのである！ このような方法が実際にとられることはまずないから、類るところは似た様な地域について与えられた資料でなければならぬ。もし全林毎木の資料が多数の小単位について別々に集計されれば、それを用いて色々なサンプリング方法でどれ位の精度が得られるかを示すことができる。無作為抽出(random sampling)調査の記録も、将来の同様な調査で生ずるとと思われる抽出変動を示すのに役立つであろう。そうしてそれは、調査される地域もしくは抽出単位の分布において実際に用いたものと異なる他のサンプリング方法の抽出変動についても有用な知識を提供するであろう。しかし一つの調査の結果から、他の非常に似通った林分について、あるいは無論のことであるが、非常に異なる林相の林とか世界の他の部分にある林の調査で得られる精度について、信頼できる指針が求められるというような保証は全くない。それにもかかわらず、数値的なデータの広範な研究によって、単位地域当りの材積変動の性質や大きさについての知識を積重ねれば、サンプリングについての将来の勧告は現在より更に広い基礎にたって行い得るであろう。

4. 用語 (Terminology)

サンプリングの文献中に見られる色々な概念や方法についての用語は、著者によって非常にまちまちである。今日如何なる著者であってもその用法を、彼等の先駆者と全く一致させ得る者はいないであろう。しかし彼は自分自身の実行では少くとも首尾一貫しようとすることはできる。この節において与える定義を認識することは、問題を紛糾させる困難の一つをとりのぞく一助となる

であろう。

ここでは採用した用語は必然的に、何が最良であるかという個人的な信念（それは今日行なわれているものと一般的には一致する考え方であるが）を反映するものである。

林地の周囲が規則正しいような場合は稀であるが、周囲が不規則であっても、ただサンプリングの計算が面倒になる丈で根本的な考え方は変わらない。

サンプリングの記録の計算例も屢々説明されており、不規則な外縁の林の場合に必要な修正も、例えば、schumacher and chapman [1942 (22)] によって与えられている。ここでの目的に対してはこのような複雑さは無視してよい。

以下においては、ノ樹種のみを推定するためにとられた1000チェーン×100チェーン、即ち10,000エーカーの矩形林分の例について論じてゆくことにする。この林分は天然生林と考えられるから、系統だった造林は行なわれていない。

毎木調査 (complete enumeration) は林分の総材積を、すべての木の測定値から決定することと解釈される。一方標本調査 (sample enumeration) は10,000エーカー中の一部分例えば、全部でAエーカーを測定することである。全材積の推定値はこれにもとずいてAエーカーの材積に10,000/Aをかけて得られる。このAエーカーは全林の一標本 (sample) で、これの林分総面積に対する比を抽出比 (sampling fraction or intensity of sampling) という。

標本を構成するこのAエーカーの調査は、普通より小さい多数の抽出単位 (sampling units) について行なわれる。標本とそれを構成する抽出単位とは明確に区別されなければならない。他の着者達はそれぞれの抽出単位を屢々「標本」と呼んでいるけれども、この論文においては以上の区別を厳密に守ることにする。

森林のサンプリングにおいては抽出単位は普通任意に定められた小地域である。例えばこの単位が5チェーン×5チェーンの矩形であるかもしれない。従って標本にはA個の単位が含まれる。

また、単位が林を横切る巾又チェーンの帯 (strip)、即ち面積20エーカーの地域であるかもしれない。この場合には標本にはA/50個の単位が含まれる。抽出単位は、この場合のように林分を任意に細分したものであることもありまた抽出される対象で自然に生じた単位のこともある。抽出単位は必ずしも唯一つのまとまった地域である必要はなく、一定距離の数個の小地域からなってもよい。例えば、等間隔の非抽出地域をはさむそれぞれ10チェーン×5チェーンの二つの矩形地域からなってもよい。⁽¹⁾

Yates および Zaccopani [1935 (27)] は畝作りの作物のサンプリングにおける種々な形式の複合抽出単位を例示し、それらの幾つかは林地のサンプリングにも適用できることを示した。抽出単位はすべてが同じ大きさ (size) でなくてもよいが、予想されるような複雑さは今の論議からは省略することができる。材積の標本推定値の精度が評価できるための必要条件は、抽出単位毎の記録が得られることである。⁽²⁾

ある場合には、過去の同様な調査結果を調べることによって、設計された調査計画の精度の、妥当かつ信頼できる予想が可能のこともある。その場合でも総計のみからは新しい調査の結果に適切な数値を導くことはできない。

毎木または標本調査についてその細部が記録される最終単位 (ultimate unit) を記録単位 (recording units) とよぶ。これらは抽出単位と同じであるかまたはそれよりも小さい。それらは分子即ち抽出単位を形づくる原子である。例えば抽出単位が10×10チェーンである場合には、これそのものが記録単位となってもよい。また100チェーン×5チェーンのstripからなる抽出単位では、stripを

(1) 実際系統的標本 (systematic sample) (後述参照) は、等間隔でとられた抽出単位の集合、あるいは多数の部分からなる単一の複合単位と考えることもできる。第二のものは普通の標本とは少し違ふがこのような標本の精度が何故その構成部分から直接求めることができないかということを示す上では有益である。

(2) 厳密にいえば、単位の特定の群に対する合計で十分であるが、しかしこれに実務的な利益があるとは思えない。

5チェーン毎に区切って別々に記録を行なうかもしれない。従って各抽出単位は20個の記録単位を含むことになる。抽出単位を記録単位に細分することは、Griffith (1945, a. 6 および 7) のいう“調査野帖の終り”に相当する。調査の目的だけについていえば、本質的なことではないが、普通ある一つの調査での記録単位は皆同じ大きさである。sec. 9 において、抽出単位を記録単位に細分する方法如何では、総材積の推定ないしその精度の評価が変わらないことを示す。総材積の推定あるいはその精度の評価は、ともに完全な抽出単位にのみ依存するものである。しかし記録単位について得られる詳細な数値は、現場における他の便利さは別として、色々な抽出組織のもとで見出されと思われる精度を測べるのに役立つから、サンプリングの技術の改善の資となるものである。このようにして標本調査から得られるデータはこれらの単位の色々な形式の副次抽出 (sub-sampling) (後述参照) を研究するのに用いることができる。毎木調査で得られるデータも、記録単位を色々な抽出単位に再組分けすれば同様に用いることができる。勿論この用法は、利用できる“原子”から構成できる“分子”の種類によって限定を受けるし、また小記録単位内の毎木調査はそれが研究できる潜在的な抽出単位を広い範囲にわたって含むということから特に貴重である。

無作為抽出と系統的抽出を推奨する人々の間の論争は数年にわたって進行しているが、これは今日の森林標本調査においては重要な論争である。この二つの比較はあとの節および論文で主要問題としてとりあげる。

単純、無作為抽出は原理的にサンプリングの最も簡単な形式のもので、他のサンプリングの方法もそれと関連づけなければ正しく理解できない。確率標本 (random sample) はそれを構成する各抽出単位の選出が、他の抽出単位とは独立に行なわれるものである。統計家が確率抽出 (random selection) という場合、彼の言っているのが乱数表を用いたり、よくかきませた沢山のカードからする偏り

のない抽出、よく釣合いのとれた銅貨またはサイコロ投げ、あるいはこれらと同等な行為による全く確率的な方法であることをあまりはっきりさせることはできない。彼はすべての抽出単位のリストを作り、例えばこのリストから各20番目毎の単位をとって5%標本を得るというふうな系統的抽出 (systematic selection) は含めていない。勿論リストの順序そのものが厳密に確率的となっていれば、このような手続によって本当の意味の確率標本が与えられるであろう。また例えば、アルファベット順になった名前のリストを抽出するときのように、ある種の状況下ではこのリストの順序が研究している性質に関して確率的であると仮定してもよい場合がある。しかしある地域の土地のサンプリングでは、連続した抽出単位または記録単位の順序は、土壌あるいは植生の何れについても確率的ではない。そうしてどの場合でも規則的な間隔で単位をとるのが有利であるが、その結果得られる標本は確率的とは考えられない。“でたらめな (haphazard)” 抽出もまた確率的とは考えられない。経験によれば、小皮細に輪を投げ込んだり、抽出単位の見出し番号を“無作為”であると考えたりするでたらめな方法も、たとえそれが公正に計画され実行されたとしても重大な偏りを招くことが多い (Yates, 1935 (24))。標本が確率的であるか否かということは、それを構成する抽出単位の特定の組のもつ性質ではなく、むしろ、これらを全体から選出す一連の操作の性質なのである。

単純無作為抽出 (unrestricted random sample) は、調査対象を抽出単位に細分した母集団から、ある厳密に確率的な方法、例えば全部の単位に番号をつけ、必要個数の番号を籤引または乱数の助けをかりて無作為に抽出するものである (Yates, 1946 (26))。例えば、抽出単位がノーカー即ち5チェーン×2チェーンであれば、10,000エーカーの地域は各20単位宛の500列に分割される。5%の単純無作為標本は、それぞれ確率的、かつ他のすべてと独立に抽出された500単位からなるであろう。このような標本は、

単位に 0000 から 9999 までの番号をふり、互いに異なる 500 個の 4 桁の見出し番号を乱数表から選ぶことによって作ることができる (Fisher and Yates, 1947 (5); Kendall and Babington Smith, 1939 (18))。すべての可能な 500 単位からなる組が標本として選ばれる機会は何れも同一である。実際では、この抽出計画が採用されることは稀である。その理由は、標本がこの林の大部分の地域の代表となり得なかったり、これと別な地域の方が非常に良い代表となるかもしれない危険性があるからである。抽出単位の分布がより一様となるために更に有用なのは、ある形式の制限 (restricted) 即ち層化無作為標本 (stratified random sample) である。全地域はまず多数の層 (strata) またはブロック (block) (sec 8 を見よ) に分割される。そうして標本は各ブロックからブロックの大きさに比例してとられた抽出単位からなる。ブロックの大きさがすべて同一な場合が多いが、しかしこれが絶対に必要というわけではない。5% 標本については、ブロックの大きさにかかわらず各ブロック内の単位の 5% が抽出される。各ブロックからの単位は無作為に抽出され、事実上これらはブロックの全単位から抽出された単純無作為標本となる。例えば再び 5% の抽出比についていえば、10,000 エーカーはそれぞれ 100 個の 1 エーカー抽出単位を含む 100 個の 100 チェーン × 10 チェーンのブロックに分割される。全部で 500 単位の標本を作るために各ブロック内から、全く無作為に 5 単位が選ばれる。一方この地域が、各々 20 単位の 2 列からなる 250 個のブロックに分割されるかもしれない。このときには各ブロックの 40 個の単位の中から無作為に 2 単位が選ばれるであろう。他の配置では、各々 20 単位からなる 500 個のブロックで、それぞれのブロックから無作為に 1 単位が抽出されるかもしれない。層化無作為標本はある点において圃場実験において屢々用いられる「乱塊計画 (randomized block design)」と類似している。

前節において、各ブロック内の全単位数のうち同一割合が標本

としてとられねばならないという条件が課せられた。Neyman (1934, (21)) および Yates (1946, (26)) は変動の多いブロックでは抽出率を大きく、また変動の少ないブロックではそれに対応して抽出率を小さくすれば最終的な推定値の精度が向上するということを描した。従って推定値は単なる全標本の平均値からではなく、まず各ブロックの平均値を推定し、次にこれらをブロックの大きさの割合で結合することによって得られる。しかし森林のサンプリングにおいては、種々のブロック間の抽出単位の変動性に対する予備知識が得られることは稀であるから、このような可変抽出比 (variable sampling fraction) のサンプリングが用いられることは少ない。Mahalanobis (1944 (19)) は標本調査法を極めて詳細に論じた、彼の所謂「費用函数 (cost function)」で表わした時間と労力の利用効率について特別な考察を行っている。彼が抽出単位の適切な配分によって達成した効率 (efficiency) の利得は、主として可変抽出比を用いた結果であった。Yates は、抽出比に対する非常に大まかな補正でも、ブロックの変動性が非常に大きく違う場合には精度を著しく改善させることを観察している。

そうして彼は、ブロック内の変動についての情報が、可変抽出比の利用を可能にする場合には常にこの有利な方法を採用すべきであると述べている。この方法はここでは詳しく論じない。周囲の不規則が原因で、ブロックの大きさおよび形状が理想的なものと違って来るために、森林のサンプリングで生ずるブロック毎の僅かで不可避的な抽出比の変動は、この面倒をひき起すものと考えなくてもよい。それでもこのような原因によって偏りが全材積の推定に入りこまないように注意しなければならない (sec 5)。

系統的標本 (systematic sample) は、全抽出単位のそれぞれの間の相対的位置が、確率的な選び方によらず前もってある形式に従って決定されるものである。最も一般的な形式は、単位を一定間隔でとるものである。例えば、前と同じ 1 エーカーの抽出単位

についていえば、5列毎の各第4番目の抽出単位をとってゆけばこの林の5%標本が得られるであろう。

このような特別な形の単位の配置は屢々、格子標本 (grid sample)とよばれるものである。その理由は、単位がこの地域上に設けられた4×5個の格子の“かど”に位置しているからである。系統的標本はその最初の抽出単位的位置が、あるきまった規則で定められているかあるいはまた可能な位置のうちから無作為な方法で定められているかによって、二種類に分類できる。

確率標本 (random sample) と系統的標本 (systematic sample) は客観的な標本 (objective sample) である。このような標本を構成する抽出単位は、確率的な操作を含むこともあり含まないこともあるがある規則に従って抽出されて、単位が林分の真の“代表”であるかどうかに関する個人的判断には左右されない。標本としてとるべき林地が、それが林分を代表するものであるか否かという調査者の認定によって選出されるような標本は、主観的な標本 (subjective sample) として分類できる。

ある種の林分、特に下層植生の密生した熱帯林などは、孤立した小抽出単位的位置づけや調査に非常に費用がかかるであろう。各単位に対して、遠く離れた基線から経路を伐開しなければならぬだろうから、調査の費用そのものは路つけの費用に比べて少なくてすむと思われる。このような状況のもとでのより満足な抽出単位は、基線と直角に交り林を貫通して走る細長い strip である。このような単位は前に論じたものより相当大きくなるが、路つけの困難を考えに入れれば、単位当りの費用は単位の大ささには比例しない。十分な精度を得るために必要な抽出比は、おそらく小単位の場合よりも大きくなるであろうが (sec. 9), しかし費用を決定する最も重要な因子である総単位数は減少するであろう。

この形のサンプリング、即ち帯状抽出 (strip sampling¹⁾) は無作為のこともあり系統的のこともある。

1) strip sampling は時に “line sampling” ともいわれる (Matérn, 1947 (20)). しかし、偏りをなくするために確実に一定幅を調査することの重要性を考えて、line よりむしろ strip を強調する方が賢明なように思われる。

もし 10000 エーカーの林分を横断する幅2チエーン (2 chains) の strip 抽出単位を選ぶなら、各単位的面積は20 エーカーとなるから全林には500個の単位が含まれる。10%の単純無作為標本をとるには全く随機的な手続で50個の strip を選ばねばならない。層化を導入するには、50 strip からなる引続く10個の群を10のブロックと考え、それぞれの50個の strip から5つを無作為に抽出するか、あるいは20 strip からなる引続く25群をブロックと考えて、それぞれの中から2 strip を抽出すればよい。10%の系統的標本は普通10番目毎の strip が含まれるようにして抽出される。標本の第一の strip は、例えば500の5番目あるいはまた最初の10個の strip から無作為に1つを選ぶというようにして任意に定めることができる。系統的標本の条件はただ個々の単位が前もって定められたある型に従って位置づけられることで、それらが全く規則的な間隔で配置される必要はない。巻7, 13, 27, 33, 47 ----, 493の strip からなるように選ばれた10%標本は系統的標本である。しかし完全な規則性を有するものが最も普通で、かつ最も有用である。この章においては、標本抽出で採用し得る色々な原則の簡単な大要を述べた。より少ない費用のもとで特定の精度を与えるようなもっと多くの修正や拡張が考案されており、それらはある種の状況下では優れている。これらの一つは、それぞれの一次抽出単位 (primary sampling unit) をより小さい副次抽出単位 (sub-sampling unit) に分割する副次抽出 (sub-sampling) の方法である。従ってサンプリングは、まず一次単位を抽出し、次に選ばれた一次単位のそれぞれを副次単位によってサンプリングするという二つの段階で進められる。二重抽出 (double sampling) の方法は、第二の量——これは材積 (または調査の任意の他の主題) と非常に高い相関を有すべきである——を各単位について測定するものであって、これは更に研究と開発を進める価値を有するものである。この補助変量 (concomitant variable) は、標本の回帰式を利用する抽出、釣合のとれた抽出あるいは有

目的な選出 (purposive selection) の何れかについて、最初の変量の変動を規制するものとして用いられる。

しかしこれらの巧妙な方法は、潜在的には価値があるけれども、この論文の範囲をこえている。この統計的手法は、Cochran (1942 (23)), Neyman (1934 (21)), Schnacher および Chapman (1942 (22)) および Yates (1946 (26)) によって論じられている。

5. 推定における偏り (Bias in Estimation)

無作為抽出を要求されている段階においてはいつも完全な確率化を含む手続を用いるようにして、推定を繰返すとき、非常に多数回の繰返し全体で結果を平均すると、推定されている量の真値とかけ離れが生ずる様な場合にはこの推定値は偏りがあるという。全林毎木は、その実際の性格から不偏である。というのは、結果が真値であるから調査を繰返しても常に同一の値を与えるであろうから（もし測定の過誤が無視できると考えられれば）である。標本調査が真値を与えるという保証は与えられないしまた稀な偶然を除けばその様なことは起らない。実際ではその誤差は未知であるが、このサンプリングの方法が推定を無限に多数回繰返すとき、平均的に正しい結果を与えるようなものとなるための条件を規定することができる。この繰返しは概念的で現実のものではないが、抽出手続の繰返しによって多数の推定値を作り出すという考え方は、偏りや抽出誤差の評価の研究で根本的なものである。

サンプリングの目指す理想は、標本を可能な限り代表的なものとするところであるから、その測定値や観測値は全母集団についての似通った測定値と事実上同一と考えることができる。この理想が標本をとる場合の調査者の心の中にあるという事実は、もし彼に選択の自由性が与えられるなら当然その選出に影響を与えるものである。異常なものの代表を選ぶ場合の抽出者はその大部分が、正常なものを選ぶ場合と同じく、慎重に他の範ちうに属する異常性によって釣合をとろうとするであろう。不幸にし

て、個人的判断によって“代表的な標本”を選出しようという抽出者の要求は、大部分根拠のないものである。事実彼の抽出には心理的および物理的なあらゆる種類の偏りが含まれる。これらの偏りを避けるためのより厳密な抽出法が考案されている (Yates, 1935 (24))。

Yates は、“もし偏りを免れないなら、標本抽出は、対象の性質に影響されないような手続で決定され、調査者の側のどのような選択の要素からも拘束されてはならない”と述べている。偏りを確実に回避するただ一つの方法は、標本抽出に厳密な意味での確率化を導入することである。単純無作為標本には偏りはない筈である。というのは、特定個数の抽出単位のどのような可能な選び方も、一つの抽出で現われる確率は同一であるから、抽出を繰返えせば結局においては、すべて同等な頻度で生ずることが確かめられるであろう。層化無作為標本も、各ブロックから抽出される単位数とブロック内の総単位数との比（抽出比）が同じであれば不偏である。一定抽出率を用いると或ブロックでは個数が整数とならないとか、抽出率をわざと変化させるとかの為この比例関係がくずされると、或ブロックが他のものより十分に代表されることとなる。従ってこのような標本で、全単位の単純平均から推定値を計算すれば偏りが生ずる。しかし、任意のブロックで抽出された単位を用いてそのブロック平均の推定値を求め、次に各ブロック平均にそのブロック内の総単位数を乗じて全材積の不偏推定値を導びくというようにすれば、補正は容易である。抽出比の変動が、林地の外縁の不規則さのためにブロックの大きさが僅かに変化したということだけから生じたものであれば、標本内単位の単純平均にもとづく推定値を用いた場合の偏りは小さい筈である。しかし特定の調査での計算から無視できることが示されない限り、その削除は常に結果に影響する。

例えば林の5番目の strip から始めるという規則で得られた系

統的な strip 標本は、与えられた厳密な定義に従って偏りをもつであろう。何故なら、抽出を繰返しても常に同じ標本が得られるが、この標本の平均材積は一般には林分平均とは一致しないからである。しかしこのような標本は客観的なものであるから、色々な林で一連の抽出を行なえばこの偏りは平均されてしまうことが期待できる。この推定値は一つの林分では偏りをもつがしかし同じ規則に従って標本抽出が行なわれる非常に多数の林に関しては、おそらく不偏であると考えられるであろう。一方この標本にはいつまでたっても林の一方の端の strip は含まれないが、これらの材積が中央の strip より一様に少く多いという傾向があるかもしれない。この原因による偏りは非常に面積の大きい林では無視できるが、普通のサンプリングでそれが存在するとか重要だとかいうことは、多数の林の資料を照合しなければいうことができない。全面積が標本面積の丁度整数倍でない限り、可能な標本から得られる推定値が真値に対する本当の平均とはならないとしても、標本の最初の strip を確率的に選べばこの偏りは大部分除去できる。簡単な例として、33 個の strip の 10% 標本を考えよう。最初の strip を 1 から 10 迄の数の中から無作為に選ぶとき、同等に可能な 10 個の標本のうち 3 つには 4 単位、7 つには 3 単位が含まれる。従って 10 個の可能な推定値の平均は 33 個の strip の真の算術平均とは異なるであろう。しかし大きい林でこの様な効果が重大となることは稀である。

しかるに調査者の意志に忠実に従って、主観的に選ばれた標本では非常に重大な偏りが生じやすい。この理由のために、もし他に何もなければ、多分事前の調査以外にはこれらの方法を絶対に用いてはならない。Yates (1935 (24)) および Cochran と Watson (1936 (1)) は、代表的な標本を選ぶために、最も公正な観測者の個人的判断を用いる場合でさえ、非常に大きな、かつ予測し得ない偏りが生ずるという例を与えている。結果が将来の推定値に対して信頼できる補正を与えると考えられる場合でさえ、

個々の観測者の個人誤差を評価するということは殆んど不可能である。故に抽出の客観性ということが、優れた抽出計画の第一要件である。

これまでのところ、偏りについての議論は採用された抽出技術に固有の偏りに関連するものであった。偏りは抽出の指示を厳密に守らなかったり、またこれらの指示を十分良く定義しなかった場合にも生ずる。偏りを避けるために抽出単位や記録単位の区別もしくは調査においてとらるべき予防措置の検討は、この論文の範囲外である。それでも、客観性保証のために厳密な規則を作成するということの重要性は強調できる。著者は森林のサンプリングに個人的要素が入りこむことによって生ずる偏りについては、数値的な資料を有するものではないが、しかし証明の欠陥はおそらく危険がないということではなくむしろそのような研究が行なわれていないということの結果であろう。圃場作物のサンプリングにおける非常に関連の深い問題での経験では、抽出単位の配置が厳格に客観的な手続で行わない場合には、観測者は高収量のもを無意識的に選び易いということが示されている。Yates (1935 (24)) はこの現象の例を与えている。例えば、無作為抽出によって、ある抽出単位的一端が基線から 115 ヤードの位置にあるように定められているとき、偶然この数値と数ヤードの違いが生じても大した問題ではない。重要なことは観測者がその抽出単位の間にある客観的に測定された標示点に固定させることであって、どのような“便宜”のためくしたがって無意識的な偏りを導くこととなる/)にも数フィートの移動たりとも許してはならないということである。

毎木調査においては記録単位の面積を正確に測定することや、周辺のある木がその単位の内部であるか外部であるかというような決定は重要ではない。というのは、この調査ではどの木も一回は記録されしかも一回だけ記録されるからである。

標本調査では単位の測定値のどのような偏りも、また周辺の(端

界線上の) 樹を適当な割合以上含めたり除外したりするどのような傾向も、単位面積当り材積の重大な過大または過少推定を導びくであろう。抽出単位が小さい場合には、単位の注意深い測定と周辺木に対する偏りのない規約が特に重要である。周辺木はその横断面が半分以上記録単位内に入っているとき、かつそのときのみその単位に含めてよい。もう一つの、そしておそらくもっと容易に行なえる規則は、任意の一つの木がその単位にどれ位入りこんでいるかは考えずに北および西側の周辺上の木をすべて含め、南および東の周辺上の木はすべて除外するものである。

Sukhatme (1947 (23)) は非常に広範な実験の結果として、抽出単位を小さくするとき、小麦および米の収量の過大推定が非常に多くなるということを見出した。明らかに、単位内の作物以外のものを標本にとりさえしなかったらこのようなことは生じなかったであろう。しかし注意深く管理された調査でそれが起ったということは、人為的な因子を除去することが如何に困難であるかということを示している。森林のサンプリングでの単位は、Sukhatme の数平方ヤードの単位より相当大きい、それでもこの種の偏りは容易に起り得るのである。

6. 推定の精度 (Precision of estimation)

サンプリング理論の論議でよく行なわれるように、精度 (precision) なる用語はサンプリングを繰返したときの推定値の再現可能性の意味に限定して用いる。あるサンプリングの推定値は非常に偏っているかもしれない。しかしそれでもこの抽出手続を繰返して常に殆んど同じ値が得られるならそれは精度が高いといわれる。また推定値に偏りがなくても非常に低い精度の場合もある。例えば、無作為に選ばれたノエーカーの単一標本にもとづく 10,000 エーカーの材積の推定値は、偏っていないかもしれないがしかしこのサンプリングを繰返せば、おそらくこの結果が再現可能ということとは程遠いことが示されるであろう。ここでもまた無限回の抽

出手続の繰返しという概念が定義に本質的なものである。

“精度”のこの正確な用法を真値への接近の意味の“正確さ”と混同してはならない。通俗的な正確さの考え方は不偏性と精度の両者を含むことを意味する。即ちそれを平均した結果が真値となり、またその平均に対する個々の標本のかけ離れが小さいということの両方を意味する様に思われる。科学的な目的には、これら二つの問題はそれらを支配する要素が全く異なるものとして切り離して取扱うことが必要である。従って正確さという言葉はこの様な意味では用いないことが望ましい。その代りもし必要なら、標本を構成する項目 (item) の測定値の正しさやそれにつらなる計算の算術的な正しさを指すのに用いることができる。

単純および層化無作為標本 (但し層化の場合には、抽出比の変化に対する適当な補正が行なわれることが必要である) からは不偏推定値が得られる。しかし層化は一般に抽出率が一定なら精度を増加させる傾向がある。何故なら、層化標本では、林分のある部分を極めて不当に代表している抽出単位を選ぶような極端な抽出は起り難いからである。系統的標本の精度は論争があるが、それについては sec. 9 で更に述べることにする。

精度の数量的な尺度には推定値の分散の逆数即ち逆分散 (*inverse variance*) (即ち、推定値の標準誤差の自乗の逆数) を用いるのが普通である。この値は、サンプリングを繰返したときの推定値の再現可能性が改善されれば増加するという、精度の尺度に当然必要とされる性質をもっていることは明らかである。しかしこの特別な尺度を選ぶのが妥当であるということの証明は、統計理論の標準的な書物から求めなければならない。

7. 抽出単位の大さきと形 (Size and shape of sampling units)

任意の特定の調査に対する抽出単位は、その大きさはかりでなく形についても全く統計的な考察から決定することができるが、実用上の便利さも考慮しなければならない。それにもかかわらず、

単位を選択には一般統計理論の指示と過去の経験での証拠が極めて重要である。ここでは矩形および正方形の単位のみを論ずることとする(不規則な外縁をもつ林の林縁部の単位は、統計分析に重大な影響を与えないで多少変更することができる)。農作物のサンプリングでは、円形又は三角形の単位が位置づけの容易さのために幾分有利である。しかしこれらが森林で煮く採用できるとは思えない。それでも次の節の一般的な論議は、どのような形の単位にも適用できるものである。

一定抽出率のサンプリングでは、小数の大きい単位を用いるよりも多数の小単位を用いた方が単位をより一層林地の全域にわたって配分することができる。従って林のより良い代表を与え易いから、材積の空間的な分布が全く確率的でない限り、材積のより精度の高い推定値が得られるであろう。もし標本をとる費用がその大きさにのみ(即ち抽出比にのみ)関係するなら、最良の方策は実用に供し得る最小の抽出単位を用いることであろう。実際、標本の大きさが一定の場合でも費用はある程度まで調査されるべき単位数が増すにつれて増加する。従って最も経済的な単位は、過去の経験と費用の推定にのみもとづいて決定できる。非常に小さい単位を用いる場合に生ずる偏りの可能性については既に注意しておいた(sukhatme, 1947(23))。注意すべきことは、記録単位の大きさは、小さい記録単位をとって抽出単位に偏りが生じない限り、その選択は全く便宜に行ってよいということである。

もし単位面積当りの材積が肥沃度の勾配あるいは他の同様な理由のために直角な二方向のうちの一方で変動が大きい場合には、この方向と平行に走る細長い抽出単位の方が、一般に同じ面積の正方形単位より精度が高い。単位間の変動は、各単位が高収量と低収量の区域を横断するという傾向のために減少するであろう。肥沃度の勾配についての精しい情報あるいは少なくとも地勢と結びついた材積の起り得る変動の徴候がない限り、おそらく正方形単位が最も良好なものである。林の特性から strip サンプリング

を採用しなければならない場合には、抽出単位は他の形式のサンプリングで普通に用いられるものより一般に大となる。従って単位は細長くなるから、基線は着しい傾向が予想されるような方向と直角に選ばなければならない。最後の節の論議は、小数の幅の広い strip より多数の細長い strip を用いるべきことを示しているが、この場合にも精度の純統計的な概念はサンプリングの経済的な面との関係において考察すべきである。最適な抽出単位の大きさについて与えられる情報に関し既往の記録を調べると、これには、通例用いられた記録単位から構成できる色々な大きさの単位に適切な分析が含まれるものである。この様にして、層化および非層化の場合の種々のサンプリング計画で予想される精度が評価でき、またこの計画の費用の評価との比較が可能となる。偏りがないと仮定すれば、特定の林に対して定められた費用のもとで最大の精度を与えるようなくあるいは特定精度のもとで最小の費用を与える)抽出単位および層化方法は、この林に対して最適と考えることができる。故に同様な林と比較を行なえば、ある方法がすべてに対して最適であるあるいは最適に近いことが示されるから、これを一層似通った林について将来も用いる方がよいことが示されるであろう。このような手続の例はサンプリングの多くの応用分野において数多く発表されているが、Yates と Zaccopani (1935(27)) は特に詳細な検討を行なっている。統計を知らない人々の屢々見落す重要な点は、ブロック当り少くとも二つの抽出単位を含む任意の無作為抽出の記録から、同一層化方法で抽出率が異なる標本の推定値の精度を予測できるということである。全林毎木が行えるときには、与えられた層化方法の任意の抽出率で得られる推定値の精度を簡単な分散分析から予想することが可能であり、またこれは調査から一ニの見本的な標本を構成する普通の方法よりも常にずっと優れている。

抽出すべき地域が大体矩形の場合には、当然この矩形の軸の向きに矩形抽出単位が定められるであろう。この論文の説明

の例に用いた1000チェーン×100チェーンの林では、実用性と過去の経験から、立ち入った議論は5チェーン×2チェーン（ノーカー）またはこの矩形を横断する幅2チェーン（20エーカー）の抽出単位の何れかに限定するものとする。

8. ブロックの大きさや形 (Size and shape of blocks)

層化の主な目的は、林の単位面積当りの平均材積が非常に大きく違っている場所を分離することである。ブロック間の地域はできるだけ斉一にしなければならない。地域特性について事前の知識が得られないときには、当然ブロックは林を簡単に分割したものとなるが、しかしブロック間を斉一にする為の計画には、材積の変動の指針を与える既往の肥沃度または地勢の知識を活用すべきである。理想からいえばすべてのブロックの形は同じ方がよいが、実際の場合には多少の変更は許さるべきである。

ブロックは小さい程その中が一樣となると思われる。結局与えられた抽出率および抽出単位の大きさに対する精度はブロック数を可能な限り増加せるとき最大となるように思われる。しかしこれには各ブロックから少なくとも一つの抽出単位をとらなければならないという制限のために絶対的な限界が設けられる。

もしこのサンプリングが同時に材積推定値の標準誤差をも求めるものであれば、ブロックの数は、その各々から少なくとも二つの抽出単位がとれるようでないといけない (sec. 9)。stripサンプリングでのブロックの大きさや形の選び方には更に多くの制限がある。しかし大きさを減らすときの目標は、各ブロックで必要なのは二単位のみである（誤差の評価が必要でないときは一つ）ということをおかねばならない。勿論ブロック当り二単位以上を用いたからといって統計理論が無効となるわけではない。より大きいブロックや更に多くのブロック当り単位数を用いてもよいし、またある場合にはその方がずっと便利ことがある。

9. 無作為抽出と系統的抽出 (Random and systematic sampling)

層化標本であるか否とにかかわらず、無作為標本から導びかれた推定値の精度は、独立に抽出された抽出単位間の変動から評価することができる。誤差評価の標準的な統計的手法（それは普通「分散分析」として知られている形のものである (Cochran, 1939 (2))）をここで述べる必要はない。独立に選ばれた単位（そうしてこれのみ）が、サンプリングを繰返すときに生ずると思われる変動性の知識を与えることを注意すれば十分である。単純無作為標本では、この計算に標本のすべての単位間の差を用いる。層化無作為標本では、ブロック内変動のみが推定値の精度に適切なものであるから、ブロック間の変動を表わす成分を全体から差引かねばならない。ブロックを小さくしてその中を一樣とする理由は、それによって残差即ちブロック内変動を小さくするためである。

推定値の「真の」精度と、一つの標本の内部的な証拠から計算されるその評価とは明確に区別しなければならない。この区別は全材積の真値とこの材積の標本推定値との関係に似ている。どちらの場合も真値は常に存在する。しかし何れも標本から正確には導びくことができない。標本にブロック当り最低二個の抽出単位が含まれていれば、「ブロック内」の平方和を求める計算が常に実行できるから精度の評価が可能である。

もし各ブロック内で調査された抽出単位が唯一つだけであれば、ブロック内の「独立に選ばれた抽出単位間の変動」は何も測定できない。従って精度の評価は全然不可能である。一方もし、それぞれ調査されるべき単位を二個づつ含むようなブロックを用いるある抽出計画を修正して、ブロックを半分に分け、各々から二単位づつをとれば、 $\frac{1}{2}$ ブロック間の変動は既に説明した一般原理に従って削除されるから、精度の向上が期待されるであろう。特に $k=1$ とおいて、ブロック当り2単位を要求している計画を $\frac{1}{2}$ ブロック当り1単位をとるよう修正すれば、この標本からはもはや精度を評価し得るデータは求められないにもかかわらず、全

材積の推定値の真の精度はおそらく増加するものと思われる。

結局もし林の無作為標本がそれ自身の誤差の推定値を与えるべきであればある特定の抽出率に対する可能な最小のブロックの大きさは、各ブロックから二つの抽出単位がとられるようなものである。誤差の推定値が必要でなければ、同一サイズの標本の真の精度を向上させられると思われる、これらのブロックを半分にする分割が望ましい。ブロック当り1つだけの抽出単位を調査する計画では、誤差の評価ができないばかりでなく、その二倍の大きさのブロックとブロック当り二つの単位を用いるときどれ位の精度が得られるかということも推定は不可能である。材積推定値の抽出誤差に対する上限（即ち精度の下限）は、隣接するブロックの対の中の抽出単位間の平方和から求めることができる。しかしこれは小ブロックが最も有効となるような状況では、あまり役に立たないように思われる。その理由はそれが誤差を過大推定する程度は、ブロック内の（未知の）変動と比較したブロック間の異質性の程度に依存するからである。それにもかかわらず、経験からブロック当り2単位のブロックサイズや抽出率を選んで十分な精度をもつ推定値の得られることがはっきり確信できれば、屢々より高い精度を追求することの根拠が与えられる。しかしその測定値は更に $\frac{1}{2}$ ブロックへの層化が行なわれるために犠牲となる。

今までこの章では無作為標本のみを取扱ってきた。もし林の個々の抽出単位の立木材積が全く確率的に分布しているなら、隣り合った単位の数値は互いに全く独立であるから、主観的に抽出された標本も単純無作為標本と同等になるであろう。そのような標本からは必ず全材積の不偏推定値が得られ、またその精度は標本の大きさのみから決定できるであろう。分布が必ずしも確率的でない場合でも、ブロック分けをして、それらの単位当り平均材積に違いはあっても、その一つ一つの中の個々の単位の材積が確率的に分布するというようにできるから、各ブロックで同一割合を調査するように要求されている客観的な標本は、対応する層

化無作為標本と同等となるであろう。どちらの場合でも、確率的な配列が林の自然的な性質であることが想定されているから、調査者によるそれ以上の層化は不要となる。実際の場合にこれらの条件が実現することはないであろう。事実系統的抽出法が屢々支持される所以の一つは、林が確率的であるというよりはむしろ、任意のブロックの組の中の隣接する抽出単位間の材積に系統的な傾向のあることが予想されるからである。⁽¹⁾

無作為に選んだ抽出単位について研究したことのある人々にはよく知られていることであるが、非常に極端に悪い配置の生ずることはブロックの制約のために妨げられはするが、これらの分布が、偶然によって非常に悪い地域を代表させないまま残すというようなこともありうる。一方系統的標本は全林に規則的に分布した単位から構成されねばならない。結局、隣接単位の立木材積に層化で簡単に除去できない位の相関があるということになれば、系統的標本がはるかに代表性に富むことが期待され、従って同じ大きさの無作為標本よりも精度のよい推定値を与える。しかしこのことが必ずしも正しくないことは、極端な例を考えてみれば容易にわかる。もし材積の多い単位と少ない単位がある周期的な形で交互に続く場合には、系統的標本は無作為よりも精度が低くなる。二次的な変動とは別に、説明例の500個のstrip上の材積が20の周期で周期的に変動する、即ち次々の20個のstripの組は最初と殆んど同じ変動を繰返すものと仮定しよう。最初のstripを確率的に選ぶ5%の系統的strip標本について調査するとすれ

(1) 他の理由は、系統的に配列された単位を調査すれば、普通同じ大きさの無作為標本よりも林の回復に更に有用な知識を与えるであろう。また、これらの間隔が規則的であるときには抽出単位の位置づけが容易となるから、結局誤りが少なくなると思われる。これらの利益は何れも数値的に表現することはできない。ある場合には、それらのどれかは systematic sampling の欠点を無視する場合非常に重要となるかも知れないが、他の場合には無視することができる。これらについては調査法の選択は特定の問題の必要性に応じて調査者によってなされねばならないということから、ここでこれ以上論議することは適当でない。

ば、推定値は不偏であるが、各単位は周期の同じ位置に落ちる(おそらくすべて谷、あるいはすべて頂点に)であろう。この種の20個の可能な標本から得られる推定値は、20 strip のブロックの各々から1つを無作為に選ぶ無作為標本、あるいは40 strip のブロックから2個の strip を選ぶ無作為標本で得られる推定値より遙かに大きい変動を示すであろう。何故なら、後者は常に周期の色々な部分から得られる単位を含んでいるからである。勿論この例は材積変動の周期と次々の系統的単位間の間隔が一致するかどうかにもよるし、また一様に規則正しい周期性が実在するということも考えられない。しかし、人工的な例は系統的標本が必ずしも最も精度の高いものではないことを示すに十分である。他の形式の変動でも同様な結論が得られるであろう。周辺の抽出単位を回避することによって systematic sample に偏りが生ずる可能性は前に注意しておいた。これが大きい林で重大であるとは考えられないし、また最初の単位を確率的に抽出すればその主要な危険を除くことができる。

このような確率的な抽出は、それ自身不利益を伴うものであり、特に林の一方の端から他の端に向って単位面積当りの材積に一様な傾向が存在するときには、精度の低下のためにあとの論文で論ずる予定の重大な問題が生ずる。上に述べたような周期性は系統的計画を用いる場合の第2の危険であって、そう重要とは思われない。しかしこれとともに、唯一つの標本からの証明しか得られないときにはその生起についての徴候は全く与えられないのである。

これらの欠点とは別に、系統的抽出の主要な利点は承認し得るものである。一般にその推定値は同じ大きさの単純又は層化無作為標本より標準誤差が小さくなるように思われた。林の変動形式がもっとはっきりしている場合には精度の向上がより大きくなるであろう。しかしブロック当り唯一つの調査単位をもつ無作為標本の場合と違って、単一の系統的標本内の抽出単位の記録から推

定値の標準誤差を評価することはできない。

系統的抽出の基礎理論に関する有益な論文の中で Yates (1946 (26)) は、"一方もし系統的標本が取られる場合には、正確さ⁽¹⁾において、無作為標本以上の利得(gain)が得られたかどうか、あるいは現実の系統的標本の正確さ⁽¹⁾が如何程であるかについて標本自体の内部的な証拠からは決定できない。それにもかかわらず抽出誤差の上限は、系統的に(systematically) 配置された連続する2単位の差から常に求めることができる。しかし対象が連続的に変動しているような場合には、これらの推定値は真の値以上となるであろう"と述べている。この場合 Yates が、彼のいう"上限"を真の値以下とするように初め周期の存在する可能性を無視していることは明らかである。ブロック当り1単位を抽出する無作為抽出に関しておそらくより重大なのは、系統的抽出が最も有利となる様な状況、例えば近接する抽出単位間の変動の様相が特に著しい場合には、この上限による過大推定の程度が最大となるということである。

サンプリング方法の殆んどすべての応用分野において、著者達が少くとも彼等の問題ではサンプリング記録の統計分析から系統的抽出の標準誤差が確率抽出より小さくなることが証明されたと主張している論文が発表されている。非常に多くの場合、この結論は系統的標本の個々の単位もしくは記録単位があたかも全く確率的な手続で抽出されているかのように取扱って得られたものである。もしすべての抽出単位あるいは記録単位の立木材積が、林全体に確率的に分布しているのならそれは問題でない。この場合には人間の軽視した確率化が自然によって実行されているわけである。しかし調査者が材積の空間的分布は系統的であるとして初めから系統的抽出を採用した場合には、はじめから終りまでそれを無視する様な方法で結果を分析することはできないのである。

確率抽出でも系統的標本と全く同じ抽出単位の値が得られるで

(1) ここでは"精度"の意味。

はないかという言いわけがよく行なわれる。それは確かにそうであるが、しかしこれによって実際に用いた抽出方法の無視を正当化することはできない。材積推定値の精度の評価が可能かどうか、あるいはもし可能ならどのようにして評価すべきかということは、常に採用した抽出方法によって決定されるものである。サンプリングの標準誤差についての論述、あるいは推定値が真値からかけ離れる確率は単に調査された唯一つの標本にのみ関係するのではなく、その抽出手続を繰返し適用したときに現れる他のすべての標本との関連においてのこの標本からきまってくるものである。特に標準誤差の計算は、抽出単位の選出に対して与えられた確率抽出の要素に依存すべきものであり、また層化あるいは systematic (系統的配置) の制限も考慮に入れなければならない。たとえ両方の抽出単位が偶然同じものからなり立つようなことがあっても、可能な無作為標本の全体の中の一つから与えられる情報は、可能な系統的標本の全体の一つから与えられる情報とは全く異なるものである。

記録単位をあたかも抽出単位であるかのように取扱い、それらの間の変動から精度を評価するという誤りは、屢々系統的標本を無作為標本として取扱う場合の誤まりと関連していることが見出されている。

不幸にしてこれらはどちらも、森林標本調査の統計的基礎についての他の点で優れた研究を台なしにしてしまうものである。例えば (Griffith [1945, 1946 (6)~(15)] による一連の論文) 確率抽出、系統的抽出の何れであっても、抽出単位が、幾つかの部分にわけて調査されているとき、これらの部分の記録を独立に選ばれた抽出単位のものとして使用し得る根拠は全然ない。ある標本が林を代表する程度は、それを調査する為に用いた細分 (sub-division) の数とは無関係である。

サンプリング記録を分析する上でおかすこれらの誤まりは、統計理論を不注意に用いる場合に陥り易い極めて危険な落とし穴の一

例である。統計的な分析で必要とされる計算は普通は非常に容易である。それらは複雑であったり手数のかかるものであるかもしれない。しかしそれらに初等算法の規則の広範な適用以上のものが要求されることは滅多にない。計算の論理的な基礎やそれを特定の問題に採用する理由を理解することはそう容易ではない。あるデータについて実行し得る周知の計算方法も、それが論理的に適切でありまた正しい結論を導びくものであるという保証は何もないという事実！

系統的標本の標準誤差は評価できないということを正確な意味あいにおいてはっきり認識しなければならない。もし林のすべての抽出単位の全林毎木のデータが利用できれば、色々な形式の系統的あるいは無作為標本に対する抽出誤差を計算することができる。それは同様な林のサンプリングで得られると思われる精度の指示を与えるという意味では貴重であるが、その林自体で用いるには遅すぎる。ブロック当り又つあるいはそれ以上の抽出単位をもつ無作為抽出の利点は、これらの単位の誤差分布の数学的な形を仮定しなくても、個々の抽出単位の記録から抽出誤差の不偏推定値が計算できるということである。この誤差の分布が近似的に正規分布として統計家に知られているものと仮定すれば、材積の推定値に対して其の材積がそれらの間にあることが殆んど確実な信頼限界をさめることができる。個々の抽出単位の誤差の分布が正規分布と相当大きく違っている場合でも、材積推定値が多数の抽出単位の平均値から導びかれているときにはそう重大ではない。単位が確率的に選ばれていると考えれば抽出誤差が計算できるといふ素朴な仮定を系統的標本にあてはめることは、系統的抽出を採用する主な理由の一つと矛盾するものである。それが真実に近い答えを与える場合があるかもしれないが、しかしそれはおそらく系統的抽出を用いても精度が良くなならないような林の場合だけであろう。それが誤解を招くような結果を与える程度は、全林毎木で得られるデータを細かく調べた後においてのみ判断すること

ができる。系統的標本から誤差の評価を導びく爲にこれまでに提案された方法は、抽出単位の単位面積当りの材積の分布に対して更に細かい仮定を設けている。例えば Cochran (1946 (4)) および Metérn (1947 (20)) は近接した単位間の相関を規定する数学的な模型を提示した。これらを色々なデータの組について吟味することによってのみそれが適当であるか否かが判定でき、またもしこれらの方法が十分なものであっても、それを用いる場合には標本データから幾つかの附加的な母数 (parameter) を推定しなければならないから、標本が多数の単位からなる場合しか有用な結果は得られない。著者には最も単純な系統的抽出を多少修正した実験的な方法が近い将来においてより有用であるように思われるが、これらについては sec. 11 においてもう一度注意することにする。

森林の無作為および系統的抽出の相対的な利益について Hasel (1938 (16)) が、述べている見方は、ここに与えた説明と非常によく似通っている。彼はある大面積の森林に対して、系統的抽出が無作為抽出より高い精度を有することを見出し、また規則的な間隔で配置された単位の便利さと、地図作製の目的に有効であることを考えて、彼は精度を示すために多少の抽出単位の追加調査をしなければならないとしても、一般に系統的抽出が優れていると結論している。この問題に対する彼の分析は後の論文でより詳細に論ずることとする。ここでは、この推論の基礎を広げる爲に他の林について同様なデータを集め分析しなければならないと強調している彼の結論の重要性を指摘すれば十分である。

10. 規則的な造林 (Regular planting)

これまでの章で行なった議論は、少し修正するだけで、規則的な間隔で植林された林のサンプリングにも適用できる。サンプリングの主要な原則や無作為と系統的抽出の相対的な価値は全然変わらない。しかし調査員の仕事はずっと容易になり、また孤立した

小単位の位置づけや調査にもあまり費用がかからないから、strip サンプリングに対する制限も不要となるであろう。従って一層の考慮を払うべき問題は、材積推定値の精度を向上させるために抽出単位を用いることの必要性であろう。

抽出単位および記録単位は両方とも幅が樹木の列間隔の丁度倍数に、長さが列中の樹木間の距離の丁度倍数になるようにとらなければならない。従って間隔や空間の不規則さによる二義的な変動を別にすれば、単位内の立木本数は列中の単位の相対的な位置とは無関係となる。もしこの条件が認められなければ、単位を列に対して確率的に配置すると単位当りの立木本数の違いのために、附加的な変動成分が現れるであろう。この成分は単位が小さくなるとき全材積に比例して増加する。一方各単位を植付線と同じ方向に位置づけることにすればこの変動は除去できるが、単位当りの立木本数が要求された植付の平均密度より一様大きくなくなったり、あるいは小さくなったりして最終的な推定値に偏りが生ずるかもしれない。たとえ植付距離が林を通じて全く同じでなくても、記録単位の大きさを平均植付距離に関して慎重に選べば、この変動性を少なくするのに役立つであろう。

11. 勧告 (Recommendation)

それでは如何なる助言をここで与えればよいのであろうか？まず第一に、単にサンプリングが全林毎木調査より望ましいばかりでなく、信頼できる調査を行なうのに必要な熟練した調査員が豊富でない限り、その利用は避けられないもののようと思われる。よく計画され注意深く調査された標本が、多分時間および労力の切迫の故をもって性急かつ不注意に実行された“全林毎木”より優れていることは疑いのないところである。サンプリングはもし偏りを避けるつもりなら客観的なものでなければならない。森林のサンプリングに適切な統計分析の方法についての価値ある説明の中で、Schumacher と Chapman (1942 (22)) は推定値と真

値との間の確実と思われるかけ離れを問題とする調査者は、対象を無作為標本にのみ限定しなければならないと述べている。過去の経験からある種の無作為標本が間違いないと十分な精度を与えると考えられたりまたは同じ抽出率の系統的標本が少くともよりよい精度をもつらしいとして選ばれる場合には、多少の譲歩を行なわねばならないとしても、厳密には彼等は正しい。この論法は非常な慎重さをもって用いる必要がある！ 一方 Yates (1946 (26)) は「それにもかかわらず、我々が広大な面積の調査において無作為抽出より系統的な線または格子状抽出法 (line or grid sampling) が優れていると感ずることも事実である。

達成される精度を調べる為に必要な附加的作業は、調査自体において節約される作業量によって補償されるであろう。」と述べている。著者にはこの論述が精度を十分評価できると仮定しているのが幾分性急にすぎる様に見える。系統的抽出で作業が節約される程度は、地域的な組織や条件によって非常に広範囲に変化する。そうしてこれについては、サンプリング実行の長期間の経験からのみ適切な判断が下せるのであるが、しかしそれは必ずしも常に大きいとは限らない。

Yates (1946 (26)) は抽出手続に修正を加えることによって、単一の系統的標本の誤差の妥当かつ信頼しうる評価を与えるような方法を展開できるかもしれないことについてヒントを与えた。strip サンプリングに関して彼は一つの可能性として、「もとの標本と僅かに異なる間隔をもつ第2の標本をとる」ことを提案したがこれによって「すべての間隔に対する二つの strip 間の差の知識が得られることとなる」。もう一つの可能性は、林の構成要素上にわたって、無作為あるいは多分系統的な補助サンプリングを行なって変動性の情報を得ることである (Hasel, 1938 (16))。単なる系統的標本1つだけでは十分な誤差の推定値を導けないことは確かだから、調査者が系統的サンプリングによって与えられる便宜と精度の利益を享受することにさめた場合には、もし更に

精度の評価も望むなら若干の附加的な作業を覚悟しなければならない。たとえその場合でも標本が多数の (例えば少くとも 100 個) 抽出単位から構成されていない限り、この方法で良好な結果を得ることは難しいと思われる。従って非常に大面積の森林のみがこの条件を満たすことになる。しかしこの問題について何等かの実用的な助告を行ない得るまでには同一層の研究が必要である。特に提案された方法を全林毎木から導かれた標本で試み、精度の推定値をその真値と比較してみることが必要であろう。明らかにこの種の研究は系統的サンプリングに実際の利益をもたらすという意味での規則的な変動状態の全林毎木調査について行なう場合にのみ役立つものである。

最終的に与えることのできる一般的な助言は、大部分系統的サンプリングによって得られる真の精度の平均的向上に關係するものである。もしこれが小さい場合には、無作為抽出を放棄するときには避けることのできない誤差推定値の犠牲、あるいはその推定値を求めるのに必要な労力の追加は、償うにはあまりに大きすぎると思われる。多くの調査から求められたデータを、種々の抽出計画 (sampling scheme) を比較するという見方で十分統計的に分析することによってはじめてこの問題は解決することができる。この目的のためには小記録単位での全林毎木が最も貴重なものである。Yates (1946 (26)) の論文やこの論文で進められたような考察をとり入れて修正あるいは補正をほどこした Hasel (1938 (16)) や Griffith (1945, 1946 (6)~(15)) 流の研究を数多く行なうことが必要である。著者はサンプリングの問題をこの面について後の論文で更に十分に論じたいと思っている。

12. 要 約 (summary)

1. 林木調査の主目的は、全材積またはある種類の材積を推定することである。第二の目的は材積推定値の信頼性に対する数値的な評価を求めることである。

2. 調査データがまた林の地図作製のために必要となるかもしれない。しかしこのために最適な条件は必ずしも材積推定のためのものと同じではない。地図作製の問題はこの論文では論じなかった。
3. 全林毎木調査 (complete enumeration) はその実際の性格から、調査者の測定誤りや過失を別にすれば正しい総材積の値を与える。これは大面積の林では費用がかかりすぎるから、多くの人々の意見によれば必要でない。
4. 標本調査 (sample enumeration) は、その結果が総材積の推定値を与えられと思われる抽出率をもって着手される全林のある部分の調査である。全林の一小部分のみからなる標本で十分な推定値が得られるなら、大きい節約ができる。サンプリングの手続が十分なものであるか否かは、真の値とこの抽出手続を繰返して得られる推定値で期待されるものとの互いの一致の程度によってきまるものである。
5. たとえサンプリング計画を実行に移すときに、一般には実際の便宜と統計理論から最も信頼できる結果を与えそうに思われる方法との間に、ある妥協がなされるとしても、それに含まれる統計的な原理を理解することは、サンプリングの問題を正しく認識する上で本質的なものである。
6. 任意のサンプリングの推定値がもたねばならない第一の条件は、それが偏りをもたないということである。従って抽出単位の選出は全く客観的でなければならない。これとともに抽出単位の位置づけや定義および樹木のすべての測定における注意などに関する厳格な規則もなくてはならないものである。
7. 特定の抽出率のサンプリングでは、小数の大単位を用いるよりも多数の小単位を用いる方がよりよい精度が得られると思われる。林内の変動の性質が何もわかっていなければ、正方形の抽出単位を選ぶのが最も良いようである。もしある方向の変動が特に大きいと信じられる場合には、この方向に沿って走る細

- 長い単位の方が等面積の正方形単位よりも精度が高い。ある条件のもとでは、林を真直に横切る長い矩形 strip が実用的な唯一のものでもある。この場合にも多数の小単位の方が有利のように思われる。
8. 規則的な列間隔で植林されている林では、抽出単位は普通の場合その幅を列間隔の丁度倍数に、その長さを列内の植付距離の丁度倍数にとるべきである。
9. 全林に確率的に分布した抽出単位からなる単純無作為標本 (unrestricted random sample) は総材積の不偏推定値を与えまた推定値の精度を評価することのできるデータをも提供する。
10. 層化無作為標本 (stratified random sample) ではその中の抽出単位にある制限がつけられていて、そのために平均的にいえば標本が林のすべての部分を公平に代表するということが保証されるのである。従ってその推定値は精度が向上することが期待される。その推定値はもし正しい計算が行なわれれば依然として不偏である。
11. どのような層化方式の場合でも、ブロックは可能な限り一様となるように選ぶべきである。
12. 一定の抽出率のサンプリングでは、それぞれ標本に小数の単位の寄与を与える小さいブロックの方が、標本に多くの単位の寄与を与える大ブロックよりも精度が高いように思われる。各ブロックが標本に二単位の寄与を与えるような配置は、この性質を有効に利用するもので標本のデータから精度の数量的な評価を与えることが可能である。
13. 精度の高いサンプリングの手続きは必ずしも単一の標本中に精度を評価し得るデータを集めることとはならない。各ブロックで唯一つの抽出単位を調査するようなブロック作りの方式は、二倍の大きさのブロックからブロック当り二単位をとる方式よりも精度が高いと予想されるが、前者の精度は標本の内部的な証拠だけからは評価できない。それにもかかわらずそのよ

うなサンプリング手続の選択は屢々妥当なものであり得る。

14. 抽出単位毎の単位面積当り材積の変動は屢々系統的な模様に従うと考えられる。層化は標本を林のこの「模様」全体にわたって広く分布させるということのために、ある程度このことを考慮に入れている。しかしながら多数の調査者はむしろ、選ばれた抽出単位が林の全体にわたって規則的に配置されている系統的標本 (systematic sample) を採用するのである。このような標本のもつ附随的な利益は、抽出単位的位置づけが一層容易であるから、従って現地での過誤がより少なくなると思われる。
15. もし最初の単位的位置が確率的に（無作為に）選ばれるなら、系統的標本は総材積の不偏推定値を与える。たとえそれが、色々な林の一連のサンプリング全体ではおそらく無視できるとしても、最初の単位を確率的に選ばない場合には偏りの生ずるおそれがある。
16. 系統的標本は、普通対応する層化無作為標本より精度の高い推定値を与えると予想されるが、しかしこれは必ずしも真ではない。ある種の変動に対しては系統的標本の精度は低下することがあるから、一般統計の理論からはどちらが常に優れているともいえない。
17. 層化、無層化にかかわらず、無作為標本の抽出誤差の計算が正しい結論を導くのは、標本が全く確率的である場合に限る。系統的標本が推奨される主な理由の一つは、材積変動に系統的な (systematic) 傾向があると考えられるためであるから、それから得られた数値をあたかもそれが確率的に選ばれた単位に対するものであるかの様に考えて分析することは、妥当でないばかりか許すべからざることである。
18. 近接する抽出単位の単位面積当りの材積変動に何か仮定を設けない限り、単一の系統的標本の内部的な証拠からは精度の評価は不可能である。統計理論が如何に進歩してもこの結論を免

えることはできないが、統計分析の経験と調査から少くとも直感的に妥当なある種の仮定が最後には示し得るものである。一方では普通の抽出手続を修正して、精度のある種の評価を容易にすることができる。

19. 如何なる形式のサンプリングでも、記録単位または他の抽出単位の細分間の分散から正しい精度の評価を導びくことはできない。しかしながらこれらの記録は、他の大きさや外形をもつ抽出単位で得られると思われる精度の研究には有用であろう。
20. たとえサンプリング計画の運営に対する助言が一般統計原理から可能であるとしても、色々なサンプリング計画の相対的な価値の評価は実際のデータの数値的な分析が終ってからのみ行うことができるのである。結論は厳密には一つの林のみに適用できるものであろうが、しかしそれらはまた相対的な価値の実験的な知識を肉づけするのに役立つものである。この点では小単位で記録された大面積の森林の全林毎木調査は、それが多数の色々なサンプリング計画の統計的分析および比較を行ない得るデータを含んでいるという意味で特に貴重である。優れた森林標本調査法の原理に関する知識を増加させるため、既存の全林毎木調査のデータを可能な限り活用すべきである。

參考文獻

- (1) Cochran, W. G. and Watson, D. J. (1936): An Experiment on Observer's Bias in the Selection of Shoot Heights'. Empire J. of Experimental Agriculture, iv. 69-76.
- (2) Cochran, W. G. (1939): The Use of the Analysis of Variance in Enumeration by Sampling. J. Amer. Statist. Assoc. xxxiv. 492-510.
- (3) Cochran, W. G. (1942): Sampling Theory when the Units are of Unequal Sizes'. Ibid. xxxvii. 199-212.
- (4) Cochran, W. G. (1946): Relative Accuracy of Systematic and Stratified Random Samples for a Certain Class of Populations. Annals of Mathematical Statistics, xvii. 164-77.
- (5) Fisher, R. A., and Yates, F. (1948): Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research, 3rd. ed. Oliver and Boyd, Edinburgh.
- (6) Griffith, A. L. (1945 a): The Efficiency of Enumerations. I. The Problem. Forest Research Institute, Dehra Dun, Indian Forest Leaflet, No. 83.
- (7) ——— (1945 b): The Efficiency of Enumerations. II. Madras Tropical Wet Evergreen Forest. III. Typical Calculations. Ibid., No. 84.
- (8) ——— (1945 c): The Efficiency of Enumerations. IV. Madras Moist Mixed Deciduous Forest. Ibid., No. 85.
- (9) ——— (1945 d): The Efficiency of Enumerations. V. Upper Assam Tropical Evergreen Forest VI. Typical Calculations. Ibid., No. 86.
- (10) ——— (1945 e): The Efficiency of Enumerations. VII. The Distribution of the Volume Figures. Ibid., No. 87.

- (11) ——— (1945 f): The Efficiency of Enumerations. VIII. Cbir (Pinus longifolia) Forest in the Punjab and United Provinces. Ibid., No. 88.
- (12) ——— (1946 g): The Efficiency of Enumerations. IX. The Distribution of the Volume Figures (contd.). Ibid., No. 89.
- (13) ——— (1946 a): The Efficiency of Enumerations. X. Hill Sal (Shorea robusta) Forest in the United Provinces. Ibid., No. 90.
- (14) ——— (1946 b): The Efficiency of Enumerations. XI. The Distribution of the Volume Figures (contd.). Ibid., No. 91.
- (15) ——— (1946 c): The Efficiency of Enumerations. XII. One Species in a Mixed Forest (Teak in a Madras Moist Deciduous Forest). XIII. Confirmation of the Cbir (Pinus longifolia) and Sal (Shorea robusta) Data. XIV. Summary of Indications. Ibid., No. 93.
- (16) Häsel, A. A. (1938): Sampling Error in Timber Surveys. J. Agric. Res. Ivi. 713-36.
- (17) Ilvessalo, Y. (1942): Suomen metsävarat ja metsien tila (The Forest Resources and the Condition of the Forest of Finland). Communicationes Instituti Forestalis Fenniae, XXX. 1-446.
- (18) Kendall, M. G., and Babington Smith, B. (1939): Tables of Random Sampling Numbers. Tracts for Computers, No. 24. Cambridge University Press.
- (19) Mahalanobis, P. C. (1944): On Large Scale Sample Surveys. Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., B cccxxi, 329-451.
- (20) Mätern, B. (1947): Metoder att uppskatta noggrannheten vid linje- och provytetaxering. (Methods of Estimating the Accuracy of Line and Sample Plot Surveys). Medd. från Statens Skogsförsökstält, xxxvi, No. 1.

- (21) Neyman, J. S. (1934): *On the Two Different Aspects of the Representative Method: The Method of Stratified Sampling and the Method of Purposive Selection*. J. Roy. Statist. Soc. xcvi. 558-625.
- (22) Schumacher, F. X., and Chapman, R. A. (1942): *Sampling Methods in Forestry and Range Management*. Duke University Press, Durham, N. Carolind.
- (23) Sukhatme, P. V. (1947): *The Problem of Plot Size in Large-scale Yield surveys*. J. Amer. Statist. Assoc. xlii. 297-310.
- (24) Yates, F. (1935): *Some Examples of Biased Sampling*. Ann. Eugen., Lond. vi. 202-13.
- (25) ——— (1943): *Methods and Purposes of Agricultural Surveys*. J. Royal Society of Arts. xci. 367-79.
- (26) ——— (1946): *A Review of Recent Statistical Developments in Sampling and Sampling Surveys*. J. Roy. Statist. Soc. cix. 12-43.
- (27) ——— and Zaccopanday, I. (1935): *The Estimation of Efficiency of Samplings, with Special Reference to Sampling for Yield in Cereal Experiments*. J. Agric. Sci. xxv. 545-77.

林分の標本調査について

Statistical Sampling in Timber Surveys

By K. R. Nair and R. P. Bhargava

Statistical Branch Forest Research Institute Dehra Dun

(Indian Forest Leaflet No. 153, 1951 より)

林分の標本調査について

Statistical Sampling in Timber Surveys

By K. R. Nair and R. P. Bhargava

*Statistical Branch, Forest Research Institute,
Dehra Dun (Indian Forest Leaflet No 153, 1951 より)*

要 約

この論文はまず始めに、この問題について第6回と第7回の造林協議会(silvicultural conference)で行なわれた勧告に従ってとられた行動、および1947年以前のDehra Dunにおける林業研究所のsilviculturistであったA. L. Griffithの与えた、Madras州のMount Stuartの森林に関する全数調査のデータおよびDehra Dunの森林の20%の部分調査データをもととして、1948年および1950年にOxfordの科学実験の計画と分析の講師(Lecturer in the Design and Analysis of Scientific Experiment)であるFinney D. J. によって発表された二つの論文の結論の大意を述べる。

諸外国においてline-plot調査が広範に使用されている事情にかんがみて、この論文はstrip調査と比較した場合のline-plot調査の相対的効率(relative efficiency)を探究する必要性のあることを強調した。確率的なline-plot調査において期待されるべき精度の統計的な抽出研究(statistical sampling investigation)の結果から、与えられた精度の水準に対しては、line-plot調査ではstrip調査より抽出率が小さくてもよいことが示された。それぞれ410,000エーカーと340,000エーカーの地域において、Nepal工場の新聞紙生産に利用できるsalaiと竹の資源を推定するため、1950~1951年にわたってMadhya Pradeshで実行された二つの系統的line-plot調査

の結果によれば、使用された $1/2$ と $1/5$ エーカーの大きさの plot に対しては、真値の 10% 以内において全資源の推定値を求めるのに抽出率を 1% あるいはそれ以下に低くできることがわかった。

strip あるいは line-plot 調査は何れも山岳地帯 (hilly region) で採用できるとは思われない。この種の森林の場合には林班又は地形的な区画を抽出単位として使用すべきであろう。

緒 言

1945 年の 4 月に Dehra Dun で開催された第 6 回造林協議会 (silvicultural conference) においては、戦時中の過伐量と残存する資源に関する情報を収集するための大規模調査が急務の急であることが論ぜられた。協議会では標本調査法を研究することと、既往の調査記録に対するそれらの効率を検討することの重要性が力説された。色々な方法について予想される精度と種々のタイプの森林や地域における調査率 (intensities of enumeration) の指針を求めるために中央育林官に、既存のデータを再検討する権限を与えろという決議が採択された。

この決議に従い当時の中央育林官 (Dr. A. L. Griffith) は、インド各地から得られた多数の全数調査および部分調査の記録を研究し、これらの調査を種々の抽出率の標本調査でおきかえた場合に得られる蓄積推定値の信頼性を一連の刊行物の中で論じた。彼は「調査の効率について (The Efficiency of Enumeration)」という題名のもとに No. 83 から No. 91 までと、93, 96 の 7 つの Indian Forest Leaflet (造林) を発表した。彼はこれらの論文において蓄積調査には必ずしも全数調査が本質的でないこと、および標本調査は実務目的に対し十分信頼できる蓄積推定値を与えうることを示した。この方法を用いることによって調査時間と費用を大巾に節約することが可能となる。中央育林官が標本推定値の精度を計算する為に用いた方法は、厳格な批判を求めるために公開された。1946 年 10 月～11 月に Dehra Dun で開催された第 7 回造林協議会では結局次の決議を採

択した (議題の 7 項)。

“中央育林官は、系統的に配列されたデータに対する系統的抽出の推定値の精度を計算する数学的に満足できる方法を求めるため、優れた統計家と緊密な接触を保つべきこと”。

戦後の F. R. I および大学のリ組織計画の重点部門である統計部が 1947 年に創設されてから、この新しい部が更めてこの全問題を研究すべきことが決定された。統計部に対して与えられたこの仕事は、D. J. Finney によって公表された (1947, 1948, 1950) 三つの論文によって非常に容易となった。彼に対して中央育林官 (A. L. Griffith) は、彼が I. F. Leaflet No. 85 において用いた Madras 州の多雨地帯の落葉混交林 (Mount Stuart) に対する全数調査のデータと、I. F. Leaflet No. 96 で用いた Dehra Dun の forest division の一部調査のデータを与えたのであった。

「Forestry」の好意により Finney 博士の最初の二つの論文は、1949 年に当研究所によって Indian Forest Bulletin No. 146 (Statistical) として再録され、その写しは林業省の首脳および育林官に配布された。

層化無作為または系統的標本の何れかから求められた 'Mount Stuart' のデータは Finney 博士によって研究されたが、これによれば、全森林の 20% (即ち 5 本の strip 中から 1 本) の抽出率の場合には真値の 5% 以内の推定値が得られることは殆んど確実で、 10% (10 本の strip から 1 本) では真値の 10% 以内、また 5% (20 本に 1 本) の場合には、真値の 15% 以内の推定値が得られたであろうということが明確に示されている。研究したデータに対しては系統的抽出の方が、層化無作為抽出よりも精度が高かったにもかかわらず、前者の方法では、抽出誤差の評価が不可能であるという理由で、Finney 教授は後者の方法を推奨している。

二つの方法間の差異は例を用いることによって明瞭となる。林が例えばマチエーンの 160 本の strip に分割されていると仮定し、抽出率が 20% (5 本に 1 本の strip) に定められたものとする。従

って我々の抽出調査は32本のstripの全数調査を行なうことである。系統的抽出法で選出されるstripは、通し番号で3, 8, 13, ..., 158である。この方法は、林を5本のstripからなる隣接したブロックに層化し、各ブロックの真中のstripを客観的に選んで調査する最も極端な形式の層化抽出法を考えることができる。Finney博士が推奨した層化無作為標本でのブロックは、2倍の数即ち10本のstripからなっていて(全部で16ブロック)、各ブロックから2本のstripが乱数表を用いて全く無作為に選ばれる。各ブロックから選ばれたstripの対になったプロット間の変動から材積推定値の抽出誤差の正しい推定値が導びかれる。

第三の論文においてFinney(1950)は、Dehra Dunの森林の20%の部分調査のデータに彼の第二の論文の方法を適用し、これらの林の材積を推定するもう一つの抽出方法を研究した。この調査は系統的抽出、即ちこれらの林の5番目毎のstripを調査するものである(詳細についてはSahai(1947)をみよ)。Finneyはこの20%の系統的抽出について実行される色々な副次抽出(sub-sampling)の方法について考察した。

このデータは周期変動の存在をはっきり証明したが、その周期は長さ約170チェーンとなっている。この事実には色々な型式の無作為抽出および系統的抽出の相対的精度ならびに効率に重大な影響を与える。一般に系統的抽出の精度は同じ抽出率の如何なる形式の無作為抽出より優れているが、しかしこの性質は、系統的標本の次々のstrip間の間隔が同期の倍数となった場合には全く転倒する。

Yates(1948)は最近の研究で系統的標本の誤差の上限を如何に評価するかについて若干の理論的な手引を与えた。Yatesは彼の研究から系統的抽出の場合“抽出調査の結果から実際妥当な誤差の推定値を導けると予想し得る方法は何もないことが確証された”と述べている。

line-plot調査

Griffith および Finney がその研究で用いた抽出単位は完全な

strip (complete strip) であった。

Finneyのあげた理由は、“下層植生の寄生している熱帯林においては孤立した小抽出単位を位置づけて調査することは極めて多額の経費を必要とする。各単位には遠く離れた基線から径路を伐開しなければならないから、調査そのものの費用は径路を作るのに比べると少くなるかもしれない。これらの状況下で更に適切な抽出単位は、基線と直角に林を縦貫する細長いstripである”。

若干の国々においては抽出単位として小さい円形プロットが用いられてきた。Finlandの第2回 National Forest Survey (1936~38)においては半径17.84m (58.5フィート)の円形プロット標本で材積および成長量の測定が行なわれた。1954年以降のSwedenのNational Forest Surveyでは、等間隔の直線上に規則的に配置された半径5.7m (16.4~23.0フィート)の標本プロットから材積が決定された。従って抽出率は完全なstrip調査の約1/65に減じたにもかかわらず、抽出誤差はそう極端には増加しないことがわかった。1947~49年のGreat BritainのNational Surveyでは1/10 エーカーの円形プロットが用いられたがこれは一直線に配列せず、200エーカーに対して1プロットの割合、即ち抽出率0.05%で全く無作為に選ばれた。

Kadambi博士(1943)はMysoreの経営調査に円形プロットを用い、熱帯林においてはline-plot調査が便利であることを示した(これはIndiaにおける最初のものであると信ぜられる)。育林官U.P. (Shri S.K. Seth)はPilibhit地方のsal林の最近の調査において、色々なタイプのline-plot調査を小規模に試みた。Shri Sethはこの会議の前に彼の研究結果をまとめた一つの論文を提出した。我々は他のタイプの森林について同様な研究的調査を全国的に行なうことの重要性を強調するものである。

Kadambi博士の考えとは逆に、Shri Sethは円形プロットに否定的である。従って円形プロットが他の矩形または正方形プロットなどの形状より推奨すべきか否かを最終的に結論づける前に多数の経営

実調査員の実地的な経験が積み上げられねばならなかった。肥沃度の勾配が一つの方向で着しい大きさを示している様な林地では、理論的な考察から、長辺が肥沃度の勾配の方向に沿った矩形プロットの方が、正方形または円形プロットの何れよりも優れている。

line-plot調査は普通等間隔に並んだそれぞれの直線上にプロットがまた等距離に配置されているような規則的な配置に従うものである。従ってプロットは規則正しい格子を作っている。全林の総材積推定値の精度を計算する目的のため、色々なプロットについて計算された材積を、材積推定値の無作為標本を構成するものとして用いることは全く誤りである。Matern (1947) および Yates (1949) はこのような line-plot 調査の精度を推定する方法を研究した。

line-plot を用いる無作為抽出の研究

少なくともある種の森林においては line-plot 調査が適切であるという考えが承認される一方では、strip調査が、平均値の推定を与えられた精度で行うことのできる多数の抽出方法を提供し、抽出方法の広大な可能性を用いている。これらの種々の方法は、一般に異なる抽出率をもつであろう。多くの異なる方法の中の何れを選ぶべきかという問題は費用の観点から客観的に解決される。即ち最小費用の抽出方法が望ましい。これには現在不足している種々の抽出方法の知識またはその費用に対するデータが必要である。しかしそのような費用に対するデータは、一つの層に対応する林の小部分で pilot調査を行なうことによって、我々の目的に十分な正確さをもって容易に収集することができる。以下に報告する抽出研究はこの背景に照らして考察すべきである。これらの抽出研究では、それぞれ Mount Stuart および Dehra Dun の森林の小部分に対するデータが用いられた。使用された Mount Stuart のデータは、No 215 から 278 までの隣接した 64 本の strip からなっている。これらの strip のそれぞれにおいて、 $1/2$ エーカープロット (5 チェーン × 3 チェーン) の記録単位内で材積データの記録が行なわれた。これらの 64

個の strip 内の 1 エーカープロットの数はいずれの strip についても略々同数であった。strip あたりのそのようなプロット数の平均値は 31 であった。この Dehra Dun のデータは、20% の系統的な部分調査で得られたものであるから、調査された次々の strip は隣接していないで 10 チェーンの距離があることを思い出すであろう。ある統計的な考察にもとづいて、この 64 個の strip の帯はそれぞれ 16 の strip からなる隣接した 4 ブロックに分割された。このようにして 4 つのブロックはそれぞれ strip 番号 215 ~ 230, 231 ~ 246, 247 ~ 262 および 263 ~ 278 からなっている。

この何れのデータに対しても二段階抽出が行なわれた。この場合一次抽出単位は両方とも strip であったが、最終単位即ち二次抽出単位は Mount Stuart のデータでは $1/2$ エーカー (5 チェーン × 3 チェーン) の大きさの strip 内のプロットであり、また Dehra Dun のデータでは 1 エーカー (20 × 5 チェーン) の大きさの strip 内のプロットであった。後者は 4 つの層をなしている 4 つのブロックについて、層化二段階抽出が行われた。

strip 数 (t) と各 strip 内のプロット数 (n) の色々な組合せに対する Mount Stuart と Dehra Dun のデータの平均値の標準誤差の % をそれぞれ第 1 表および第 2 表 (附録) に示す。この表にはまた (n) と (t) のそれぞれの組合せに対する抽出率の % をもあげている。これらの表は、(n) または (t) あるいはその両方が増加するとき、推定値の標準誤差の % がどの様に減るかについての概観を与える。抽出率の % に関する数値は、与えられた精度即ち与えられた推定値の S.E. の % に対して、(n) の減少および (t) の増加に伴って抽出率の % がどれ位減少するかをある程度まで示す。しかしこの重要な論点は第 3 表および第 4 表 (附録をみよ) で更にはっきりと説明される。

第 3 表は Mount Stuart のデータについて、与えられた二つの精度即ち S.E. = 5% および 2.5% に対する strip 数 (t) と、各 strip 内のプロット数 (n) のすべての可能な組合せを与える。この表にはまたそれぞれの場合に対する調査すべきプロット総数 (n)

$\times t$) をその抽出率 (%) とともに示してある。標準誤差が 5% であるような推定された標本平均値は、この場合の 75% においてその直値の 10% 以内にあることがわかるであろう。同様に S.E. が 2.5% であるような推定された標本平均値は、その 75% が直値の 5% 以内にあるであろう。

第 3 表は、何れも同じ精度をもって平均値を推定する様な多数の異なる方法があり、抽出率は異なっても、プロットがより多数の strip の上に分布していることのために、低い抽出率でも精度の面からは等しく有効 (efficient) であるということを非常にはっきりと示している。多くの抽出方法の中からどれを選ぶべきかという間には、色々な抽出方法の費用の知識が与えられている場合にのみ答えることができる。しかし第 3 表の数値は、S.E. が 5% の場合には多分 11 個以上の strip を必要としないだろうことを示している。というのは、これ以上 strip の数を増しても、抽出率の % は極くゆるやかにしか減少しないからである。同様な考察から、S.E. が 2.5% のときには、22 個をこす strip 数はおそらく必要ないであろう。

第 4 表は第 3 表と全く同じ方法で得られた Dehrn Dun のデータに対する数値を与える。ここで注意すべきことは、この表の特定の (t) と (n) の組合せは、それぞれ 16 個の strip からなる 4 ブロックの各々から無作為に (t) 個の strip を選び、次にこの選ばれた strip の各々から無作為に (n) 個のプロットを選ぶことを意味している。ここで第 4 表の数値も S.E. = 5% の場合には、各ブロック内の 16 個の strip の中おそらく 11 個以上を必要としないことを示している。

Madhya Pradesh における salai 資源の標本調査

1952 年に Madhya Pradesh において salai 資源の標本調査が line-plot 法を用いて実行された。この州 (State) の Nimar Forest division に対する 1948-49 年から 1962-63 年の間の経営計画において、新聞紙生産の Nepa 工場に salai 材を供給

する目的で、40 個の伐区 (Coups) からなる全面積 408,591 エーカーの重複した salai の経営区が設けられた。salai の輪伐期は 40 年とされた。

この標本抽出は、40 個の伐区のすべてにわたるのではなく、その最初の 10 伐区に限定された (即ち最初の 10 年間に施業さるべき地域が、これは 77 小班に細分された総面積 106,000 エーカーの林地からなっている)。

標本抽出は二段抽出法で行なわれた。最初に 77 個の小班中から 10 小班の標本を無作為に選んだ。抽出されたこれらの各小班内において、 $\frac{1}{2}$ エーカーの大きさのプロット ($2\frac{1}{2}$ チェーン $\times$ $2\frac{1}{2}$ チェーン) を用いて系統的 line-plot 調査を行ったが、プロットを中心は 2 チェーン幅の strip 上に 25 チェーンの間隔で配置された strip の中心線の間隔は 20 チェーンであった。従って選ばれた小班内における抽出率は約 1% で、10 個の伐採区の全面積に対する抽出率は約 0.1% であった。実際に調査された $\frac{1}{2}$ エーカーのプロット数は 193 個であったから、標本面積は 96.5 エーカー、即ち全面積の約 0.1% 弱であった。周囲 24 インチ以上の全林木が 6 インチの周囲級で数えられた。この周囲級は 5 つ、即ち 25-30, 31-36, 37-42, 43-48 および 49 インチ以上となった。各周囲級内に入る林木のエーカー当りの平均数および平均値の標準誤差が計算された。抽出誤差の 95% 確率水準の限界として、標準誤差の 2 倍をとると 5 つの周囲級に入る林木数の推定値の誤差の限界 (%) は、32, 34, 34, 29 および 41 であることがわかった。誤差の限界は非常に大きい。最初の 10 伐採区の 77 小班の全部について line-plot 法を用いる 1% の抽出が行なわれたなら、誤差の限界はおそらくこの場合の約 $\frac{1}{2}$ に減少したであろう。残りの 30 伐採区の変動性が最初の 10 伐採区のものと同様であると仮定すれば、40 伐採区のすべての小班について、各小班内で抽出率 1% の line-plot 調査を行えば、誤差の限界が約 5-7% であるような 400,000 エーカーの全経営区に対する推定値が得られるであろう。

このようにして、実行された pilot 標本調査から、この調査を残りの林班のある部分もしくは全部におしなめたときに予想される誤差の限界について有益な知識が得られた。一度全経営区に対する推定値について、許容し得る誤差の限界が決定されれば、最終的な抽出計画の立案は容易である。

Madhya Pradesh の竹資源の標本調査

この調査も同様に Nepa 工場原料供給委員会 (Nepa Mills Raw Material Supply Committee) に代って実行されたものである。竹の生育しているのは Nimar division の東部および西部 Kalibhit 地域, Betul division の Tapti 地域, および Amravati division の Chaurakund, Khandu および Sewbadoh 地域の 335,507 エーカーの地域である。この地域を次の様な三つの品質型 (a), (b), (c) に分割した。

(a) 竹が群状に開化している地域

(b) 良質の竹の生育している地域

(c) 中位の質の竹が生育している地域

各品質型に属する小班面積および数は次の通りである。

品質	面積	小班
(a)	30,847	53
(b)	73,139	165
(c)	211,521	287

Salai 調査の場合と同じく二段抽出法が用いられた。最初に (a), (b), (c) のそれぞれ 53, 165, および 287 個の小班から、7, 17, および 29 の小班からなる標本が無作為に抽出された。選ばれたこれらの小班のそれぞれにおいて、 $\frac{1}{5}$ エーカーのプロット (1 チェーン $\times$ 24 チェーン) を用いる抽出率 1% の系統的 line-plot 調査が実行された。実際に調査が行なわれたプロットの総数は 1445 でその面積は 289 エーカーであったが、抽出調査の適用された範囲は全部で 335,507 エーカーの地域であった。このようにして結局抽出率は 0.1% 弱となった。

各プロット内のそれぞれの群叢について、利用可能な生存の幹数と利用できる枯れた幹数が別々に記録された。95% の確率水準の場合の推定された幹数の抽出誤差の限界は、生きているもので 18%, 枯れたもので 22% となった。

これらの抽出誤差の推定値によって、指定された小さい誤差の限界を有する推定値を得るのに、1% の抽出率では更にどれ位の小班をとらねばならないかを決定することができる。従って、もしも地域の総計に対する誤差の限界が 1% と指定されれば、残りの 452 の小班の中から約 160 の小班を抽出し、それらの各々について、前に抽出した 53 個の小班について行なったのと同じ方法で 1% の抽出を行なうべきであろう。この場合の全抽出率は 1% から 0.4% となるであろう。この抽出率を 1% に増加させれば、即ち 505 の小班の一つ一つから抽出を行なえば、推定値の誤差の限界を 6-7% に引き下げることができる。

山岳林の標本調査

第 7 回の造林協議会の決議の一つは「種々のタイプの森林および地方、特に punjab, Kashmir および N.W.F.P. の高地のヒマラヤスギ, モミ, スプルース林において部分ならびに全数調査を更に行うこと」であった。

Jammu および Kashmir 州の林業局はこの決議に従って、1947 年ヒマラヤスギ — kail 林の 378 エーカーに対して、4 チェーン幅の strip に沿った 2 エーカーのプロットを記録単位として、全数調査を実行した。strip の数は全部で 25 であった。この調査を担当した州の育林官 Shri M. Mehta は、「Efficiency of Enumeration」についての中央育林官の leaflet と同一方針で彼の研究結果を leaflet として発表した。残念なことに彼は、この問題で最も重要点である高山林の strip 抽出調査の費用を全数調査のそれと比較する問題を論じていない。

この会議に提出された Shri S.K. Seth の論文は、山岳地において strip を抽出単位とすることは全く実際的でないことを指摘し

ている。不規則な形や大きさの地形的な単位でさえも使用が困難なことがわかった。従って彼は現在ある小斑を抽出単位に用いることを推奨した。

文 献

- Finney, D.J. (1947) Volume Estimation of Standing Timber by Sampling. Forestry, 21, PP. 179-203.
- (1948) Random and Systematic Sampling in Timber Surveys. Forestry, 22, PP. 64-99.
- (1950) An example of periodic variation in forest Sampling. Forestry, 23, PP. 96-111.
- Griffith, A.L. (1945-47) The Efficiency of Enumerations. Indian Forest Leaflets Nos. 83-91, 73, 96 Forest Research Institute, Dehra Dun.
- Kadambi, Krishnaswamy (1943). Valuation Survey by the Spot Method. Indian Forester, 69, PP. 107-112.
- Matern, B. (1947) Method of Estimating the Accuracy of Line and Sample Plot Surveys. Meddelanden fran Statens Skogsforsoksanstalt, 36, PP. 1-138.
- Nair, K. R. (1950) Sampling Techniques. Indian Forest, 76, PP. 31-35.
- Sahai, R. (1947) Partial Enumeration in the Dehra Dun Forest Division. Indian Forester, 73, PP. 437-477.
- Yates, F. (1948) Systematic Sampling. Philosophic Transactions of the Royal Society, Series A, 241 PP. 345-377.
- (1949) Sampling Method for Censuses and Surveys. Charles Griffin & co, Ltd., London.

附 録

第1表* Mount Stuart のデータ

(1/4 エーカー = 1426 c. ft. のプロット当りの平均材積)

種々の抽出方法に対する平均値の%で表わした標準誤差

t \ n	43	20	15	10	5	3	2
32	0 (100)	1.4 (46.5)	1.8 (34.9)	2.3 (23.3)	3.5 (11.6)	4.7 (7.0)	5.7 (4.7)
16	2.3 (50.0)	3.0 (23.3)	3.4 (17.4)	4.0 (11.6)	5.5 (5.8)	6.9 (3.5)	8.4 (2.3)
8	4.0 (25.0)	4.8 (11.6)	5.3 (8.7)	6.1 (5.8)	8.0 (2.9)	10.1 (1.7)	12.2 (1.2)
4	6.1 (12.5)	7.2 (5.8)	7.8 (4.4)	8.9 (2.9)	11.6 (1.5)	14.4 (0.9)	17.3 (0.6)
2	8.9 (6.3)	10.4 (2.9)	11.3 (2.2)	12.8 (1.5)	16.6 (0.7)	20.6 (0.4)	24.6 (0.3)

第2表* Dehra Dun のデータ

(1 エーカー = 823 c. ft. のプロット当り平均材積)

種々の抽出方法に対する平均値の%で表わした標準誤差

t \ n	31	15	10	5	3	2
16	0 (100)	1.8 (48.4)	2.5 (32.3)	3.9 (16.1)	5.2 (7.7)	6.5 (6.5)
8	4.4 (50.0)	5.0 (24.2)	5.6 (16.1)	7.0 (8.1)	8.5 (4.8)	10.1 (3.2)
4	7.6 (25.0)	8.3 (12.1)	9.0 (8.1)	10.8 (4.0)	12.8 (2.4)	15.0 (1.6)
2	11.5 (12.5)	12.5 (6.0)	13.5 (4.0)	15.9 (2.0)	18.7 (1.2)	21.6 (0.8)

* 注意: 't' は strip 数を表わす。

'n' は各 strip 内のプロット数を表わす。

() 内の数値は抽出率の%を表わす。

第3表 Mount Stuart のデータ

2種類の精度、即ち標準誤差 = 5 および 2.5% に対する strip 数 (t) と各 strip 内のプロット数 (n) のすべての可能な組合せ。

(1/2 エーカー = 1.426 c. ft. のプロット当り平均材積)

標準誤差 % = 5 (近似的)				標準誤差 % = 2.5 (近似的)			
strip 数 (t)	各 strip 内のプロット数 (n)	n t	抽出率 %	strip 数 (t)	各 strip 内のプロット数 (n)	n t	抽出率 %
6	34	204	15	15	40	600	44
7	23	161	12	16	33	528	38
8	18	144	10	17	28	476	35
9	14	126	9	18	25	450	33
10	12	120	9	19	22	418	30
11	10	110	8	20	20	400	29
12	9	108	8	21	18	378	27
13	8	104	8	22	16	352	26
14	7	98	7	23	15	345	25
15	7	105	8	24	14	336	24
16	6	96	7	25	13	325	24
17	6	102	7	26	12	312	23
18	5	90	7	27	11	297	22
19	5	95	7	28	11	308	22
20	5	100	7	29	10	290	21
21	4	84	6	30	10	300	22
22	4	88	6	31	9	279	20
23	4	92	7	32	9	288	21
24	4	96	7				
25	3	75	5				
26	3	78	6				
27	3	81	6				
28	3	84	6				
29	3	87	6				
30	3	90	7				
31	3	93	7				
32	3	96	7				

第4表 Dehra Dun のデータ

2種類の精度、即ち標準誤差 = 5 および 2.5% に対する strip 数 (t) と各 strip 内のプロット数 (n) のすべての可能な組合せ

(1 エーカー = 823.5 c. ft. のプロット当り平均材積)

標準誤差 % = 5 (近似的)				標準誤差 % = 2.5 (近似的)			
strip 数 (t)	各 strip 内のプロット数 (n)	n t	抽出率 %	strip 数 (t)	各 strip 内のプロット数 (n)	n t	抽出率 %
7	27	189	38	13	20	260	52
8	15	120	24	14	15	210	42
9	10	90	18	15	12	180	36
10	8	80	16	16	10	160	32
11	6	66	13				
12	5	60	12				
13	4	52	10				
14	4	56	11				
15	3	45	9				
16	3	48	10				

地床植生の占有面積に対する
系統的および無作為調査の
抽出誤差について

Sampling errors of systematic and random survey of
cover-type areas.

James G. Osborne (Jour. Amer. Statist. Assoc. vol. 37, 1942)

地床植生の占有面積に対する系統的小び無作為調査の
抽出誤差について

*Sampling errors of systematic and random
survey of cover type areas.*

James G. Osborne

(*Jour. Amer. Statist. Assoc.* Vol. 37, 1942)

この論文の目的は、系統的小び無作為小びからえられた
小び推定値の精度 (accuracy) に関する研究結果を報告し、更に系
統的小び観測値の小びから推定値の抽出誤差を推定する方法を述べるこ
とである。

ここに報告する研究は、地域の構成状態を植生型分類によって推
定するサンプリングの結果を扱ふものであるが、しかしこれらの
推定値は他の多くの分類基準、例えば土地利用級、林型級などによ
る構成状態の推定値となんら本質的に異なるものではない。実際、
研究にこのような資料を用いることにしたのは主として便宜性とデ
ータが利用できたことによるもので、選ばれた種類の資料が特にこ
のような研究に適していると考えたからではない。しかしながらど
りあげられた問題は実際に重要なものであることを指摘しなければ
ならない。なぜなら、上述の分類に従う地域の推定値は大部分の土
地利用計画での基礎であり、多くの調査の不可欠な部分を占めるから
である。

この研究で用いたデータは二つの地床植生分布図 (cover-type
maps) からえられる。その一つは中位の大きさの地域を表わし、
もう一つは大面積を表わすものである。抽出率は前者では中程度で
あるが後者では非常に小さい。はっきりいえば、最初のものは南
California の 28×30 マイルの地域に対する植生図 (vegetative-
cover maps) および土地利用図である。この地図に対する抽出率
は幅 / マイルあたり / 本の調査線という割合になっている。第2の
ものは Washington 州の北西部の一部でカナダ国境の南方 80 マイ
ルにわたり Puget Sound から Cascade 山頂に至る距離約 60 マ

イルの林相図 (forest-type map) と林型図 (forest condition map) で、その抽出率は 10 マイル幅に 1 調査線の割合である。したがってこれは国有林調査の方法にしたがうものである。どちらの場合にも地図を横断して直線をひき、それぞれの植生型をさる直線の長さを記録した。

特定の植生型級に属する面積が全面積に対して占める割合は、その級を通る直線の長さが直線の総延長に対する割合と同じだということが仮定された。この仮定のチェックとして、小面積の方の地図上の耕地面積をプランニメーターで測定し、上記の方法で推定した値と比較した。この推定値には、測定した全直線から求めたものを用いた。プランニメーター測定によれば、この地域の 41.748% が耕地であった。截線法 (line-interception method) による % は 41.896 で、差は全面積の 0.148%, すなわち耕地面積の 0.353% であった。これは用いられたプランニメーターの正確さの限界内にうまく納まっている。

次に二つの地図を研究して得た結果を考察しよう。California の研究に用いたデータは、この地域を横断する 600 本の調査線についての植生型の記録である。この調査線は次のようにして選ばれた。幅 30 マイルのこの区域のそれぞれのマイルを 32 個の等しい部分に細分した。これらはこの地域を横切る 32 本の調査線を表わしている。1 から 32 までの数字の中から 20 個の数字を無作為にえらび、これらの 20 個の数字のそれぞれに対応する調査線を各マイルごとにえがいた。例えば調査線 4 が 1, 2, 3 ----, 30 マイルでえがかれ、次に調査線 6 がマイルごとにえがかれるというように。こうして選ばれた 600 本の調査線に対する観測値が標本抽出をおこなうための基礎データになっている。

1 マイル間隔でとられた 30 本の調査線の 20 組が 20 個の系統的標本を構成する。しかしそれらは全体としては無作為であるから、このような全数調査の分散の妥当な推定値を与える。比較のために 20 個の無作為標本を色々な方法で抽出した。これらの中には、な

かんづく、(1) 単純無作為 (すなわち、600 本の調査線の中から 30 本をまったく無作為に選ぶもの) および (2) 層化無作為抽出 (すなわち無作為ブロック抽出が含まれる)。(2) の場合には、この地域をそれぞれ幅 2 マイルの 15 個の層 (すなわちブロック) に分割し、各ブロックから 2 本の調査線を無作為に抽出した。時間的に 1 つの植生型について報告するだけの余裕しかなかったため、この目的のためには耕作地を選んだ。他の型についても意味するところは同じである。

第 I 図、第 II 図は耕作地域 (斜線) と、二つの抽出方法を示している。

チェーン単位で表わした標準偏差は系統的標本の総和で 279、無作為ブロック標本総和で 564、また単純無作為標本総和でのそれは 1701 であった。調査総和の平均値はそれぞれ 28154, 28238, 28657 であった。これによってこの分類については、3 つの方法による推定値はすべて同じ値となる傾向がみられるが、しかし系統的標本総和の標準偏差は無作為ブロック標本のものの僅か半分で、単純無作為標本のものの $\frac{1}{6}$ にすぎないことがわかる。

系統的標本と無作為ブロック標本の精度を比較した結果の実際的な意義は印象的である。無作為ブロック標本からえられる情報は系統的標本の僅か $\frac{1}{6}$ にすぎない。なぜであろうか? この答の多くと一語は、抽出された最初の無作為ブロックの標本観測値の分布をすべてすれば明らかである (第 II 図をみよ)。2 マイル幅のブロックで予期されたように、1 マイル幅の中に標本の調査線の全くなかったものが略々 $\frac{1}{4}$ あり (実際は 30 の中の 7), また一方調査線が 2 本含まれるものが同じ数だけあった。一層極端には、一般にそうであるように調査線が互いに接近しておちることが多く、この場合にはわずかに $\frac{1}{8}$ マイルしか離れていないところに 4 本の調査線がおちている。28 マイルの長さの調査線で、第 1 のものから $\frac{1}{8}$ マイルしか離れていない第 2 の調査線では、前者が測定されてしまえばその調査によってつけ加えられる情報はわずかである。この欠点をつ

ぐなうものは、無作為標本の誤差公式をそのまま適用して、この種の調査の抽出誤差の不偏推定値が直接かつ容易に計算されることである。平均的な標本内平均平方から計算した全調査間の標準偏差の推定値 575 は、調査総和から求めた推定値 564 とよく一致している。

系統的調査をもう一度考えて、適当な母集団において見出される変動の性格を調べるのが良策である。まず、地域をブロックに細分しても一様な層に分割することにはならないことが認められるであろう。むしろ変量はブロック内において連続的に変化し、またブロックとブロックとに及ぶ。したがって一般にまず特定の場所で変量を測定し、次にある距離をおいた場所で測定をおこなえば特定の変化が生ずるのである。ゆえに変量は位置の函数と考えられるから、抽出に関する問題は曲線のおてはめの問題に帰着する。そのうえ観測値間の相関は、観測点の間の距離に関係する。

無作為ブロック抽出の場合と同じく、それぞれのマイル内の地域は、標本によって全地域と同じ程度に代表されているから、マイルごとの差は抽出誤差に影響しないことは明らかである。同時に、あるマイルでの観測値はそのマイルでの任意の他の観測値の推定値であるということが出来る。したがって問題は「与えられた調査結果から、他の類似の調査結果を予測するときの誤差は何か？」といひ直すことができる。一次回帰の最小自乗理論にてらして考えれば、どのマイルについてもある分類を通る調査線の長さの測定値は独立変量と考えられ、また同じマイルにおける任意の他の調査線（測定されていない）に対する推定値は従属変量と考えることができる。そうすると任意の他の調査線を推定するときの分散はその調査線の属するマイルのみが既知であるとき、その値を推定する場合の分散に $(1 - r^2)$ を乗じたものである。ただし r^2 は測定された調査線と推定すべき調査線の相関係数の平方である。この相関係数の値は測定された調査線と推定される調査線の距離によってさまる。

この相関係数は、1 単位（この場合は 1 マイル）、2 単位、----

の距離で測定された調査線の相関係数を計算し、相関係数を縦軸に、距離を横軸にプロットすれば推定できる。曲線をえがく場合の拘束条件として、距離 0 のときの相関が 1 であることがわかっている。経験から、この関係は指数型であることが示されている。したがって半対数方眼紙にプロットするのが便利である。

第 II 図は系統的標本で計算した 1, 2, 3 マイル離れた調査線の相関係数を示す。図の二つの部分は各マイルにおける No. 4 および 6 の調査線の資料にもとづくものである。この研究においては距離 1 マイル以下の調査線間の相関係数の値も計算できたからここに示しておく。

一つの場所における観測値の分散は、最小自乗法であてはめた多項式からの残差の平均平方偏差であると解釈される。

第 IV 図は測定された 600 個の調査線の観測値をプロットしたもので、調査線のきる耕作地のチェーン（66 フィート）数を地図の左端から測ったマイル数の位置にプロットしてある。各マイル内の No. 16 の調査線の観測値に対して次数 6 の多項式をあてはめた。

経験によって、用いた多項式の項数が十分なら、それ以上高次の項を導入しても、減少した残差平方和は 5% 水準で有意にならないことが示されているから、残差の平均平方はもとの観測値の平均平方逐次差（mean-squared successive difference）の半分、すなわち $\delta^2/2$ に近似的に等しい。ただし

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2}{n-1}$$

この式において、 X_i は 1, 2, 3 ----, $n-1$, n マイルでの観測値で、 n は標本内の調査線の本数である。

このとき任意の観測された調査から他の調査を推定する場合の平均平方誤差は

$$S_T^2 = n \delta^2 (1 - r^2)$$

である。

ここで σ^2 = 最小自乗法で求めた多項式からの残差の平均平方

n = 調査した線の数

$\bar{r}^2$ = 測定された調査線とその調査線の含まれるマイル内の全調査線の間の推定された平均的相関係数の自乗。たとえば、第10調査線が観測されれば、 $\bar{r}^2$ は 0 と $1/32$ マイルおよび 0 と $23/32$ マイル間の調査線に対する平均的相関係数の自乗である。実際にはこれは曲線 $r^2 = e^{-kd}$ を 0 と $1/32$ の範囲および 0 と $23/32$ の範囲で積分すれば極めて容易に求まる。この式で d は調査線間の距離で、 k は $2 \log_e r_{01}$ に等しい常数である。ただし r_{01} は単位距離だけ離れた調査線間の相関係数である。

系統的調査の各々にこの公式を適用して、標準偏差が 192 から 308 の間にあることがわかった。平均的分散に対応する標準偏差は 254 になっている。これは調査線総和間の標準偏差 377 と対比すべきものである。前述したように、平均的分散に対応する標準偏差が 575 になっているところの個々の無作為ブロック標本総和の標準偏差を対比すれば、これは 431 から 776 にわたっている。

系統的調査の各々について " t " の値を計算し、 t の理論分布との比較を行った。自由度 10 で 10.5 なるカイ平方の値が見出された。

第 I 表にこの地域で見出される 4 つの主な分類に対する結果をまとめておく。

Washington 州の地図については、Douglas-fir 林型についてのみ述べることにする。この場合、様に 10 マイル離れた 8 本の調査線の 30 組の総和は、785 チェーンの標準偏差を示した。20 マイル幅の 4 個のブロックの各々における 2 本の調査線から作られる無作為ブロック標本は、106 チェーンの標準偏差を示した。第 V 図は観測された 30 個の無作為ブロック標本の 1 つによって、この地域における Douglas-fir 林型の分布を示したものである。無作為調査の分散は同一抽出率の系統的調査の約 2 倍（すなわち 1.83 倍）であることがわかる。この場合にも、系統的小および無作為ブロック調査の平均値は非常に似ていて、それぞれ 8,340 および 8,280 であった。

更に簡単に計算された公式

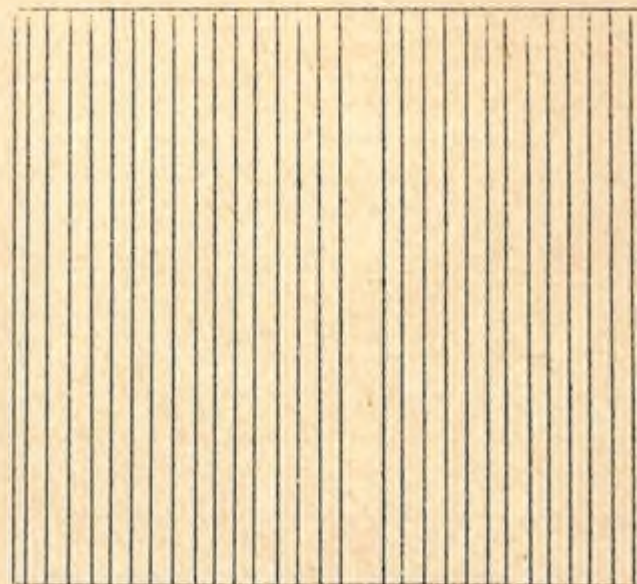
$$S.D._T = 8 \frac{\sigma^2}{2} (1 - \bar{r}^2)$$

を用いて（ここで σ^2 および $\bar{r}^2$ の意味は前と同じである）総和の標準

偏差の推定値が 20 個の系統的標本の各々から計算された。これらは 342 と 1,544 の間にあり、平均的分散から求めたものは 955 になっている。これは実際の総和の標準偏差の 785 と比較されるべきものである。

植生帯の占有地域面積の層化無作為および系統的調査に対するこれらのテストをまとめれば次の通りである。

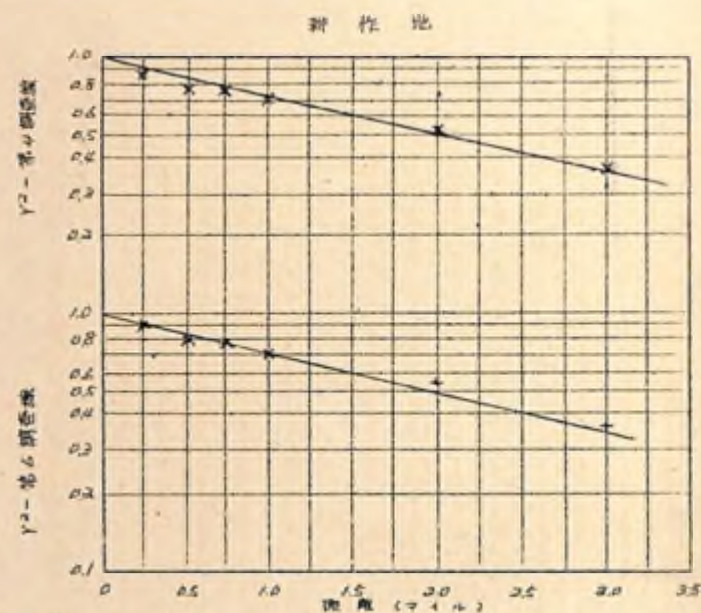
1. テストに用いた資料に対する層化無作為調査の効率、同一抽出率の系統的調査の $\frac{1}{2}$ から $\frac{1}{4}$ にすぎない。
2. 系統的にとられたデータに、無作為標本公式をあてはめると、総和または平均値の抽出誤差の推定値に偏りが生ずる。
3. この種の資料で、無作為に選んだ観測値に無作為標本公式を適用すると、総和の抽出誤差の信頼できる推定値のえられることが示される。
4. 測定した調査線と測定しない調査線との相関の推定値から、系統的標本の抽出誤差の信頼できる推定値のえられることが示された。



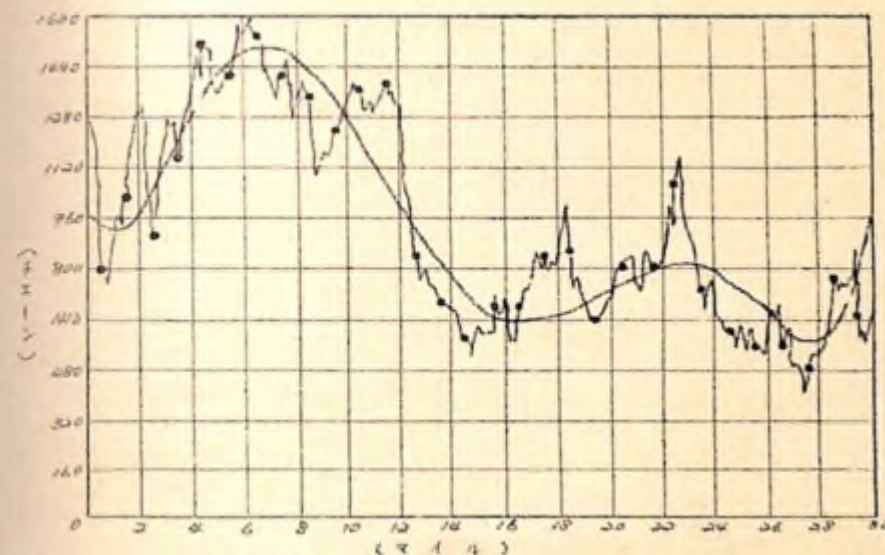
第 I 図 地域の耕作地を横断する 30 本の調査線からなる系統的標本。これは幅 30 マイルのそれぞれのマイル内における調査線 16 から構成される。



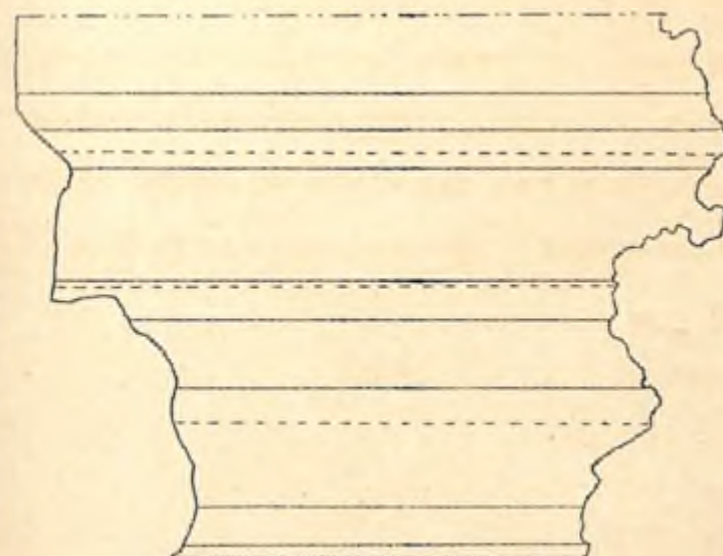
第2図 地域を横断する30本の調査線によって作られる無作為ブロック標本。これは15個の2マイル幅のブロックの各々の中において無作為に選んだ2本の調査線から構成されている。



第3図 調査線 No. 4 および No. 6 について求めた 1, 2, 3 マイル離れた調査線の相関係数。調査線 4 と 6 についての観測値の相関係数とともに、距離 1 マイル以下の他の調査線の相関係数も示してある。



第4図 調査線の位置 (地図の左端からマイルで表わした距離) の上にプロットした600個の調査線の各々によって切られる耕作地のチェーン (66 フィート) 数。各マイル内の No. 16 の調査線の観測値に対して次数 6 の多項式を最小自乗法であてはめた。用いた観測値は太い点で示す。



第5図 Douglas-fir 地域を示す地図。4個の20マイル幅のブロックの各々の中で、無作為に選ばれた2本の調査線の作る36個の無作為ブロック標本の1つを示す。ブロックの周は虚線で示す。

第1表 上述の方法で計算した主要な4つの被推定型についての標本総和の標準偏差の推定値

被推定型	系統的標本				無作為ブロック標本		無作為標本	
	(1) S.D.T	(2) $\sqrt{nA^2(1-r^2)}$	(3) $\sqrt{n\frac{S^2}{2}(1-r^2)}$	(4) S.D.T	(5) S.D.T	(6) S.D.W	(7) S.D.T	(8) S.D.W
耕作地	279	254	240	694	564	575	1701	1781
落木地	292	311	272	605	479	514	1610	1585
草地	103	154	152	310	203	257	418	499
林地	111	130	133	217	156	188	224	254

- (1) 20個の無作為に選ばれた系統的標本総和の標準偏差
- (2) 系統的標本総和値から求めた総和の平均的分散推定値の平方根。最小自乗法であてはめた多項式からの残差の平均平方および可能なすべての系統的調査について観測された調査の推定された平均的相関係数の自乗から推定したもの。
- (3) (2)と同じであるがあてはめた多項式からの残差の平均平方を平均平方逐次差の1/2でおきかえたもの。
- (4) 1マイル間隔で系統的に選んだ調査線、2マイル幅のブロックの各々に2本宛入るよう無作為に位置づけたという仮定のもとに推定した総和の平均的分散の平方根
- (5) 平均的標本内平均平方から求めた(抽出方法は(4)と同じ)標本総和の標準偏差の推定値
- (6) 20個の標本総和の標準偏差。この標本はそれぞれ30本の全く無作為に選ばれた調査線からなっている。
- (7) 平均的標本内平均平方にもとづく(6)の推定値

林分調査における無作為抽出法と系統的抽出法

Random and Systempling in Timber Surveys.

By D.J. Finney

(Forestry, 22, 1949, 後The efficiency of enumerationと題して Bull.No.146, For. Res. Inst. Dehra, Dun, India に再録)

森林調査における無作為抽出法と系統的抽出法

Random and Systematic Sampling in Timber Surveys.

By D. J. Finney

(Forestry, 22, 1949. 換 The efficiency of enumeration

と題して Bull. No. 146. For. Res. Inst. Dehra Dun, India

に再録)

1. 緒言

管理できない固有の変動をもつ他の対象の研究の場合と同じく、森林における標本調査の方法は複雑な調査にみよかけの導線を与えるための実験室の役に立たないような技術でもなければ数学者のおもちゃでもない。むしろそれは、正しく用いた場合には有効な結果を与えるが、もし不注意に取扱った場合には誤まりを免れないような精密機械である。事実、実際上うまく設計された標本は、屢々研究対象を全数調査するより信頼できる結果を与えるものである。というのは使用されている標本は、実際には全数調査で欠けると思われる良心的な測定および記録のある種の標準を要求するものだからである。知識を有し聰明かつ十分訓練された調査員は必然的に多数の、かつ熟練している調査員が、100%調査から得るよりも一層価値のある情報を5~10%の標本から得ることができ、その上標本は時間および全般的な費用が実際上僅かである。Dawson (1947) は標本調査方法の目的と、その全数調査に優る利点を頭脳に要約した。彼の説明は、こゝで論ずるものとは違ったタイプの研究から導びかれたものであるがしかし彼の論述は、標本調査法の問題に係りをもつすべての人々にとって興味あるものである。 (部分調査が実際的な主張としては驚くべきものである) India における最近の経験を経て、Griffiths [1947a (16)] は次の様に述べている。実行された調査結果と調査員の責任者である色々な経営責任者の意見を概く一般的にまとめると、平均的な条件のもとでは5~10%の調査によって、1日当たり正味約20~30エーカー (即ち1日当たりの純調査面積 (gross area) が200~300エーカーの抽出調査) の

調査を調査することが出来る。一般にこのような部分調査の使用は全数調査の対価となり、時間ばかりで済む。

森林調査の場合の標本調査の一般原則は、すべての森林官が熟知すべきものである。これらについては以前の論文で相当詳しく論じておいた〔Finney, 1948(5)〕。標本調査データを分析したり推定値の精度を評価する際に必要とされる統計的計算は、経験のない人にとっては始めは骨の折れる仕事のように思われるかもしれない。しかしそれは調査の外集と比較すればとるに足らないものであります。費用の低減と結果の迅速な収集とに対する僅かな代償である。可能な場合には統計家の助言を求めるべきは言うまでもないが、実際の分析が本質的な原理を習得した森林官の能力の範囲をこえることはまずないであろう。しかし、森林の標本調査について統計家の一層の研究を必要とするような問題の存在することも疑いのないところである。その様な問題の一つはこの論文で取扱うものである。著者は、前の論文が標本調査法の原理の一般的説明として書かれたのに対して、この論文はおそらくその大きな特徴のみかもしれないが、結論が森林官の興味を呼ぶと思われるような統計的な一層を述べるということを目指かにならねばならない。

以前の論文において著者は、部分枚数推定の為の標本調査手段が部分枚数推定の不偏推定値を与え得るような条件を論ずるとともに、更に単一標本のデータを推定値の精度の評価に使用し得るような条件についても論じた〔Finney, 1948(5)〕。偏りを避けるため、標本は無作為標本（無制約または層化）あるいは最初期の単位を無作為に選んだ系統的標本として、客観的な規則に従って選ばなければならぬ。標本がそれ自身の精度の評価を与えるためには、完全に満足すべき唯一の配置は、無制約無作為抽出かあるいは各ブロックから二つあるいはそれ以上の抽出単位を抽出する層化無作為標本である。単一の系統的標本あるいは各ブロックから一つの単位をとる無作為標本から得られる推定値の精度は、オールドックスな推定値手段では内部的な証拠から評価することはできない。それにもかゝらず、

そのような標本の真の精度は、一般的論議の示すところによれば他の何れのタイプのものより高いように思われる。

このように森林標本調査を計画する研究者はジレンマにおちいる。彼は層化無作為抽出を採用し、抽出誤差の正しい推定値を求めること、両立する限りにおいて、小さい奇一なブロック即ち、それぞれ二つの抽出単位を抽出できるような大きさのブロックを用いるべきであろうか？。彼はその推定値の真の精度を高めようとして、抽出率を同じにし、ブロックの大きさを十分に縮め、それぞれから1つ式の単位を抽出して誤差の評価を犠牲にすべきであろうか？。あるいは実行には便利であるが、後に増大する様な繁雑さを招くように、更に精度の評価の不可能なことの多い抽出単位を系統的に選出す抽出方法を採用して無作為抽出を放棄すべきであろうか？

これらの疑問に簡単に解答を与えることはできない。もしもその二つの方法によって得られる精度の増加が僅かであれば、誤差の評価を犠牲にしてまでその様な方法を採用する意味は少ない。

もしこの利益が大きいなら、この方法を利用するための十分な理由となるかもしれない。任意の特定の林でどれ位精度の増加が可能かということは、その林について全数調査があれば標本調査であれば、調査を行ってみなければわからない。しかし類似の他の林の経験によつて、その予想される利益の大きさを示し得るから、調査者の決定の指針とすることが出来る。多数の小単位に対する記録の形で得られる大きい林分の全数調査のデータは、この経験のための基礎として特に有益である。というのは、それらは層々の抽出計画に対応する多くの方法で分析できるからである。

森林の全数調査には多くの費用を要し、面倒であるから、既存の調査記録を十分に活用すべきである。もしこれらの分析によつて、系統的標本の精度が一般に十分大きいことが示され、単一の系統的標本から精度を評価できる満足な方法を考察するために新たな努力を払わなければならぬ。Finney [1948(5)]、Hasel [1942(19)]、および Langsaeter [1932(20)] は系統的標本から得られたデータを

あたかも抽出単位が無作為に選ばれたかのように考えて分析する系
統的方法が危険であることを意識した。如何なる方法でも、統計家
が普通断言するところの確率誤差 (random error) の正規分布¹⁾ の
仮定に加えて、標本全体の単位面積当たりの変動変動の性格についで、
距離でも時間でも仮定を設けなければ正しい推定値を与えることは
できない。Cochran [1946 (33)], Hasel [1942 (19)], Motie [1944 (22)]
は森林標本調査で出現する系統的変動のタイプについて考え得る詳
細な数学的規定を示した。これらは必然的に無作為抽出の場合より
複雑な計算を要求するものである。その上、これらの妥当性につい
ては (数学的証明) は何もない。それはいつも代表的な標本の全数
調査の結果との一致に求めなければならぬが、その場合でも長い
年の経験がなければ、過去の調査データから定められたパラメータ
を系統的標本による将来の他の標本の部分調査に適用できるというこ
とのあまり確かな保証とはなり得ない。Yates [1946 (26)] は実行に
供する別の考え方を提示した。これらの結果もまた全数調査から得
られる試行的標本の精度の真値と比較しなければならぬ。並に将来
において、既存のデータに對して十分な検討が殆んどできない理
論をもとにする方法よりも、単一標本の記録に精度の比重をおく実
験的方法の方が、おそらく実地目的に對して十分信頼できる結果
の評価を与えるのではないかと思われる。この二つはどちらも重要な
研究方法であるが今のところ統計家はどちらについても系統的抽出
の問題について森林調査者に十分に助言を与えることはできない。

第1に解決すべき問題は、実際系統的抽出法の精度の低いものか
どうか、またもしそうなら、その大きさはどれ位であるかというこ
とである。Yates [1946 (29)] および Finney [1948 (4)] は、森林
その他の面積的調査においては、一般には系統的抽出の方が精度が
良いという見解を発表したが、後者は、極めて著しい変動様式の場
合この結論は必ずしも成立せずまた周期的変動を示す地域では、
系統的標本の精度はある種の無作為抽出法よりも低くなることを示
あり得ることを示した。従つてある標本に對する Griffiths [1947 (16)]

の論文 (データは造林主が系統的に配列したものであるから、それ
を抽出する唯一の論理的な方法は系統的なやり方である²⁾。というこ
とには普遍的妥当性が欠けている。Griffiths [1945 a-2 (6)-(10); 1946
a-c (13)-(15)] および Hasel [1938 (18)] は広範な全数調査の記
録を基に、これらを抽出調査方法の比較に用いた。そうして何れも
系統的抽出は一般により高い精度を与えるという結論を下している。
これらの著者達はそのデータの幾つかを有難いことに筆者の一層立
入った分析に使えらるような形にしておいた。それらはある程度では更
に詳細でありある点ではあまり詳細ではない。最近 Yates [1946 (29)]
によつて推奨された系統的抽出における (標本条件に對する補正)
を取り入れる機会が得られた。二つの標本だけのデータにもとづいて、
最終的な結論を出すことは明らかに不可能であるが、この論文は、
適切なデータを手で得る他の人々の、類似した詳細な分析の刺激
となることを目的として提出されたものである。Griffiths および
Hasel からの引用文を除いて、この中で用いた術語は以前の論文の
ものであつて、標本調査法の基礎原理の一層完全な説明については
その論文を参照されたい。従つてここでは読者がそれらを熟知して
いるものと仮定する。

2. データ

(a) Mount Stuart

1945年4月 Dehra Dun のインド森林試験場で開催された進
歩者会議で、戦時中の選伐量と残存資源の情報を収集するための大
規模な調査が急務の急であることが論ぜられた。 (現在用いられて
いる調査方法の潜在的な正確度については、我々は全然知識がない
かあるいはあつても僅少である³⁾。ということを確認した。既存のデ
ータを調べるによつて、一層有用な知識を求めることができる⁴⁾
という考えのもとに、協議会では標本調査法を研究すること、それ
らの効率を過去の調査記録によつて検討することの重要性が力説さ
れた。そうして、'種々の方法で予見される精度と、色々のタイプの
林や地域に對する調査率をできるだけ速やかに指示できるようにす

るため、中央育林部に既存のデータの再検討を促めるために意見を
与えるという決議が可決された。詳細かつ正確な完全な研究よりも
むしろ大略の知識を早急に求める必要があった。[Griffiths, 1945a(6)]。
この決議に従って、A. L. Griffiths 博士はインド各地の多数の全
数調査および部分調査のデータを調べ、これらの調査を種々の型式
および抽出率の標本調査法でおきかえた場合に得られたと思われる
伐採推定値の信頼度を論ずることができた。一年のうちに彼はそれ分
析結果を10のリーフレットにまとめて発表した[Griffiths, 1945
a-9(6)-(12), 1946 a-c(13)-(15); Braconett 1946(1)]。当然
その結果を元にして実行された計画は「詳細かつ正確な完全な研究」で
はあり得ない。Griffiths は、問題の緊急度と発表の遅れたことのため
に理論的な面に十分な説明を与えられなかったと述べているが、
また彼は正當にも、統計家は系統的標本調査に対する彼の疑問に十
分な解答を与えられなかったことを指摘している。実証的な証拠は
らかにこのようにして得られた事情の下で最も重要なことは、「自
明な情報を簡潔な形で早急に与えること」であった。そうするとGriffiths
はこのことを確にやり遂げたのである。その過程において彼は
標本調査法が全数調査に対するもう一つの経済的かつ実証的、簡
便し得る方法であるという彼の主張に十分な証明を与え、標本推定
値のもつ誤差の大きさを指示したのであった。

著者はGriffiths博士の寛容によって、彼の研究した最も広範な調
査の完全なデータをこの論文に使用することができた。彼はその第
3のBafletにおいて、Championによって「南インド多雨熱帯森林
帯の南部熱帯森林帯Cの3a群」として分類されたMadras州の南
Coimbatore地方林に打する不規則な形状のクエーカーブロッ
クの調査結果を報告している[1945(6)]。以後および感謝は
Griffithsの論文に要約されている。この地域は1929年-31年の間
に幅のチェーンで、周回と路々平行に走る直線の基線と直線をなす
stripによって調査が行われた。stripは5チェーンの長さごとに
別々にその中の木を記録した。従って記録単位は1/5エーカーであ

った。「各調査について、1フットの等高円周数によって3フイ
ーから2フイートまでのおよびそれ以上の木の本数と更に周回3フイ
ートまでの丸太(Pole)数を記録した。等高円周の測定値から、丸
太数が別々に記録されている地方校積数を用いて校積を計算した。」
この地域には160個のstripが含まれていた。一番奥のstripは20
-30個の記録単位を含む長さで、4番から18までのstripには35
-40個の記録単位がありそれ以後は面積が少なくなつて85から112
までは15-20単位となり、最後は再び広くなつて、面の端の30個
のstripにはそれぞれ約45個の記録単位が含まれる。この様に、全
地域は路々螺旋型で、全部で4921個の記録単位を含んでいる。⁽¹⁾注
意すべきことは、このデータは標本調査の問題が生ずるずっと以前
に、全数調査だけから収集されたということである。基線やstrip
はその時の実際の便宜から選ばれたもので、標本抽出問題で悩ま
れるものと必ずしも一致しない。

この論文に用いたデータは、樹種や木の大きさに関係なく、取り
得る全伐採を、4921個の各単位について単一の数値として表わ
したものである。この種の近密な熟帯林においては、十分な標本を
得るには必要な個数だけ残が離れた小単位を位置づけ調査する費用
は極めて高くなるから、strip抽出が唯一の実用的方法である。
stripが林を直角に横切るという単位に課せられた制限は、抽出
問題を二次元から一次元に簡略化するものである。このデータは、完
全なstrip以外の記録単位の組が標本を構成するような、もつと制
限の多い抽出形式の研究にも有益なことを立証できるが、こゝでは
多数の全stripからなるような標本のみを考慮することにする。

この論文は自然の林で更迭されるような産物の変動の代表として
このデータを取扱うもので、Mount Stuart 地域での最適な抽出方
法を特に取扱うものではない。従つて各stripに対するエーカー当

(1) この全体と林の面積4921エーカーの間に1エーカーの食い違
いがあるのは、地域の問題が不規則なためである。

り平均枚数のみを求め、平均値計算のもと、与った単位数の違いを無視することによって問題を単純化した。Schumacher および Chapman [1942 (27)] は長さの異なる strip に対する strip sampling を論じたが、この方法は後に述べるような数多くの分析に適用するには極めて面倒である。strip 当りの枚数を、それが矩形の断地に属するものであるかのように取扱って得た「仮想的な (idealized)」データは、枚数の一次元の変動の検定を明らかにする上で同じく有用なものである。即ち、色々な抽出方法の統計的効率についての結論が、各 strip にその長さの比の重みを与えて分析したときに見られるものとそれほど大きく違うことは殆んどありそうもない。

(B) Black Mountain 実験林

Hasel [1938 (18)] は、カリフォルニア北東部の Lassen 国森林にある原生林の、全数調査が行われた 6760 エーカーの地域に於いて、種々の無作為抽出法と系統的抽出法の統計的精度を相互比較論じている。この林は、Ponderosa Pine (*Pinus ponderosa* Dougl.) と Jeffrey Pine (*P. jeffreyi* Gray, Con.) が森林の 90% 以上を占めるマツの純林である。この地域は、Fig I に示すように配置されたそれぞれ 80 チェーン平方の 7 つの区画からなっている。各区画の調査は 10 チェーン × 2.5 チェーンの記録単位について行われたが、これらの区画には 8 個の単位からなる 32 本の東西方向の strip が含まれていた。

ここで用いたデータは、樹種を考慮ない直径 12 インチおよびそれ以上の全樹木の枚数合計である。今の目的にはそれぞれの strip が長さ 80 チェーンと 2.5 チェーンとなっている strip サンプリングのみを考慮することとした。分析に用いた数値は 20 エーカーの strip 当りの枚数値 288 個である。この制限は二つの理由からとられたものである：一つは Mount Stuart の結果と比較できるようにするためであり；一つはこれ程膨大なデータでさえ、以下に論ずる一次元抽出 (サンプリング) と同じ位詳細に二次元の抽出形式を模

計するには不十分と思われるからである。Mount Stuart の林と違

Series A Series B Series C Series D

3			
10		12	7
15	14	13	
	23	24	



Fig I

つて strip は一つの線上には並んでいなかった。それは無作為抽出と系統的抽出の比較を行う際には隣接した strip 間の相関が重要な因子となるから、例えば第 15 区画の (Fig I) 最南端の strip が第 14 区画の最北端の strip に接くとは不公平な結果を招く。実際にはこの地域を 4 つの strip の系列即ち、第 3、第 10、第 15 区画の 96 strip からなる A、第 14、第 23 区画の 64 strip からなる B、第 12、第 13、第 24 区画の 96 strip からなる C、第 7 区画の 32 strip からなっている D として取扱った。抽出誤差は各系列について別々に計算してから全面積に対する平均に換算した。分散分析から縦に異なる strip (例えば第 15、14、13 区画の方向する strip のような) の枚数間にあまり相関のないことが示されたが、これは

おそらく注目してよいことであろう。これらの分析はきの問題にはあまり関係がないから詳細は省略する。

3. 分析の原理

strip サンプルングの形式については前の論文 (Finney, 1948 (5)) で十分論じておいたから、こゝでは極く概略を述べれば十分である。標に全部で N 個の strip があるとする、 $1/n$ の無制限無作為標本をとるには、 N 個の中から $1/n$ (整数と仮定する) 個の strip を全く無作為に抽出しなければならぬ。この場合単なるデタラメな選び方ではなく、厳密な意味での無作為な手続が重要である。層化の目的はむしろ、全標にわたって抽出単位を一層規則的に配置することにある。大きき N_0 なるブロック内での $1/n$ の層化無作為標本は、 N 個の strip を N_0 なる大きさの次々の層またはブロックに細分し、各ブロックから無作為に $1/n$ を抽出する。他の要求に合致する限りゆはできるだけ小さくとるべきである。 $1/n$ の系統的標本は Y なる間隔でとられた例えば番号 Str (クナヨ Y)、(クナヨ Y) というような strip の集まりからなっている。この完全なる規則性からそれは無作為抽出の方法より、全標を一層よく代表するような数値を与えるということが層々主張される。系統的標本の最初の strip が無作為に選ばれていれば、これらの形式の標本はすべて不偏な推定値を与える。この論文は、層々なる抽出率のもとでの無作為抽出法と、系統的抽出法との関係を、一般的に論述を述出そうという希望をもって経験的に研究することである。一般的に推論の基礎としては、二地域のみ研究では不十分であるから著者は将来他の森林調査について、同様な研究が可能とすることを希望する。Griffith も Hasel もともに分散が少数の抽出比の場合に限られており、また Griffith は、層化によつてもたらされる無作為抽出法の、精度の可能な改善を考察していない。これは二人の著者の労作の価値を傷つけようとして述べているのではない。Griffith はインドの sampling 方法について、緊急に必要とされた一般的勧告を行なうため、他の多くの標の調査結果を分析した。また Hasel も完全な strip 以外の多

くの型の抽出単位を考察した。この研究の大半は、Mount Stuart と Black Mountain で、抽出率 $1/n$ の無作為および系統的 strip サンプルングを行なう場合に生ずる抽出誤差の推定を論じてある SEC 5 で知ることができよう。こゝで Y は n から 32 までの範囲内にある。

分析方式の原理は Hasel の用いたものと同様である。それでも無作為抽出については、極く僅かの修正を行なつた。これらは各系列 A、B、C、D からとられる strip 数が整数にならないような抽出比を用いたため必要となつた。系統的抽出でも Hasel の方法と同様で、与えられた抽出率のすべての可能な標本を比較するというやり方を用いた。しかしこの場合、section 4 で述べる標本の集約化 (centralizing) の補正のために多少複雑さが増した。抽出単位が独立、かつ無作為に選ばれたものと仮定して、系統的標本の抽出誤差を計算する場合に共通する誤りと、抽出単位内の個々の記録単位間の変動から抽出誤差を推定する方法が不当なものであるということについては、前の論文 (Finney, 1948 (5)) で注意しておいた。不幸なことに、Griffith の一連の論文はこれらの二つの失敗によつて台無しになつてゐる。その一部は分析を急いで行なわねばならなかつたこと、また他の一部は系統的標本について十分な統計的方法がないことによるものである⁽¹⁾。しかし後の section でみられる様に、

(1) 我々の推定値の精度を求めるための、もっと適当なわかり易い方法がない場合、我々は無作為標本について適用された統計的方法を部分調査の系統的に配置されたデータに適用した。系統的に配置されたデータの系統的抽出に適用し得る統計的方法がこれまで研究されていなかったため、我々はこのような方法をとらざるを得なかつた (Griffith, 1947 (16))。統計家であると言ふにかゝわらず系統的抽出を厳密に取扱う場合の困難を、経験しなことの著者はこの引用文の第二節に可哀するであろう。それにもかゝわらず、それは Hasel の行つたような形式の調査に対して適当であることは確かであり、また無作為な strip サンプルングの場合でも不適当な方法 (strip の取扱つてゐる部分が独立な記録単位であるかのように取扱う) を使用する并弊にはならない。

用いた方法が違ふにもかゝらず、この論文の分析結果は実質的には *Riffith* の主な結論と同一である。

系統的標本の精度を標本内の *strip* 間の平方和から評価しようとする試みが誤まりを導くということは、簡単な人為的例を思えばわかる。ある区に全部で 160 個の *strip* が含まれていて、その系統的な変動状態が次のように極めて著しいと仮定する。即ち 1~10 までの各 *strip* の収量はエーカー当り 500 cu. ft.、また 11~20 ではエーカー当り 600 cu. ft. などのようになっていて、151~160 の各 *strip* のエーカー当り 2,000 cu. ft. で終わっているとすると、更に平均収量（勿論その真値はエーカー当り 1,250 cu. ft.、であるが）は抽出比 $\frac{1}{16}$ の標本から推定されるものと仮定する。

(a) 16 個の *strip* からなる単純無作為標本では、その分散が、全母集団内の *strip* 当りの分散

$$\sigma^2 = 212,500$$

から決定されるような平均値が得られる。

この標本平均の分散に対する真値、即ち期待値は、後述の (3) 式によつて

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{x}}^2 &= \frac{\sigma^2}{16} \left(1 - \frac{15}{159}\right) \\ &= 12,000\end{aligned}$$

である。

実際の場合には σ^2 は未知だから $\sigma_{\bar{x}}^2$ は抽出単位間の変動から計算された自由度 15 の抽出誤差は各系列について別々に計算してから、全面積に対する平均に換算した。

(b) この例は例えば番号 1-40, 41-80, 81-120, 121-160 の 40 *strip* 間の 4 層に層化されたかもしれない。抽出率 $\frac{1}{16}$ の層々無作為標本は、各層から無作為に選ばれた 4 *strip* からなる、層内の *strip* 当りの分散は

$$\sigma^2 = 12,500$$

このとき (a) と同じ公式によつて

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = 700$$

単一の標本から自由度 12 にもとづくそれ自身の分散の推定値が与えられる。

(c) 層化による精度の増大は、20 個の *strip* からなる 5 層を用い、各層から無作為に 2 つの *strip* をとることによつてもっと大きくすることができる。層内の *strip* 当りの分散は

$$\sigma^2 = 2,500$$

とこのとき

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = 150$$

となる。単一の標本からそれ自身の分散の推定値の得られることは真であるが、この場合の自由度は 8 である。

(d) 最も極端な形の層化は 10 *strip* からなる 16 の層を作り、各層から無作為に 1 *strip* をとるものである。この場合層内の *strip* 当りの分散は 0 だから結局 $\sigma_{\bar{x}}^2$ は 0 である。故に 16 個の抽出単位の収量は 500, 700, …… 2,000 の順序でなければならぬ。それにもかゝらず、もしデータが単一の標本のみから得られるのなら、層内の *strip* 当り分散の推定は不可能である。この推定値に対する自由度は 1 つもない。

(e) 10 番目毎の *strip* から作られる系統的標本の場合も 500, 600, 700, …… 2,000 なる 16 個の値が得られるから、結局このときも $\sigma_{\bar{x}}^2$ は 0 である。標本の中心化 (centralizing) によつて生ずる複雑さは、この標本に影響を与えないとして無視することができる。データを単一の標本のみから求めるときには、この分散は推定できない。もし単位間の平方和から推定値を求めようとするれば *strip* 当りの分散の数値は

$$s^2 = \{500^2 + 600^2 + \dots + 2,000^2 - \frac{200,000}{160}\} \div 15 = 228,000$$

となる。

これから s^2 の分散の仮定推定値

$$s_{\bar{x}}^2 = 12,800$$

が導かれるがこれは単純無作為標本のそれより大きい。勿論方法

(d) の分散が各層からとった抽出単位間の変動から評価されるなら、同一の σ^2 が得られる。こゝに論じた例は人為的なものであるが、しかしそれは極端な形の層化あるいは系統的抽出の場合でも大きい精度が得られる。(無制限無作為あるいはそう極端でない層化無作為抽出と比較して) という結論は同時に標本の全単位間の平方和から無批判に抽出誤差を評価するとき、非常に重大な誤りを犯すという事情でもあることを示している。もし前の論文で論じたような周期性効果がないと仮定するなら、その真の抽出誤差は (e) で評価した値より大きくないと主張することはできる。しかしこの結論はもし真の誤差が、この上限より非常に小さい場合にはあまり価値はない。一方同じ 160 個の *strip* の値を無作為に順序で配列した場合には、今述べた何れの抽出形式でも、その σ^2 は無制限無作為抽出と同一となる。系統的抽出で精度が事実上増加しないような状況のもとでは、標本の *strip* 間の平方和から評価した抽出誤差には偏りがない。無制限無作為抽出と比較した場合、抽出分散が小さくなるために最も有用な二つの層化無作為抽出の形式は前に論じておいた [Finney 1948 (5)]。この最初のものでは任意に指定された抽出率、例えば $\frac{1}{2}$ の抽出率について N 個の抽出単位を含むブロックに区分し、各ブロックから $\frac{1}{2}$ の単位を無作為に選ぶことが必要である。この方式は、ブロックが小さくなるに従ってブロック内の分散が小さくなるという一般的原則を、殆んど最大限にまで利用しているばかりでなく、これによれば、同一ブロックからとられた単位の対間の差から、ブロック内分散即ち抽出分散を推定することができる。即ち単一標本の内部的証明から、平均成績の標本推定値の精度が評価できるのである。第 2 の方式は $\frac{1}{2}$ 個の抽出単位からなるブロックを用い、各ブロックから無作為に一つの単位を選ぶものである。このブロックは、第 1 の方式のものより小であるから、一般にその抽出分散は減少する。従って推定値は更に正確となる。しかし不幸にして単一の標本からは、もはや精度の評価に必要なデータは得られないのである。二つの方式はそれぞれ用意があつて、全

数異なるデータが入手できる場合は、何れについても真の抽出誤差を研究し得るものである。

4. 分析の方法

そこで今この抽出率については、三つの無作為抽出の形式、即ち無制限抽出、大きさ M のブロックに層化して抽出するもの、および $\frac{1}{2}$ のブロックに層化して抽出するものを考える必要がある。全地域の *strip* 当りの全分散は、無制限無作為抽出による推定値の抽出分散の計算の基礎となるものであるが、これを σ^2 で表わし、大きさ M のブロック内分散を σ_M^2 、 $\frac{1}{2}$ のブロック内分散を $\sigma_{\frac{1}{2}}^2$ で表わすことにする。これらの分散は、*strip* の仮想的な無制限集団に対するもので、 N 個の *strip* によつて構成されている研究中の所は、その一部分にすぎないと思ふのが便利である。この *section* の終りで述べる通り、任意の抽出された所には、有限個の *strip* しかないという事実を考慮するのに必要とされる抽出誤差の補正は、次には簡単な形で *strip* 当りの分散推定値に適用することかできる。これによつて、自由度に関する混乱や、この補正を二度に施すという危険を避けることができる。

これらの分散の中、 σ^2 は明らかに抽出率と無関係であるが σ_M^2 、 $\sigma_{\frac{1}{2}}^2$ はブロックの大きさとも変動する。 σ^2 の推定値 s^2 は、既知の方法によつて全 *strip* に対する偏差平方和合計から求めることができる。データ内の *strip* 総数 N (Mount Stuart では 160, Blacks Mountain では、A, B, C, D の 4 系列の一つにおける全 *strip* 数) が $\frac{1}{2}$ 度 $\frac{1}{2}$ の倍数なら、データは大きさ $\frac{1}{2}$ の $\frac{1}{2}$ 個のブロックに区分することができる。従つてブロック内変動から導かれる平均平方 $\sigma_{\frac{1}{2}}^2$ は、 σ^2 の $\frac{1}{2}$ の推定値である。この簡単な計算は分散分析表にまとめると便利である [Cochran, 1939 (2)]。例えば Mount Stuart については、分散分析によつて次が得られる (測定単位の詳細については Section 5 をみよ)。

変 動 區	自由度	平 方 和
大きき 32 のブロック間	4	9,288,000
大きき 32 のブロック内 大きき 16 のブロック間	5	2,486,000
大きき 16 のブロック間	9	11,774,000
大きき 16 のブロック内 大きき 8 のブロック間	10	511,000
大きき 8 のブロック間	19	12,285,000
大きき 8 のブロック内 大きき 4 のブロック間	20	1,140,000
大きき 4 のブロック間	39	13,425,000
大きき 4 のブロック内 大きき 2 のブロック間	40	867,000
大きき 2 のブロック間	79	14,292,000
大きき 2 のブロック内	80	1,205,000
計	159	15,497,000

分散分析から導かれるのは、

$$s^2 = 15,497,000 \div 159 = 97,500$$

と σ^2 の次の値は推定値である。

$$Y=2 \text{ について } s^2 = 1,205,000 \div 80 = 15,100$$

$$Y=4 \text{ について } s^2 = (15,497,000 - 13,425,000) \div 120 = 17,200$$

$$Y=8 \text{ について } s^2 = (15,497,000 - 12,285,000) \div 140 = 22,900$$

$$Y=16 \text{ について } s^2 = (15,497,000 - 11,774,000) \div 150 = 24,800$$

$$Y=32 \text{ について } s^2 = (15,497,000 - 9,288,000) \div 155 = 40,100$$

Y の倍数とならないような r の値は取扱いが相当難しい。それらについては、二つの方法の中の一つが選ばれた。即ち林の両端の少数の strip を除外し、残りの strip 数が r の倍数となるようにするかあるいは分析を二つにわけて行ない、結果を平均するかの何れかである。例えば Mount Stuart の林で両端の二つの strip を除外すると、156 の strip が残るから $r=3, 6, 12$ に対する σ^2 の計算にはこれらを用いた。二つの除外は極めて僅かであつて、重大な影響は生じない。更に 1~150 までの strip と 11~160 までの strip について別々に分析を行えば、それぞれ $r=25$ と $r=50$ に対する値

が得られるから、得られる平均平方を平均して σ^2 とした。このようにすると両端の strip から得られる (端部) を少し減少に見做ることになるが、しかしこの場合にも影響は少ないであろう。Black Mountain の系列 A, B, C, D についても同様な方法で、別々に分析を行ない、その後系列あたりの strip 数に比例した重み 3:2:3:1 なる重みを用いて全面積に対する重みづけ平均を作った。記号の定義から明らかなように任意の r に対する σ^2 は $2r$ に対する σ^2 に等しい。従つて σ^2 の推定値 s^2 をとして $2r$ に対する σ^2 の値をとればよい。無作為抽出の分散の計算方法については、これ以上述べる必要はない。従つて、標本抽出の問題に關係している君にとっては、それは周知の事であるから。この結果は第 1 表と第 2 表にまとめてある。系統的抽出の精度を研究するために、全数調査のデータを検討する際、留意にとられる方式は、規則的な間隔で、すべての可能な $1/r$ の系統的標本の組を作り、この組の標本要素間の変動を計算することである。例えば $1/12$ 抽出では、strip 1 + 13 + 25 + ..., strip 2 + 14 + 26 + ..., strip 3 + 15 + 27 + ... 等を作る。そうすると 12 個の strip の合計値の標本平方和から、最初の strip が番号 1, 2, 3, ..., 12 の中から無作為に選ばれた場合の $1/12$ 標本に適切な strip 当りの分散推定値が導かれる。これは Hasel (1938:18) が用いた方法である。これには二つの不利益がある。しかしデータが膨大なものでも、 $1/r$ 抽出の分散推定値は僅か ($r-1$) の自由度から推定されるにすぎない。系統的抽出と無作為抽出の信頼性得る比較を行うためには $1/r$ 抽出の場合の自由度 $1/r$ だと考えられることは殆んどない。第 2 にもし林の一端の帯から他端に至る strip の単位面積当たり標本に、著しい傾斜 (trend) がある場合には、最初の strip を無作為に選ぶと、抽出調査を繰返した場合に得られる推定値の不当な数値を早えることになる。例えば最初の strip から最後の strip $1/r$ までが徐々に増加していると仮定する。もし $1/r$ の系統的標本の第 1 strip が $1/r$ より前の位置にあれば、標本内の各 strip は対応する大きき r のブロックの平均値よりも少ない収縮を与えるから、平均

枚の推定値は低くなる傾向がある。最初の *strip* の位置が γ より後であれば推定値は大きくなる。抽出を繰返せば影響は平均されてしまうから、これは弊りではない。しかし、傾向の非常に強い群ではそれによって推定の誤差が非常に大きくなる。従来、系統的標本が不斉である場合には、最初の *strip* (または抽出単位) の無作為抽出が重要であると認識されてきた。前の論文で述べたように (Finney, 1948 (5))、これは全く必ずしもことである。しかし抽出系統が元の系列全体で偏りが少ないようなものであるれば、抽出の偏り生ずる僅かな偏りは重要でないことが多い。 γ の大きさの異なるブロックの中央の *strip* をとるという原則によって得られる系統的標本は偏っている。抽出を繰返しても得られる標本はすべて等しいから、この系統からは平均値としての真の平均収量は得られないであろう。しかし各々を群で一連の標本調査を行えば、この種の偏りは平均されてしまう筈である(前の論文で注意した様に周回の *strip* が一定の影響を及ぼす可能性はあっても)。系統的抽出法を採用すれば、抽出誤差が標本の記述だけでは評価できないにもかかわらず、中心化されていない (*non-central*) 標本の精度が低下するのを防ぐため、わざと標本の最初の *strip* を無作為に選ぶに γ の大きさの各ブロックの中央の *strip* をとる場合がある (γ が多数のときには中央の二つの *strip* の中の一つをとる)。そうではなく最初の *strip* を無作為に選んだ場合には、ブロック中央からの偏差にもとづく分散成分を除去するため、全標本に対し後述するものと異なる中心化補正 (*Centralizing adjustment*) が施される。系統的抽出の利点を研究する場合、全数調査データから得られるすべての可能な標本にそのような中心化補正を適用するとき、この方法が最も有利であることが示されるであろう。

これら二点に関する計算方法は簡単である。それでも任意の全数調査を完全に検討する場合に要求される計算は面倒である。分散推定の自由度を大きくするため、*strip* の全系列は小さいブロックに分割することができる。従って分散は各グループについて評価して

後全体に対する平均値に適合することが出来る。このグループは独立である必要はなく、重複させても誤差推定に偏りは生じない。勿論それでも計算に用いた全数調査が直ちに結果の信頼度を示すものではない。事実グループを重複させることによって地域内の色々な部分からの記述の重みが多少不偏になることがある。しかし分散そのものが部分ごとにそうひどく違っていなければ、この影響は問題にならないであろう。重複のある対称なグループの組 (*symmetrical system of overlapping groups*) を公平に選ぶには注意が必要である。中心化の補正 (*centralizing adjustment*) を行うための計算は例を考えることによって容易に理解することができる。

Mount Stuart の *strip* に対するエーカー当り平均収量は $X_1, X_2, \dots, X_{160}$ のように表わすことができる。最初の 59 本の *strip* に対する抽出率 $1/12$ の系統的抽出を考える。このとき中心化された標本 (*centralizing sample*) は最初の 59 本の値に対する一次の傾向 (*linear trend*) の影響を除去してから *strip* 30 の位置に関するものとなるように補正を行なうと可能な 12 個の標本に対する補正された計は (Yates, 1946 (29) 参照)

$$X_{12} + X_{24} + X_{36} + X_{48}$$

$$\frac{1}{12}X_1 + X_{13} + X_{25} + X_{37} + \frac{11}{12}X_{49}$$

$$\frac{2}{12}X_2 + X_{14} + X_{26} + X_{38} + \frac{10}{12}X_{50}$$

$$, \quad " \quad " \quad " \quad " \quad "$$

$$, \quad , \quad , \quad , \quad , \quad "$$

$$\frac{10}{12}X_{59} + X_{62} + X_{74} + X_{86} + \frac{2}{12}X_{98}$$

$$\frac{11}{12}X_{99} + X_{103} + X_{115} + X_{127} + \frac{1}{12}X_{139}$$

となる。このとき偏差の平方和はこれらの 12 個の計から計算される結果は 217,900 となる (自由度 11)。この計算は他のグループについても繰返えされる。このグループの最初、例えば 11 から 69 まで

の strip は、自由度 11 の他の平方和を添えるため

$$X_{22} + X_{34} + X_{46} + X_{58}$$

$$\frac{1}{12}X_{11} + X_{23} + X_{35} + X_{47} + \frac{1}{12}X_{59}$$

$$\text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''}$$

$$\text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''}$$

$$\frac{1}{12}X_{61} + X_{73} + X_{85} + X_{97} + \frac{1}{12}X_{109}$$

なる計を用いて重複させることができる。このようにして他のグループをも用いたが、その結果を次に示す。

抽出 グループ	4つの計の 平方和
1-59	817,300
11-69	720,600
21-79	427,500
31-89	292,300
41-99	527,200
51-109	582,100
61-119	908,200
71-129	1,105,500
81-139	626,100
91-149	487,600
101-159	898,400
計	5,461,400

この 11 値のグループの自由度は全部で 121 であるから、平均平方は 5,461,400 ÷ 121 即ち 45,135.53 である。平方和を計算した計は 4 つの strip の和だから、最初はこの平均平方が 4 σ² を推定するもののように思ふかもしれない。こゝで σ² はこのタイプの系統計抽出における strip 当りの分散である。大多数の計が 2 分散の strip の値からなっているということから、分散は僅かに小さくなり、ま

た組の 11 値の計の平均分散が 1,585 σ² / 432 即ち 3,669 σ² であることを容易に示すことができる。抽出率 1/4 に対する一般公式および最良の strip の計に $n=4$ について上述した方法を用いると

平均平方の期待値 = $(n - \frac{r^2-1}{3r^2}) \sigma^2$
である。故に既知の平均 σ² の推定値は 8 σ² である。

$$3,669 \times 8 \sigma^2 = 61,600$$

$$\text{即ち} \quad 8 \sigma^2 = 16,800$$

である。

結論。各グループが重なっているから、この推定値は 121 の独立な自由度によるものと同じ信頼度を有するのではない。一方それは 11 値の自由度のみにもとづく推定値よりずっとよいことは確かである。またおそらく 30 の独立な自由度 (11 × $\frac{168}{11}$ として得られる) にもとづく推定値よりかなり優れている。2 から 32 までの r の値の系列についてそれぞれ同様の計算を行った。小計 (Partial total) に含まれる strip 数 n の選び方は任意である。しかしあまり大きい値をとるとグループには (r+1) 個の strip が含まれねばならぬから、グループが少ししかとれない。また n が小さすぎると標本内に strip そのものを十分な機会をもつて表現するという系統計配置の利点を失はせしてしまうであろう。Mount Stuart では $n=4$ とした。Blacks Mountain のデータでは、 $n=3$ のグループが A, B, C, D の系列に都合よくあてはまった。こゝでも分散の推定値は 4 系列での独立な計算によって求め、その後 3:2:3:1 の割合でまとめられた。

この Section で述べた分散は標本の strip 当りの分散として定義してある。それが 11 個の strip の平均値として得られるエーカー当りの平均収量の推定値で、抽出率が小さい場合、その分散は

$$\sigma_x^2 = \sigma^2/n$$

と置くことができる。正しい値でもありまたこの論文の計算でこれほど用いてきたものはこの n が、標本全体 strip 数 N のかぎりの割合

を占めているということを考えに入れている。

これは

$$\sigma^2 \bar{x} = \frac{\sigma^2}{n} \left(1 - \frac{n_0 - 1}{N_0 - 1}\right)$$

である。但し N_0 はプロット当りのプロット総数で、 n_0 は標本のためにとられたプロット当りのプロット総数である。無制限無作為抽出ではこれらの値は N と n になる。

$$\frac{N}{n} = \frac{N_0}{n_0} = r$$

である。この修正によつて σ^2 の値が低くても抽出率が 100% に近づくと、即ち $n_0 = N_0$ にすれば σ^2 は十分に収斂する。この section の始めで述べたように、無制限無作為抽出のものとして σ^2 を再定義することの利点は、それによつて (3) 式が

$$\sigma^2 \bar{x} = \frac{\sigma^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)$$

なる形になることである。故に σ^2 を推定値 s^2 と置きかえた場合、 n 個の strip の標本から求めたエーカー当り平均収量の分散推定値は、

$$V(\bar{x}) = \frac{s^2}{n} \left(1 - \frac{1}{r}\right)$$

と成つて、section 6 で用いる公式となる。系統的標本に対する中心化の補正は、この公式にそう大きい影響は与えない。

分散を比較する簡単な方法は section 6 で論ずる。

5. 分散の推定値

(a) Mount Stuart

160 個の strip のそれぞれの収量はエーカー当りの $cu. ft.$ で表わした。予備的な計算はすべてこの単位によつて行つたが、分散の最終段階においては、他のデータとの比較に便利なる百分率で結果を表わした。この strip は、原産地のエーカー当り約 600 $cu. ft.$ から面積当りのエーカー当り約 1,600 $cu. ft.$ に到る一級的な肥沃度の勾配のあることを示している。全部の strip (strip の長さに対する重みはつけない) の平均値はエーカー当り 1025.5 $cu. ft.$ である。

た。

種々の形式のサンプリングに対する分散の推定方法は section 4 で述べておいた。全地域に対する無制限無作為抽出の分散は

$$s^2 = 97,500$$

2 から 32 までの r に対する抽出率 r の二つの形式の層化無作為抽出、および系統的抽出に対する分散の推定値は第 1 表に与えてある。任意の r に対する s^2 の値は $2r$ に対する s^2 の値と同一である。

第 1 表 片抽出に対する Mount Stuart での strip 当り分散の推定値

(エーカー当り $cu. ft.$ の単位での値を 100 で割るもの)

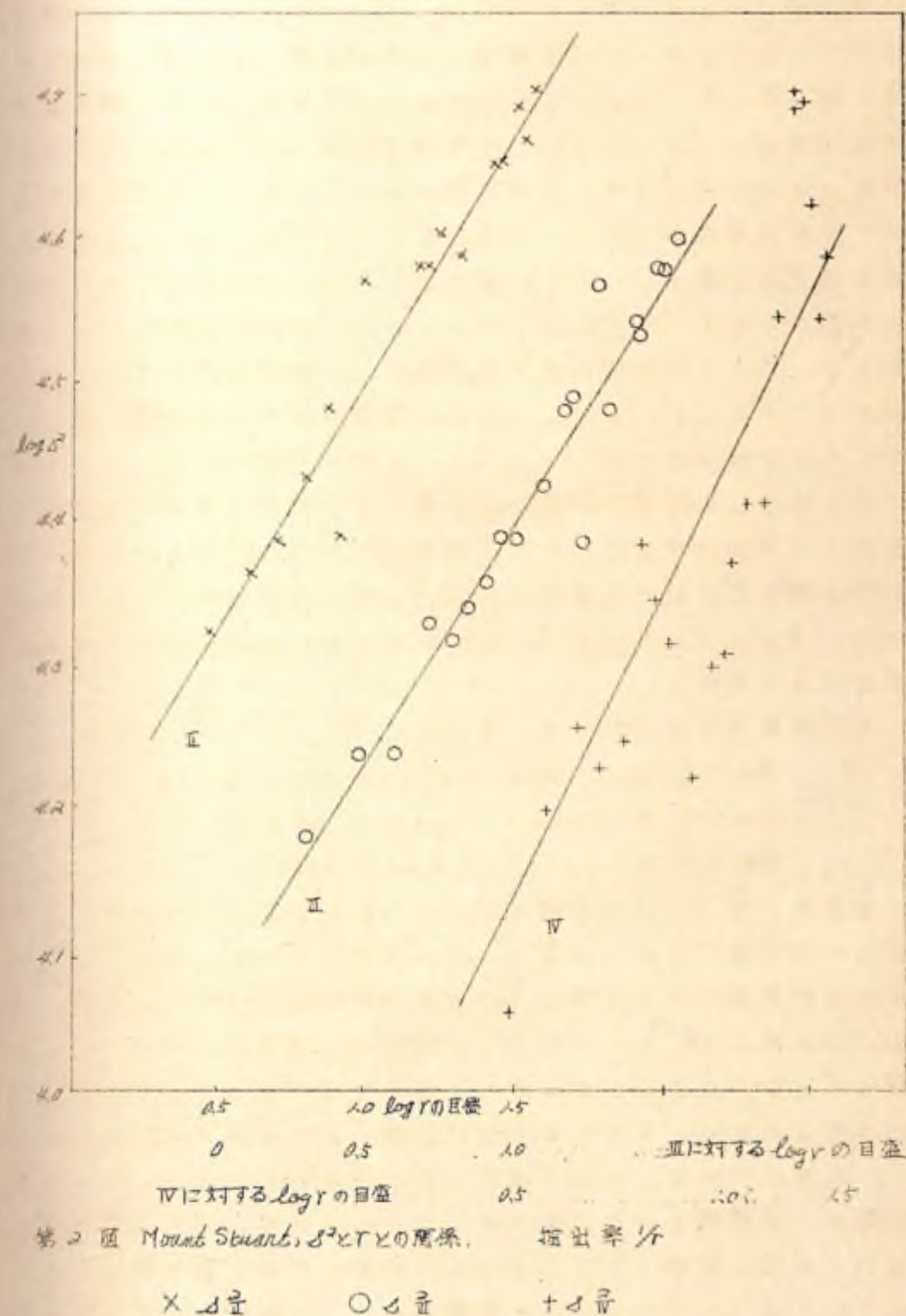
r	s^2	s^2	s^2
2	17,300	15,100	17,300
3	20,900	17,200	11,400
4	22,900	17,300	15,800
5	24,600	21,400	18,300
6	26,700	20,900	16,900
7	30,100	21,900	18,000
8	24,800	22,900	24,700
9	37,100	24,700	22,600
10	30,500	24,600	21,100
12	34,300	26,700	16,800
14	38,300	30,100	20,000
15	37,900	30,800	20,600
16	40,100	24,800	23,900
18	39,200	37,100	26,200
20	32,400	30,500	26,100
22	..	..	36,000
24	44,900	34,300	51,100
25	44,900	34,600	43,500

26	...	...	50,200
28	49,500	38,300	42,400
30	46,400	39,900	35,600
32	50,900	40,100	38,700

$r = 20$ と $r = 26$ に対する無作為抽出の推定値は計算しなかつた。

第1表をみれば、 σ^2 は σ より σ^2 より一貫して小さいことがはつきりわかる。しかし普通 σ と σ^2 の差は小さい。従つてこの地域で系統的抽出を行つた場合、同じ抽出率のブロック当り単位をとる無作為抽出より精度のよい分散推定値が得られるといふことには少し疑問がある。明らかに精度の向上の大部分は、ブロックの有効な大きさが減少することによるのだから、ブロックの大きさが半分、ブロック当り単位をとる無作為抽出は系統的抽出と殆んど精度が変わらない。任意の r に対する分散を大きい σ の値と比べればわかる通り、勿論これらの三つの抽出手続はどれも無作為抽出よりも優れている。

第1表はこれらの一貫した結論を明瞭にするものであるが、 r の増加に伴う分散の変化は非常に不規則である。データの大きさは概観性のある分散推定値をこのような方法で作るには不十分である。従つて抽出方法を数値的に比較する前に第1表の数値の平滑化が必要である。



第2図は三つの樹のそれぞれについて、 $\log S$ の $\log r$ に対する回帰が、研究している道の断面では路々直線となることを示している。抽出率は $\frac{1}{4}$ だから、これは抽出以外の片数についての理想回帰と考へても同じことである。この関係は *Blacko Mountain* のデータではもつとはつきりしているが(第3図)、これらは経験的なもので、何も理論的根拠があるわけではない。それでもこのことを商業の置場実験では分散とプロット、またはプロットの大さの間に分散的な関係があるという *Smith* [1938 (28)] の指摘と比較すると興味がある。多分この回帰は最良の場合に、一般的方法の妥当な近似を表わすであろうが、しかしこれらは直接の目的には非常に疑念のものである。経験的に得られた $\log S$ の値に与えるべき正しい重みを決定することは實際的でないし、異なる r に対する値と任意の一つの抽出方法とは統計的に厳立とは考えられない。しかし必要なことは第2図の点の組に客観的な方法で直線をあてはめることである。そこでは $\log r$ に対する $\log S$ の重みをつけない一次の回帰方程式が用いられた。

この直線を第2図に示す。方程式は

$$\left. \begin{aligned} \log S_{II} &= 2.1895 + 0.3655 \log r \\ \log S_{III} &= 2.0548 + 0.3523 \log r \\ \log S_{IV} &= 2.9169 + 0.4479 \log r \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

である。こゝで S は回帰によって与えられる対応する r の平滑化した推定値である。 S_{II} と S_{III} の計算方法から、 $\log r$ に対するそれらの片数の真の回帰は $\log S$ を垂直方向にずらせば同一となることを示している。任意の r に対する S_{II} は $2r$ に対する S_{III} と同じである。しかしあてはめた回帰直線は平行になつていない。というのはそれらが異なる値の組から得られたもので、各系列は 2 と 32 の間の r に対してのみ与えられているからである。二つの回帰直線は一定距離で平行になるようにするよりも、むしろ観測値の範囲内で厳立に計算する方がよいように思われる。無制限無作為抽出については、平滑化した値を計算できないから S^2 として (5) 式の S

と取る。

(6) *Blacko Mountain* 試験林

288 個の *strip* はすべて同じ大きさだから、20 エーカーの *strip* 当たり樹材量は分断に都合のよい単位である。この値は 1000 フィートボードメジャー (*feet board measure*) で測定した。系列 A の材量は最初の 40-50 の *strip* では、北から南に向つて一様に減少し、その後増加して最後に南端で大きく減少している。そうして全系列の平均は 304,000 ボードフィートである。系列 B の平均値は 330,000 ボードフィートで、北から南に向つて僅かに増加している。系列 C の平均値は 324,000 ボードフィート、この場合にも北から南に向つて材量が増加している。系列 D の材量はかなり大きくて、平均値は 326,000 ボードフィートとなつてゐる。この系列は短かすぎるためにはつきりした傾向が見出せない。288 個の *strip* の平均値は 326,600 ボードフィートであつた。

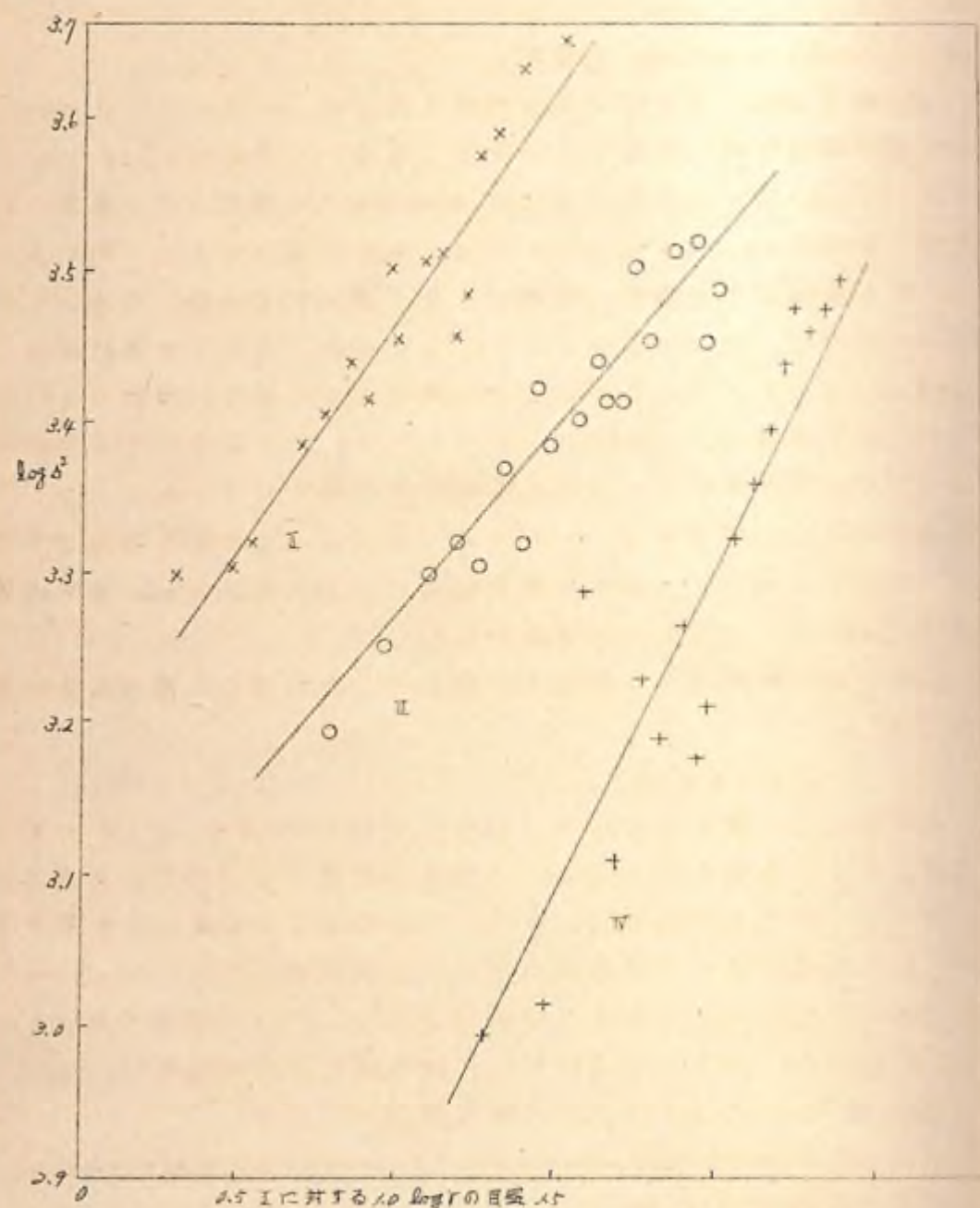
288 の自由度をもつ分散平方和から、無制限無作為抽出の分散値は

$$S^2 = 6,020$$

が得られる。層化抽出の二つの形式に対する *strip* 当たりの分散推定値は 4 つの系列の各々について別々に計算したが詳細は省略する。一般に D に対する推定値は、A、B、C の対応する数値よりも幾分大で、他のものと多少一様な差のあることが認められた。section 4 で述べたようにこの 4 つの系列の分散は 3:2:3:1 の割合で平均された。例えば $\frac{1}{10}$ 抽出の S に対する推定値は、それぞれ 2,170:2,460:2,230:3,550 だから平均値は、

$$S = (3 \times 2,170 + 2 \times 2,460 + 3 \times 2,230 + 3,550) / 9 = 2,410$$

となつた。



第3回 Black Mountain: δ^2 と r の関係: 抽出率 $1/r$

x の δ^2 , o の δ^2 , + の δ^2

これらの平均値を第2表に示す。

第2表 抽出率 $1/r$ に対する Black Mountain の strip 当り分散の推定値
(20 エーカー 当り 4,000 ボードフット) の値を 10 であるもの

r	δ^2	δ^2	δ^2
2	1,990	1,560	970
3	2,010	1,800	1,380
4	2,080	1,990	1,940
5	2,410	2,080	1,290
6	2,520	2,010	1,700
7	2,740	2,330	1,530
8	2,580	2,080	1,840
9	3,170	2,620	1,510
10	2,790	2,410	1,630
12	3,200	2,520	2,110
14	3,220	2,740	2,380
15	2,330	2,580	2,440
16	3,040	2,580	2,740
18	3,750	3,170	3,000
20	3,890	3,790	2,880
22			2,990
24	4,320	3,200	3,130
28		3,220	
30		2,820	
32	4,470	3,040	

大きい r に対する分散の幾つかは計算しなかつた。各系列に対する分散推定値は、この場合 (5Y-1) ではなく (4Y-1) 個の strip の群 (即ち $n=3$) を用いていることを除いては Mount Stuart の場合と同じ方法で別々に計算した。このようにしたため、系列 D に対する推定値は抽出率が $1/8$ かそれ以上でなければ計算できなかった。また系列 B でも $1/16$ またはそれ以上の抽出率に對してしか計算

でなかつた。それはこれらの系列中の *strip* 数が小さかつた為である。

D の δ の値は他の系列よりも小さくなる傾向があり、また小さい γ に対しては A、C よりも B の δ が大きいから、全系列にわたって平均する場合には、これらを除去するための考慮が必要である。この数値をみると、全系列について表わされている各抽出率に対する分散の平均の比を用いて簡単な補正を行なえば、実際上十分であることがわかる。実際この際にして得られた第Ⅱ表の値は、B と D を無視した A と C の単純平均から求められるものと大差ない。むしろ B と D を含めれば、推定値はもう少し低減できるものとなつたであろう。

Mount Stuart の場合と同じく δ は δ より小さく、また小さい γ については δ よりも小さいが、大きい γ については次第に δ に等しくなることがわかる。この場合にも I、II、III の各抽出方法の分散は、無制限無作為抽出の δ よりずっと小さい。Blacks Mountain のデータでは $\log \gamma$ に対する $\log \delta^2$ の回帰が直線となることを前に注意しておいた。第Ⅲ図は第Ⅱ表の数値から導かれたこれらの回帰を示している。回帰方程式は

$$\left. \begin{aligned} \log \delta^2 &= 3.1616 + 0.3101 \log \gamma \\ \log \delta^2 &= 3.1516 + 0.2445 \log \gamma \\ \log \delta^2 &= 2.8794 + 0.4296 \log \gamma \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

である。こゝでも δ^2 は分散 σ^2 の平滑化した推定値を示すのに用いる。無制限無作為抽出に対する δ^2 は (7) 式の δ^2 に等しくなつた。

種々の抽出方法に対する *strip* 当り抽出分散推定値の計算については、section 5 および 6 において説明した。いま論じている二つの系については、(5) および (7) 式によつて無制限無作為抽出法に対する *strip* 当り分散の推定値 δ^2 が与えられる。1% の抽出率の場合、方法 I では *strip* 数数の 1/4 を全く無作為に抽出して誤差をばらばらにする。方法 II では *strip* 数数の 1/4 を全く無作為に抽出して誤差をばらばらにする。方法 III では他の三つの抽出方法に対する *strip* 当り

分散の平滑化した推定値を与える。これらの推定値は γ によつて定まる。方法 II は層化無作為抽出法で、これは無作為に抽出する *strip* のブロックに分割しそれぞれから二つの *strip* を無作為に抽出するものである。方法 III は連続する γ 値の *strip* からなるブロックを用い、各ブロックから一つの *strip* を無作為に選ぶ層化無作為抽出法である。方法 IV は系統的抽出法で、これは γ 番号毎の *strip* を調整し全標本に '中心化補正 (centralizing adjustment)' (section 4 をみよ) を適用するものである。これらの 4 つの方法の基礎となる一般原理については前に論じておいた (Finney, 1948 (5))。この section では抽出率との関係においてこれらの 4 方法の相対的精度を示すために色々な方法で比較することにする。

任意の他の抽出形式と比較した場合の系統的抽出の効率 (efficiency) は、特定の抽出率で得られると思われる推定値の精度 (分散の逆数) で測つた (Finney, 1948 (5)) の比で定義される。この比は対応する *strip* 当り分散推定値の比の逆数である。何故なら (4) 式によつてそれぞれの精度の数値には、標本中の *strip* 数と抽出率によつて定まる同一因子が導入される。百分率で表わした効率は

$$E = 100 \frac{S^2}{\delta^2} \quad (9)$$

である。但し、分子には最初の三つの抽出方法の何れかの分散を代入するものとする。Mount Stuart, Blacks Mountain の何れにおいても、また γ のすべての値に於いて δ^2 は S^2 よりはるかに小だから、無制限無作為抽出に比べると系統的抽出の効率は大きい。第Ⅳ、第Ⅴ図はそれぞれ Mount Stuart と Blacks Mountain に対する二つの形式の層化抽出法の相対的効率を示す。タイプ I の層化は無制限無作為抽出と比べた場合非常に精度が高くなっているが、系統的抽出法と比べればまだかなり劣つてゐる。これは非常に抽出率が大きい場合には 60-80% の効率で、よく用いられる 1/50 以下の抽出率では 30% より幾分小さくなることを示している。タイプ II の層化でも γ が小さいところでは系統的抽出の方がかなり有利で、特に Blacks Mountain のデータでは $\gamma = 2$ の場合系統的抽出の相対

的効率率は100%のように大きい値となっている。しかし拒出率が5%以下の場合に系統的拒出が優れているのは、全くブロックの有無が大きいタイプⅡの場合の2YからYに減少したことにもとづくもののように思われる。タイプⅡとⅣの間の差の推定値はいうに足りないもので、おそらく何れかどちかに優れていることを示しているのではないであろう。二つの表に対する図表は拒出率によく一致している。拒出効率は特定の拒出率のもとで、異なる拒出方式によって得られると思われる精度の一つの尺度を与えるものである。(4)の $V(\bar{x})$ の式には $(1 - \frac{1}{Y})$ なる因子があるため、この効率は必ずしも正確に特定の精度を求めるために必要な拒出効率は大きさを示すものではない。ある種の観点から、検査は、標本の大きさが費用と密接に関連しており、また調査者の当面する主たる問題の一つが特定の精度を如何にして最も経済的に求めるかということであるから一層有用な比較ができる。N個の strip の中からとった $\frac{1}{N}$ 標本には $\frac{1}{N}$ 個の strip が含まれる ($\frac{1}{N}$ が整数でなければこの前後の整数の1つをとる。しかしNが大きいときにはこの修正の影響は無視できるであろう) から、(4) 式から

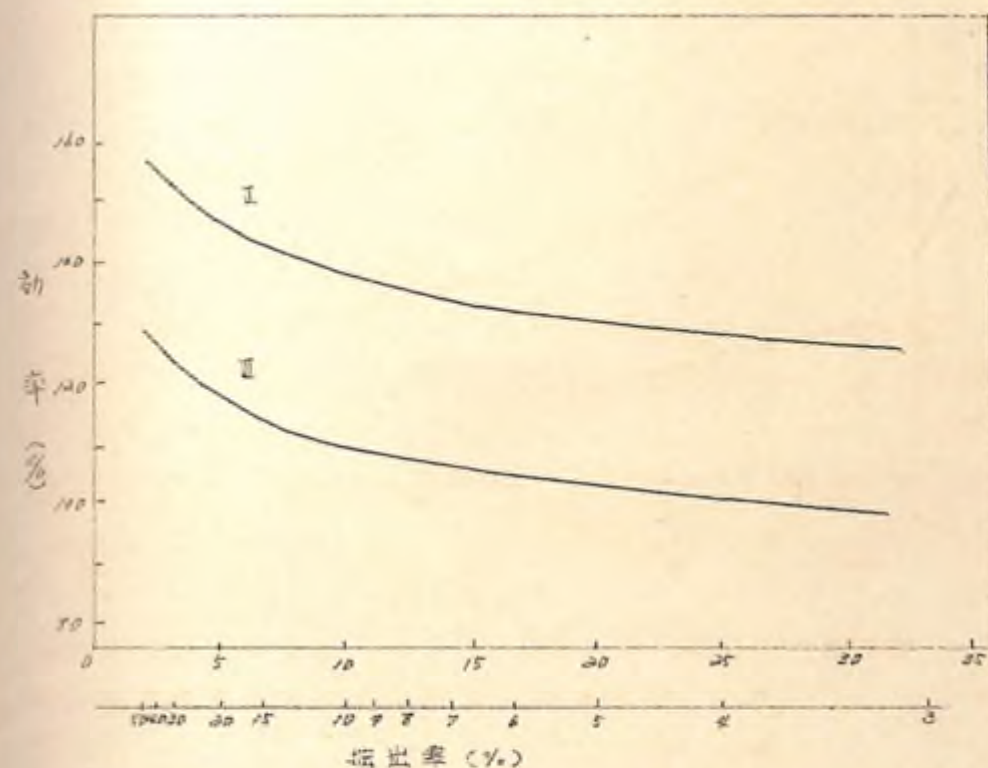
$$\begin{aligned} V(\bar{x}) &= \frac{Y S^2}{N} \left(1 - \frac{1}{Y}\right) \\ &= S^2 (Y - 1) / N \end{aligned} \quad (10)$$

が得られるから、この式の S^2 に適当な strip 当り分散を代入すればよい。結局この精度は $S^2 (Y - 1)$ に逆比例する。拒出率分のとき strip 当り分散が S^2 となる拒出方法で、 $\frac{1}{N}$ の系統的拒出のそれと等しい精度の推定値を得るためには、

$$S^2 \text{ と } Y' \text{ は } S^2 (Y' - 1) = S^2 Y (Y - 1) \quad (11)$$

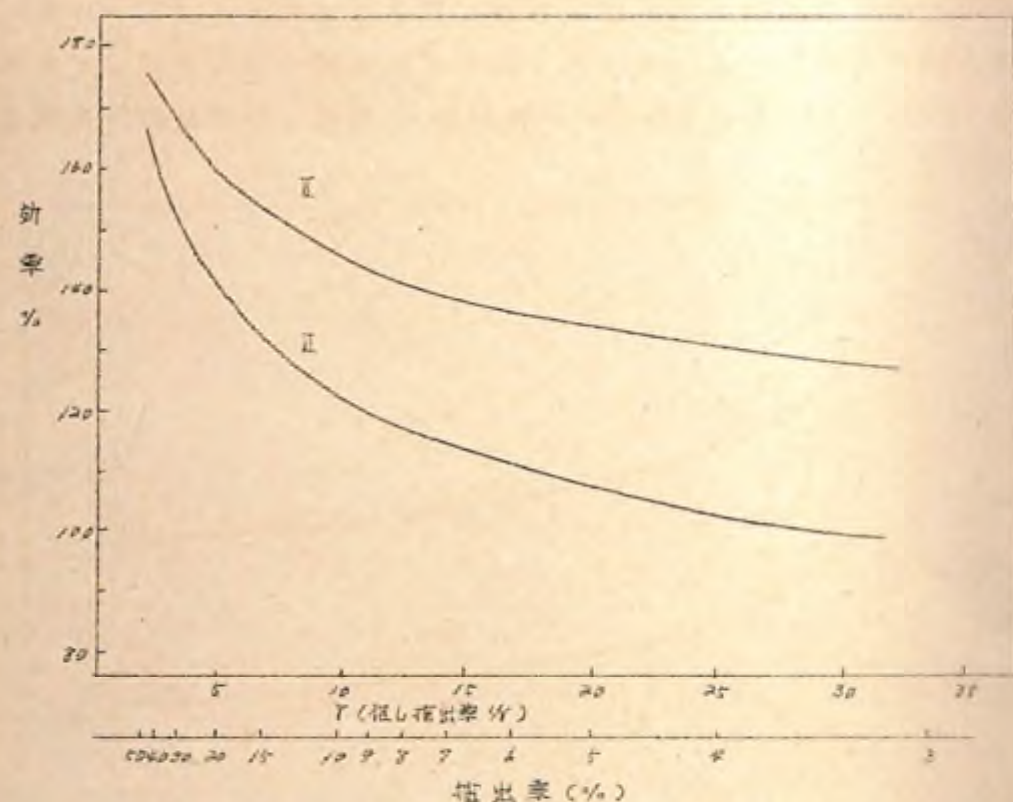
なる関係を満足しなければならない。(11)を直接解いて Y' を Y で表わすことはできない。それは S^2 そのものが Y' によって変わってくる (S^2 の場合を除いて) からである。しかし層化拒出の二つの形式では、(6) または (8) 式を用いて層々の拒出率に対応する分散を計算する図式解を容易に求めることができる。このようにして、特定の拒出率の系統的拒出と同一の精度を得るのにⅠ、Ⅱ、Ⅲの各方法で必

要な拒出率を異なることができる。第6図と第7図は二つの表に対する結果を示す。ⅠとⅢに対する二つの曲線は殆んど同じで非常によく一致している。Black Mountain の曲線は無制限無作為拒出で



第6図 Mount Stuart 層々の拒出率について層化拒出時、ⅠおよびⅢと比較したときの系統的拒出Ⅳの効率：上の曲線；Ⅰに対するⅣ、下の曲線；Ⅲに対するⅣ

Mount Stuart 層拒出率をそう極端に増加させなくてもよいということを示している。前に述べた通り層化による利益は小さいことを示している。他のデータの組から得られた結果と比較するためには、strip 当りの拒出誤差を strip 平均収獲に対する百分率で表わすと便利である。(4) 式の $(1 - \frac{1}{Y})$ なる因子で表わされる有限母集団修正はこの段階で導入しなければならない。従って strip 当りの百分率標準誤差は、

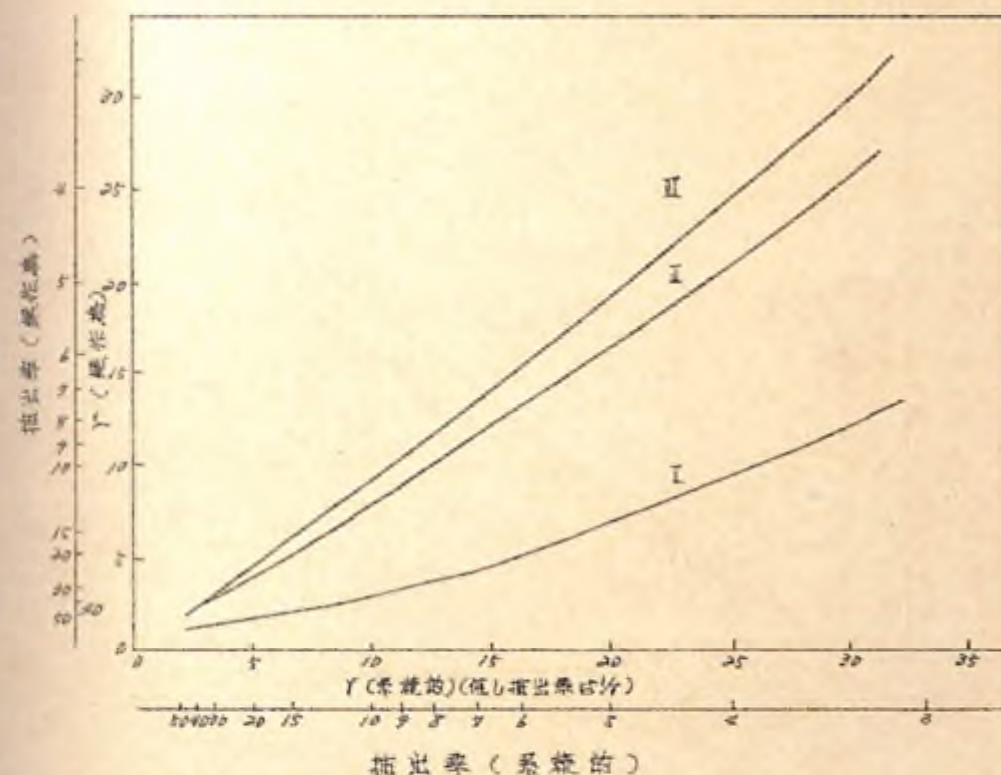


第5図 Blacko Mountain: 種々の抽出率について層状操作
為I、およびIIと比較したときの系統的抽出百分率。
上の曲線: Iに対するIV、下の曲線、IIに対するIV

Mount Stuart

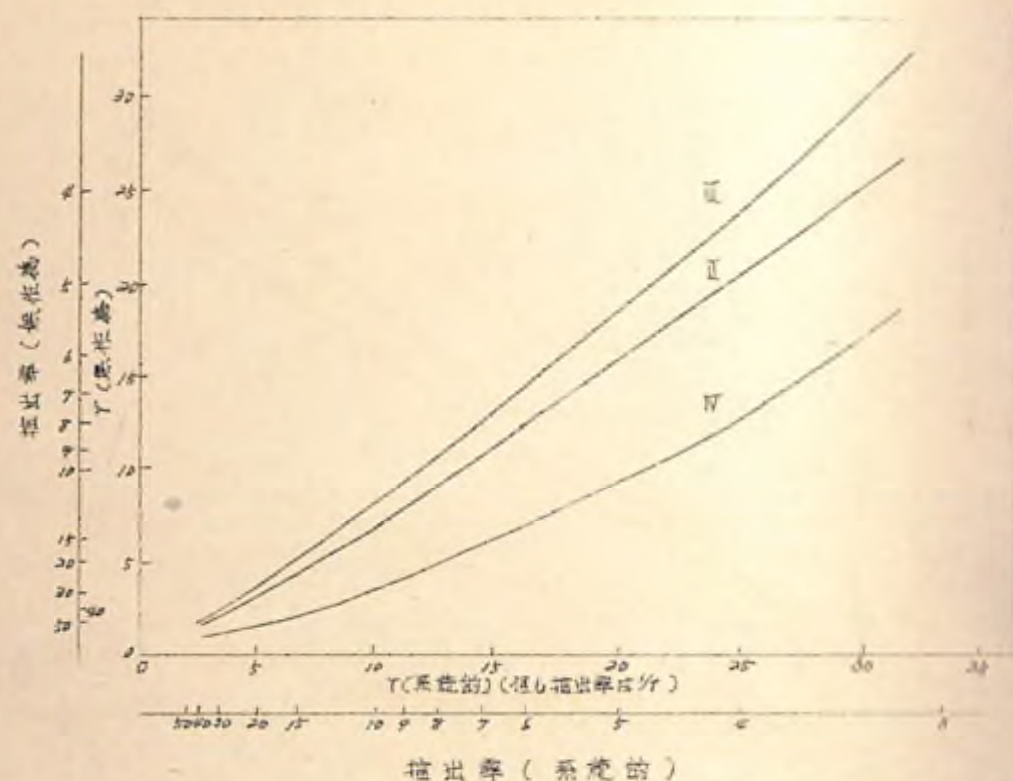
$$\left. \begin{aligned} \text{strip 当り百分率 } S, E, &= \frac{100S\sqrt{(1-1/r)}}{1025.5} \\ \text{Blacko Mountain} \\ \text{strip 当り百分率 } S, E, &= \frac{100S\sqrt{(1-1/r)}}{326.6} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

となる。この数値を $\sqrt{n}$ で割ると (4) 式による標本平均値の百分率誤差が得られる。しかし比較のためには (12) 式の方が良い。第8、第9図に4つの抽出方法の各々に対する百分率誤差をYに對してプロットしてある。予期された通り Blacko Mountain の無制限操作



第6図 Mount Stuart: ある抽出率の系統的抽出百分率と同一精度を得るのに要する操作為抽出
I, I, IIの抽出率。下の曲線: Iに対するI、
中の曲線: IIに対するII、上の曲線: IIに対するII。

為抽出の値は Mount Stuart のものより相対的に低いが、これ以外では二つの図はよく一致している。



第7図 Black Mountain: ある抽出率の系統的抽出IVと同一精度を得るのに要する繰作端抽出I, II, IIIの抽出率。下の曲線: IVに対するI, 中の曲線: IVに対するII, 上の曲線: IVに対するIII。

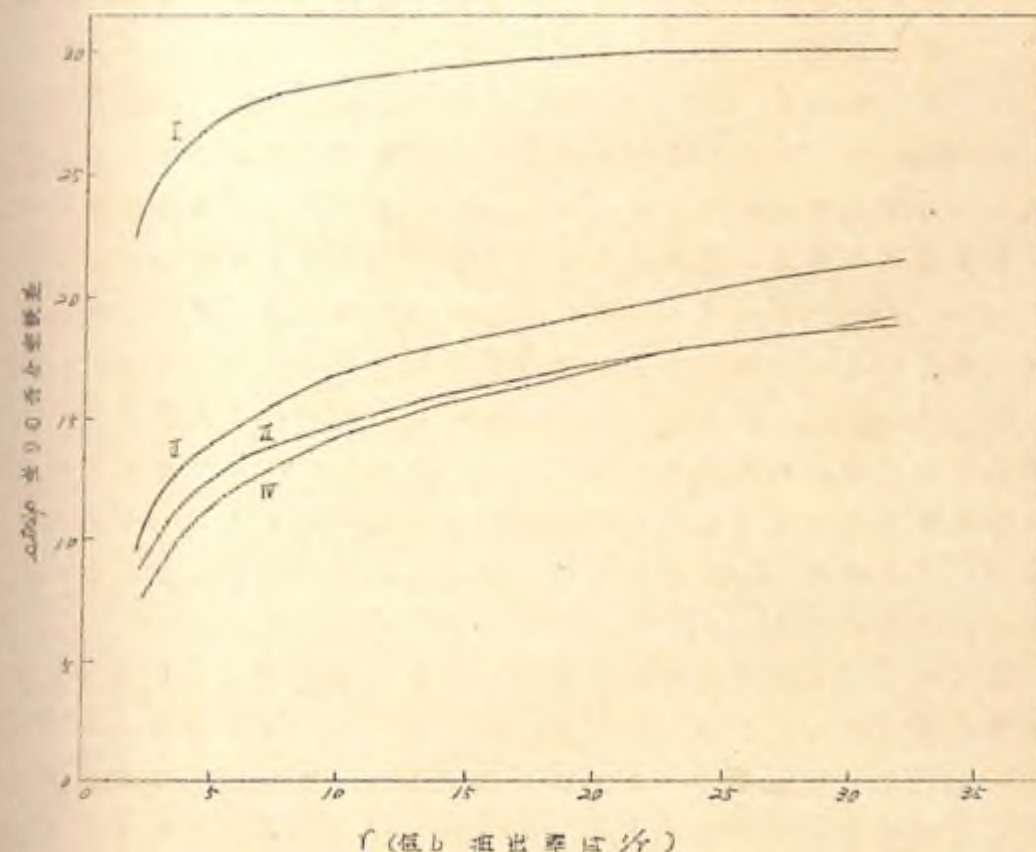
Griffith (1945C(8)) は種々の抽出方法を導かれた Mount Stuart の標本推定値の誤差の限界を論じた。第8図に示した結果は、この論文で論じたような形式の抽出方法について同様な限界を求めらるの
に用いることができる。例えば、第8図は1%抽出の系統的標本の
strip 当り標準誤差は14.1%であることを示している。その最も標
本は Mount Stuart では16個の strip からなっているが、このと
き

$$\text{平均値の百分率誤差} = 14.1 / \sqrt{16} = 3.52$$

である。0.05 および 0.01 確率水準に対する誤差の限界はこの数値
にこれらの確率に対応する正規偏差 1.96 および 2.58 をかければ得ら

る。この結果は、Mount Stuart では単一の1%系統的標本にもとず
く推定値は真値から 2.9% 以上かけ離れることはまずないという風
に解釈することが出来る。このような結果の中の誤つかを第11表に
まとめる。

前の論文 (Finney, 1948(5)) で Griffith の誤差の推定を批判し
ておいた。系統的標本に対する彼の誤差は strip 平均値に対するそ
れらの値の偏差平方和から計算しているか、あるいは、多数の strip
内の記録単位 (1/2 エーカー・プロット) をあたかもそれらが独立
に選ばれた抽出単位であるかの様に考えて用いている。



第8図 Mount Stuart: 4つの抽出方式、I, II, III, IV (すべて繰作端) によるIV (系統的) に対する strip 当り百分率誤差

前に述べた理由によつて標全体の単位重層当り誤差変動がある際

の系統的な傾向に於ける場合には、次の第1の方法では、それが結果
るだけ離れた strip 間の変動を用いていることなる。普通抽出誤差
の過大推定を与えること、なる。

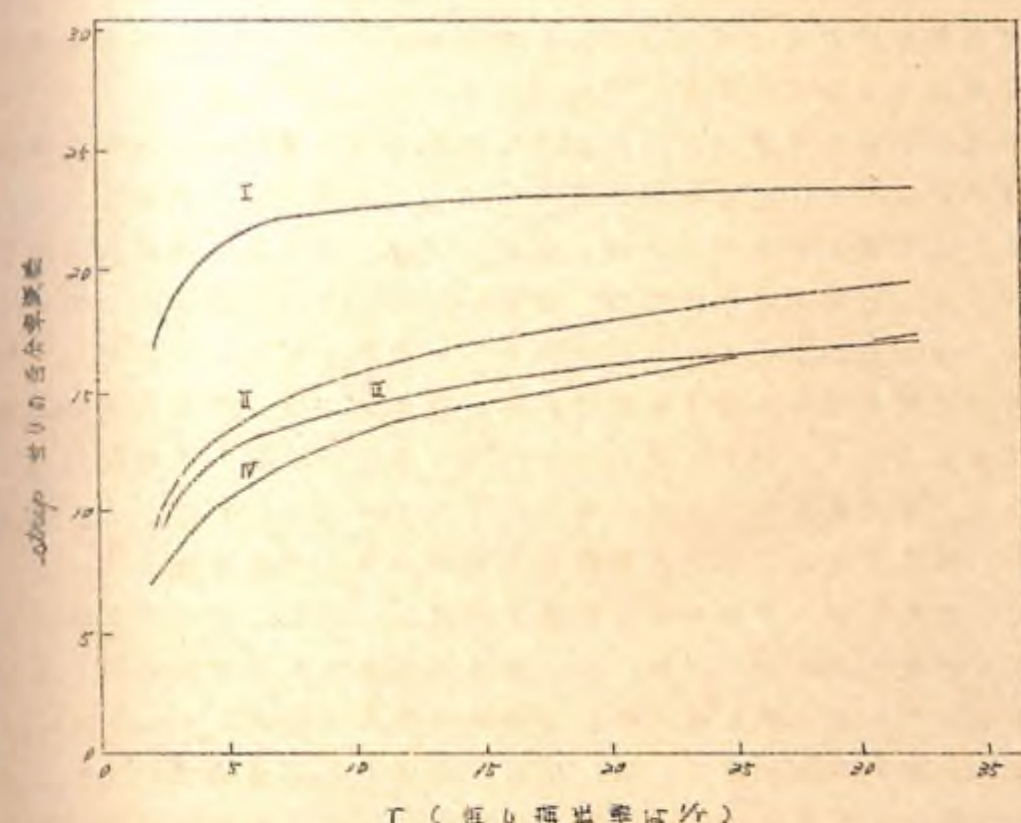
第Ⅱ表 Mount Stuart の誤差の限界(%)

抽出率	1/5		1/10		1/20	
誤差の確率	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01
抽出方法						
無制限無作為(I)	9.4	12.4	14.2	18.6	20.6	27.1
層化無作為(Ⅱ)	4.8	6.3	8.1	12.7	13.4	17.6
層化無作為(Ⅲ)	4.8	5.6	7.3	9.5	11.9	15.7
系統的(Ⅳ)	4.0	5.2	6.9	9.1	11.7	15.4

Section 3 で与えた人為的な例は、この影響を過剰な形で示してい
る。一方次の第2の方法は、同じ strip のプロット間の距離のため
に真の誤差を極端に過少推定すること、なる。実際 Lancaster
(1932 (20)) が指摘した通り strip を十分小さい単位に細分すれば、
それによって評価される標準誤差を任意に小さくすることがで
きる。Griffith の第Ⅳ表⁽¹⁾には、strip 間の変動から計算された抽出
率1%の系統的抽出の誤差の限界が12%と16%で、最終記録単位
間の変動から計算された限界が4%と6%であることが示されてい
るが、この場合 strip の細分をもっと大きくすればこの中間の値が
得られたであろう。

最初の二つの数字は系統的抽出に不公平があり、また第2の数字
は第Ⅱ表に示された6.9%、9.1%に比べて、その精度を不当に高
めていることは明らかである。Griffith は後に1%の系統的標本の
二つの限界として8%と11%なる値をあげているが、第Ⅱ表の14.2%
と18.6%という不備な数値と比較すると、おそらくこの場合にも記

(1) '正確さ' および '精度' という術語の Griffith の用法は統計学の
標準的な用法と正確には同じでない (Finney, 1948 (5)) から誤
見を起さないように注意しなければならない。



第9図 Blacko Mountain: 4つの抽出方式 I, II, III (すべて
無作為) および IV (系統的) に対する strip 当り百
分率誤差

標準単位から計算していると思われる。

Griffith は彼の計算した系統的抽出の数値を、無作為抽出に對す
る信頼な値と比較しているが、彼は無制限無作為抽出のみを考
えているから、提議の方法に公平な考慮を加えているとはいえない。
彼の行なった strip 平均値にもとづく正しい分析(それでも彼は可
能なすべての標本に對する平均の代りに単一標本のみを用いている
ことは明らかであるが)は1%抽出の信頼限界 (fiducial limit) が
推定された平均値の13% (0.05 確率水準) あるいは18% (0.01 確
率水準) であることを示している。これらは第Ⅱ表の14.2% および18.6
%とよく一致している。しかし Mount Stuart のデータでは層化す

ると無作為抽出の精度が非常に大きく改善されることが示された。抽出率が $\frac{1}{8}$ またはそれ以下の(抽出率の大きい標本調査は実質的な重要性は少ない)場合、プロットを小さくとり、各プロットから一つの単位を選ぶというような段階的な層化は、推定の誤差の限界についていえば系統的標本と殆んど同じくらい良好なものであることが第Ⅱ表からわかる。このことは、おそらく系統的な抽出を行ったものの精度の利益が、元来小プロットをとるようにより制限されているために生じたものだとすることを示したという点で、主に理論的な興味を呼び起すものである。第Ⅱの方法はそれ自身から誤差を推定することが不可能だから、第Ⅳの方法よりも実際の利益が少ない。更に重要なことは、第Ⅱの方法ではプロットが大きい場合でも、第Ⅳの方法で生ずる変動の大部分を十分除去できるということと、それによって得られる誤差の限界も、第Ⅱ、第Ⅳの方法に比べてもう少し狭くなるから、単一標本で誤差の評価が可能であるという利点がある。第Ⅱ表に示した結果を概括すれば、Mount Stuartの160個のstripをⅡ、Ⅲ、Ⅳのどの方法で抽出調査しても、元の抽出率のとき真値の5%以内、また $\frac{1}{8}$ 抽出では真値の10%、 $\frac{1}{16}$ 抽出では真値の15%以内の推定値が殆んど確実に得られるということになる。

第Ⅳ表に示された結果は、第Ⅳ表を作るのに用いたものであるが、第Ⅱ表と同様のものであるが、たゞこれはBlacko Mountainの288個のstripに対するものである。比較のためには $\frac{1}{8}$ 、 $\frac{1}{16}$ 、 $\frac{1}{32}$ の抽出率が選ばれた。それは全部で288個のstripにあてはわるのに便利なこと、標本当りのstrip数がMount Stuartで比較した抽出率の場合と、実際上同じになるためである。この場合にも無制限無作為抽出の精度が、Mount Stuartと遜くはないということを除けば、第Ⅳ表は第Ⅱ表と非常によく一致している。更にこゝでも系統的抽出の精度の向上は十分なもので、層化無作為抽出の二つの形式と比較して、僅かに誤差の限界が狭くなるだけである。

Blacko Mountainでの誤差の限界

抽出率	$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{32}$	
誤差の確率	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01
無制限無作為(I)	2.3	2.5	10.6	14.0	15.3	20.1
層化無作為(Ⅱ)	4.9	2.4	3.0	10.6	12.8	16.8
層化無作為(Ⅲ)	4.5	4.0	2.3	2.5	11.3	14.9
系統的(Ⅳ)	4.0	5.3	4.8	2.0	11.4	15.0

Griffithsはまたノースエーキー「プロット」即記録単位が無制限無作為標本による推定をも論じている。 $\frac{1}{8}$ の標本に対して、彼は0.05および0.01の確率水準に対応して、それぞれ6および8%の誤差の限界を得た。彼はこの方法がstripの系統的標本ほど精度がよくないと指摘したが、「その実行には非常に費用がかかるため、通常森林で用いるには実用的でない」という理由でそれ以上着換えることを止めた。整帯状で孤立した小単位からなる標本を調査することの実際的でないことに疑問の余地はないが、誤差が甚だしくもつと容易に抽出条件のもとでは、このような方法も有効となるであろう。この方法の精度に対する可能性については、まだ完全には研究されていない。1) 二次元の層化は、strip抽出調査における一次元の層化

- 1) Griffithsが最近の論文(1947 & (19))で、「大部分の整帯状では、無作為抽出法は自然条件から殆んど実行不可能であるかまたは、実際的な見地から実行できない程費用がかかるむかの何れかである」という理由で無作為抽出法を批判しているのは、おそらく孤立した小プロットの調査を必要とするような標本のみを考慮して言っているのであろう。整帯状の場合でも、stripの系統的標本と層化無作為方式で同数の完全なstripを抽出した標本との間に、費用または自然的回難性においてそれほど大きな差が生ずることは少ない。

の場合と同じく、任意の抽出誤差を減少する上で有効なものである（また系統的な単位の種類によっても、面積により高い精度の結果が得られるであろう）。

Hasel (1938 (18)) は、彼の *Black Mountain* のデータを論ずる際、主として *strip* 以外の、例えば 2 エーカーの小さい記録単位またはこれらの幾つかを組合せて抽出単位を取扱った。

単位の配置が二次元にわたって変動しているような標本の調査に、この論文で述べた方法を取扱うことは原理においては簡単だが、*Mount Stuart* や *Hasel* の *Black Mountain* のようなデータは実用上での試行という点では不十分である。従つてこの論文では *strip* の抽出調査に限定したから、*Hasel* の結果と数値的な比較を行う機会が少なかった。*Hasel* の第 7 表は区画 (32 からなるブロック) 内の $\frac{1}{32}$ の無作為または、系統的抽出を取扱っている。彼の平均平方は記録単位による分析から導かれたものだから、上述の第 7 表と比較するためには 8 倍しなければならぬ。その $\frac{1}{32}$ の値と一致は、当然そうあるべき通り、殆んど正確である (*Hasel* の $\frac{1}{32}$ の値 $= 8 \times 381 = 3050$)。しかし $\frac{1}{32}$ に対する *Hasel* の数値は非常に小さい ($8 \times 189 = 1510$)。これは 16 個の可能な全系統的標本にちがわず彼の推定には、十分な信頼を置けることを示している。おそらく最も簡単な比較は *Hasel* の数値から *strip* 当りの百分率標準誤差を計算して得られるものである。第 I の層化無作為抽出では、これは 16.4% となり (第 7 表の平方根化した値は 12.4% である) だが系統的抽出では 11.5% である (第 7 表では 14.8%) *Hasel* はこの系統的抽出の分散が層化のものより約半分であると結論したが、この結論は系統的抽出の利益を誇大しているように思われる。事実この結果は、全数調査のデータから系統的抽出の誤差を計算するのに使われる方法は、あまり自由度が小さすぎるから信頼し得る数値が得られないという *section 4* で指した論点を裏面するものである。上に述べた多数の異なる抽出部分を組合せて分析する方法によれば、系統的抽出の利益が彼の数値の示すよりずっと小さいと

いうことがはつきりする。抽出率 $\frac{1}{32}$ および $\frac{1}{16}$ に対する第 I の層化抽出の型式および $\frac{1}{32}$ の無制限無作為抽出の平均平方が、*Hasel* の第 7 表に示されている。これらは前に注記した 8 なる係数を除けば、この論文の平方根化してない実験値と一致する。

4. 検討と結論

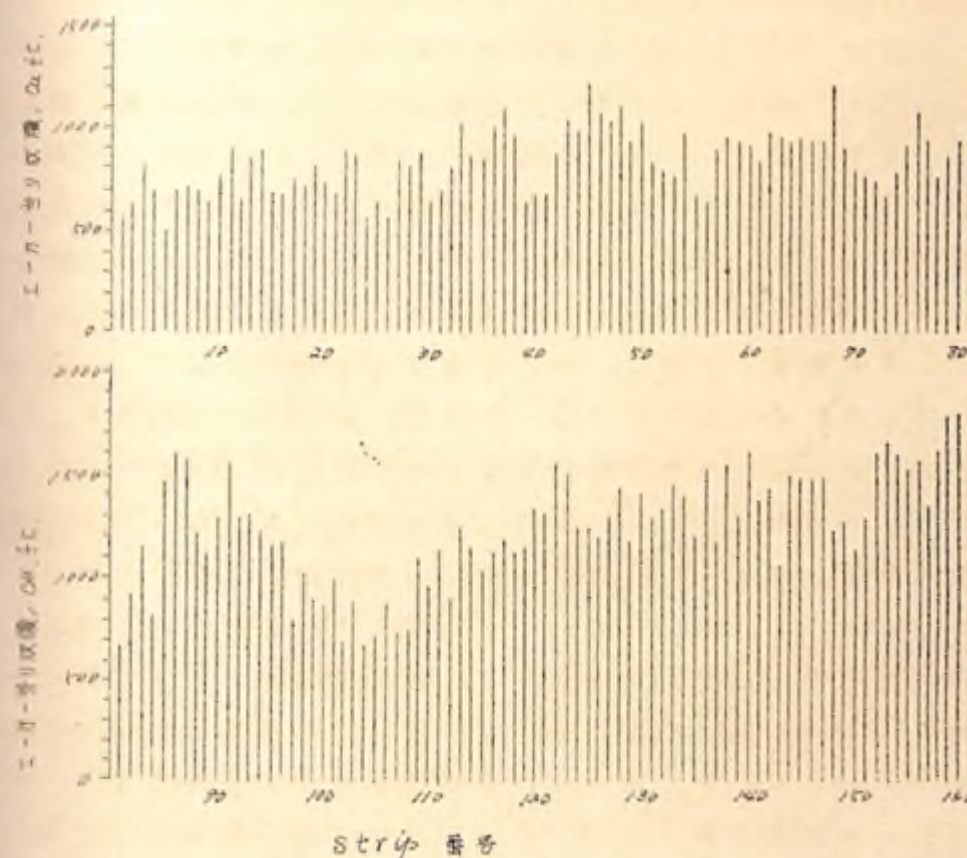
「ある林で最良の抽出調査の方法は何か？」という問には全数調査の結果が既に与えられている場合でも簡単に答えることはできない。ましてそれが既往の他の無作為の経験のみから答えなければならぬときにはなお更である。(最良なる用語は更に正確に定義する必要がある。*Griffith* (1944 (8)) によれば、'アメリカの極く少数の新陳からなっており、肥沃度の勾配にも一定の傾向がなく、従つて非常に細かい調査をしなければ、それを見出すことが困難であるような、殆んど一斉林に近い森林林では、往々無作為抽出が、系統的抽出よりも相當良い結果を与えることが知られている' のである。この場合 '良い' という言葉が無作為の真の精度を指すのであれば、この言い方は正しくないように思われる。個々の抽出単位の立木林幅が全く確率的に分布しているような森林では、無制限または層化無作為あるいは系統的の別なく、与えられた抽出率の全抽出方式は、同一精度の推定値を導くであろう。状況の分布に何か傾向があつて、地域上の変動に系統的な模様が存在する場合には、一般に層化無作為抽出は無制限無作為抽出より更に精度のよい推定値を与え、また系統的抽出は層化無作為よりも精度のよい推定値を与えるであろう。たまたまこの模様が、系統的標本の単位間の間隔と同じ周期の間隔変動を示す場合には、系統的抽出の精度は無作為抽出のものよりはくなるかも知れない (*Finnay*, 1948 (5))。しかし無作為の標本調査でこのようなことは、めつたに生じないであろう。森林で出現する変動の形式は第 10 図に示す。これは *Mount Stuart* の 160 個の *strip* のそれぞれのエーカー当り平均収量である。並接した *strip* には幾つかに区隔があり、また *Section 5* で述べた通り、更なる前に付つて新しい傾向が存在する。しかし系統的抽出の精度は全然逆転させて

まうような統計的な真実性はみられない。

実際の場合、抽出方式の選択は高い精度と、単一標本から精度を評価できることが望ましいということ、および現場での便利さや実行可能性などの客観性にもとづくものでなければならぬ。従って最良の方法はある程度まで考え方の問題である。何故から、最良の方法は研究者が、これらの点に対して与える所与的な重要度に左右されるからである。GriffithsやHaselあるいはこの論文のような介介は、方法を変えた場合に与えられる精度の変化はどれ位であるかを示す程度の援助しか与えることができない。当然他の同様な全数調査の分析から推定することが必要であるとしても、Mount Stuart と Blacks Mountain のデータから得られた結論は更に重要な問題の検討に於いて回答を与えるだけの十分な一致を示している。

もし単一標本から正当な統計的処理によって、平均値の抽出誤差のそれ自身の推定値を求める必要があるれば、制限するものは各ブロックから少なくとも二つの単位を選ぶ層化法の何れかによって、その抽出単位を無作為に抽出しなければならぬ。Section 5.6 で与えられた統計的論議と明確な証明によって、むしろ許容し得る最小のブロックを用いること、即ち各ブロックから二つだけの単位を選ぶような層化が望ましいことが示された。この様な方法によって、標本内の距離から誤差を評価するという制約のもとにおける特定の抽出率での精度を最大とすること、あるいは特定の精度を最小の標本で達成することが出来る。

可能な最小のブロックから単一の strip を無作為に選ぶ抽出形式の層化とか、系統的抽出では、選出精度の改善されることは決定できないが、しかしこれらの方法を採用した場合には、単一標本から精度を評価できなくなる。研究者はある状況のもとでは、系統的標本の精度の向上やその便利さの方が、不利益よりも重大であると正しく考えるかもしれない。しかし懸念な層化は、それが実用上不便であって、精度も系統的抽出以上のものではないにもかゝらず



第10図 Mount Stuart の160 本の strip のそれぞれのエーカー当りの平均収量を示すグラフ。

誤差の評価に不都合であるという理由で、おそろく理論的な真実性をもたないであろう。この論文で研究したデータは、系統的抽出に伴う精度の増加か、経験から森林の変動に系統的な誤差のあることには気付いて、抽出誤差の精度に対するこの誤差の正確な影響をよく理解していない人々が想像する極大の誤差を示している。第6図と第7図はともに、特定の抽出率の系統的標本と同一精度を層化無作為で得るのに、そう大きく抽出率を減らす必要はないということを示している。第2表と第4表は、層化抽出の誤差の限界が、用いるべきと思われる抽出率に対する系統的抽出のものより少し広くなることを示して、上と同一論点を幾分強く裏打ち

ている。抽出率が更に大きくなるとこの値は大きくなる。

これらの表は、100%調査は低コストでは本質的でないという Griffiths の主張を十分正当化するものである。旅分収獲の標本推定値は、実際目的に対して十分信頼できるものにし得るのは疑問である。このようにして調査の時間と費用の多大の節約が可能となる。小標本の場合には慎重な調査が可能だから、これによって得られる質の良いデータの方が見かけ上は完全でも性急に集められた調査値とか、全数調査の記録ほどより価値がある場合が多い。Yates (1946 (29)) は次の感に述べている。'広範囲にわたる地域的調査 (area survey) では確かに無作為抽出よりも系統的な line または strip 抽出が望ましいと考えられる。選取し得る精度を測るのに必要は系統的な作業は、調査そのもので節約される作業量で埋合せができないであろう'。この考えと反対に、この論文中の証明から、精度の増加だけでは系統的抽出を採用する十分な理由とはなり得ず、従って実用可能性について強い疑義がない限り層化無作為抽出法を採用すべきことが示された。もし単一の系統的標本の精度を評価する方法が展開されれば根拠を失なうが、しかし現在では '附加的な作業' を必要とするもの以外には、この感に評価は不可能と思われる。

屢々引用される系統的 strip 抽出の論議は Osborne (1942 (24)) のものである。これは植生型の面積 (cover-type area) に關するもので旅分収獲でなく、またデータもいまの方法の分析には利用できなかったもので、こゝでは粗かく論じなかつた。全部で 960 個の strip 中の 600 個について調査したデータを用いて Osborne は、幾つかの異なる Cover-type の面積を推定する目的には、64 個からなるプロットの各々から、2つの strip をとる層化抽出法よりも、1/32 の系統的抽出の方が精度がよいということを報告している。彼は種数 (II の型式の) 層化は検討していない。系統的抽出によって生ずる精度の増加は、Mount Stuart および Blackas Mountain でみられたものより大きいようであるが、しかしそれは一つの抽出率についてしか計算されていないので、あまり満足な結論を導げない。多数

の異なる抽出率を用いて Osborne のデータを詳細に分析することは、他の種類の測定値を推定する場合の色々な重層的抽出調査式の相対的な価値をはっきりさせるという意味において、非常に興味がある。

一つの系統的標本から誤差の推定値を求めする方法を考案できれば、抽出方法の選択はもつと容易になるであろう。section 1 で述べたように、このような方法は旅の変動形式について更に多くの仮定をおかなければならない。section 3 の例は、系統的標本の抽出単位間の平方和から誤差を評価するとき、どのような誤りが予測されるかを示している。北欧の研究者、特に Langelæter (1932 (20)), Nässtedt (1939 (23)) および Östlund (1932 (26)) は誤差を系統的標本内の連続する単位間の差、または $(x_1 - 2x_2 + x_3)$, $(x_2 - 2x_3 + x_4)$ などのような第 2 階差から計算することを提案した (こゝで $x_1, x_2, x_3, \dots$ は標本の次々の strip の収獲を表わす)。この種の方法に対する証明は、理論的であるよりもむしろ経験的なものでなければならず、従つて全数調査が行われた地域について上記のようにして計算された抽出誤差が不偏であり、また系統的抽出の真の誤差のある程度適切な推定値であることを示すには、これほどのものよりも更に広範な証明が必要である。Yates の試案 (1946 (29)) のように、これらを母系の単一の系統的標本の誤差を示すものとして信頼するには、その前に全数調査のデータを色々集めて徹底的に検討しなければならない。

この論文では無作為と系統的抽出方式の比較のみを取扱った。筆者は、ブロックや抽出単位の大きさとか形および既知の、あるいは考えられる距天度の勾配に対するそれらの向きなどもまた標本推定値の精度に影響する重要な因子であることを記憶しなければならない。これについては前の論文で論じておいた (Finney, 1948 (5))。地域の地図を作るという要求も抽出方式の選択を定める他の考え方となるであろう。従つて、全収獲推定と地図作製との最適条件の当接点を見出さなければならない。作業の全段階で包括的な吟味を行

この方式が必要であるという統計家の警告は、現場の調査を継続している人々に殆んど必要がないであろう。ある抽出単位を独立に繰返えして調査することはデータ収集の手段の方法の本質的部弁として準備しなければならない。そうして、統計的分析は良好なデータを不注意な計算によつて台無しにしないよう十分に予エックルなければならない。

要 約

一つは Madras の熱帯性落葉樹森林、もう一つは California のマツ森林の全数調査を行つた二つのデータを同じで、幾々の *strip* 抽出調査法の比較を行つた。無制限無作為 *strip* 抽出、各ブロックから二つもしくは一つの *strip* をとる層化無作為抽出、および系統的抽出に対する分散を $1/n$ から $1/2$ までの異なる抽出率について計算した。Section 4 において、他のデータで同様な分析を行おうとする人々の為、分散を求めるのに用いた方法を詳細に論じた。

この結果は、森林の層を推定するための標本調査法は、不審に上るべき標本を要せず、実際目的に於いて十分信頼できる数値を得ることを明瞭に示している。Grylls の言葉を借りれば、'集約で費用のかゝる 100% の調査は、層の各々の推定値を求めるためには不必要である'。こゝで論じた二つの地域では、全部の *strip* の $1/4$ から $1/8$ に相当する 30-35 個の *strip* からなる層化または系統的標本は、真値の 5% 以内の推定値を与えることは殆んど確実であつた(一つの森林での *strip* は長さ 4 エーンで、面積の平均値は 25 エーカーであり、もう一つの方は、長さ 2.5 エーンで面積 20 エーカーであつた)。抽出率がこの半分の抽出調査では真値の 10% 以内の推定値が得られ、また $1/8$ の抽出調査では真値の 15% 以内の推定値が得られる。これらの結果は僅か二つの森林にとづくものであるが、二つの間に著しい一致がみられることは、これらが少なくとも他の地域に対する数値と考へてよいという信念を力づけるものである。

予断されたように無制限無作為抽出の抽出誤差は他の三つの方式よりはるかに大きいことが示された。Section 6 で報告した詳細は此

際をまとめると、系統的抽出はどの形式の層化抽出より精度のよいことが証明されたが、それによつて生ずる誤差限界の減少は、系統的抽出を常用することの一般的推奨を正当化するには不十分である'ということになる。検討したデータから、抽出誤差の知識が殆んど重要でない場合の外は、精度は多少低くてもブロック当り二つの *strip* を選ぶ層化無作為抽出の方が、抽出誤差の評価が全然出来ない系統的抽出より厚々望ましいことがわかつた。系統的標本の誤差を測定する合理的な方法が見出されれば懸念は減つてくるであろう。然つてそれまでは研究者は系統的抽出の意味するところを慎重に考慮した後においてのみこの方法を用いるようにしなければならない。

この論文は *strip* 調査を用いる一次元の抽出問題のみを取扱つた。成立した小記録単位の調査が実用的であるような森林においては、完全な *strip* で抽出調査するという制約を取除けば、与えられた抽出率での精度を大きく改善できることが予想される。層化抽出と系統的抽出は単位を無制限無作為抽出する方法に比べて何れも精度が非常に増加する。もし適当なデータが利用できれば、このような精度の増進の大きさをこゝで用いた方法を広展することによつて研究することができる。

謝 辞

著者はインド森林試験場 (Dehra Dun) の設立の寄与者 A. L. Griffith 博士および California 林業および牧畜試験場の森林官 A. A. Hassell 氏が、この論文のもととなったデータを供与された寛大な援助に賛うところが非常に大きい。また私は、Mount Stuart のデータの使用を許されたインド森林試験場長に對しても、当然お礼を申し上げなければならぬ。Griffith 博士への感謝は、博士のデータとその論文とに関する長期間にわたる文通なるびに私の困難に對する忍耐と説明によつて更に大きくなった。私はまた Rothamsted 試験場の F. Yates 博士が、分析方法について示唆を与えられたことに對してもお礼を申し上げたいと思う。

議論のある「無作為か系統的抽出か？」という問題に對して私が述べた見方は、私自身のものである。この論文を作りあげたのに援助を与えられた人々に感謝を表頭しないのは、その人々が私の導いた結論に對する責任を介担していることを意味するものと考えて貰きたい。要するに Griffith 博士および Hassell 氏に對して特に感謝するのは、彼等が、同じデータで得たのと違つた考えを私が述べているような疑問のある問題の論議に、そのデータを供よく貸与されたことによるのである。

引 用 文 献

- (1) Brashnert, H. V. (1946): The Efficiency of Enumerations: A Review Empire Forestry Review, xxv. 42-6
- (2) Cochran, W. G. (1939): The Use of the Analysis of Variance in Enumeration by Sampling. Journal of the American Statistical Association, xxxiv. 492-510.
- (3) ——— (1946): Relative Accuracy of Systematic and Stratified Random Samples for a Certain Class of Populations. Annals of Mathematical Statistics, xvii. 164-77.
- (4) Deming, W. E. (1947): A Brief Statement on the Uses of Sampling in Censuses of Population, Agriculture, Public Health, and Commerce. United Nations Subcommittee on Statistical Sampling.
- (5) Finney, D. J. (1948): Volume Estimation of Standing Timber by Sampling. Forestry, xxi. 2, 179-203
- (6) Griffith, A. L. (1945a): The Efficiency of Enumerations. I. The Problem. Forest Research Institute, Dehra Dun, Indian Forest Leaflet, no. 83.
- (7) ——— (1945b): The Efficiency of Enumerations. II. Madras Tropical Wet Evergreen Forest III. Typical Calculations. Ibid. no. 84.
- (8) ——— (1945c): The Efficiency of Enumerations. IV Madras Moist Mixed Deciduous Forest. Ibid., no. 85.
- (9) ——— (1945d): The Efficiency of Enumerations. V Upper Assam Tropical Evergreen Forest. VI. Typical Calculations. Ibid., no. 86.
- (10) ——— (1945e): The Efficiency of Enumerations. VII. The Distribution of the Volume Figures Ibid., no. 87.
- (11) ——— (1945f): The Efficiency of Enumerations. VIII. Cbir (Pinus longifolia) Forest in the Punjab and United

- Provinces. Ibid., no. 88.
- (12) ——— (1945g): The Efficiency of Enumerations. IX. The Distribution of the Volume Figures (contd.). Ibid., no. 89.
- (13) ——— (1946a): The Efficiency of Enumerations. X. Hill Sai (*Sborea robusta*) Forest in the United Provinces. Ibid., no. 90.
- (14) ——— (1946b): The Efficiency of Enumerations. XI. The Distribution of the Volume Figures (contd.). Ibid., no. 90.
- (15) ——— (1946c): The Efficiency of Enumerations. XII. One Species in a Mixed Forest. (Teak in a Madras Moist Deciduous Forest). XIII. Confirmation of the CBIF (*Pinus longifolia*) and sai (*Sborea robusta*) Data. XIV. Summary of Indications. Ibid., no. 93.
- (16) Griffith, A. L. (1947a): The Efficiency of Enumerations. Indian Forester, lxxiii. 102-7.
- (17) ——— (1947b): The Efficiency of Enumerations. Empire Forestry Review, xxvi. 105.
- (18) Hasel, A. A. (1938): Sampling Error in Timber Surveys. Journal of Agricultural Research, lvi. 713-36.
- (19) ——— (1942): Estimation of Volume in Timber Stands by Strip Sampling. Annals of Mathematical Statistics, xii. 179-206.
- (20) Langsaeter, A. (1932): Næktigheten ved linjetaksering av skog. I. Bestemmelse av treantall og dimensjonsfordeling [Accuracy in Strip Survey of Forests. I. Determinations of the Number of Trees and the Distribution of Dimensions] Meddelelser fra det Norske Skogsforskningsvesen, iv. 431-564.

- (21) Madow, W. G., and Madow, L. (1944): "On the Theory of Systematic Sampling, I." Annals of Mathematical Statistics, xv. 1-24.
- (22) Matern, B. (1947): "Metoder att uppskatta noggrannheten vid linje- och provytetaxering" [Methods of Estimating the Accuracy of Line and Sample Plot Surveys] Meddelanden från Statens Skogsförsöksanstalt, xxxvi. 1-138.
- (23) Näslund, M. (1939): "Om medelfelet's härledning vid linje- och provytetaxering" [On computing the Standard Errors in Line and Sample Plot Surveying]. Ibid., xxxi. 301-44.
- (24) Neyman, J. S. (1934): "On the Two Different Aspects of the Representative Method: The Method of Stratified Sampling and the Method of Purposive Selection." Journal of the Royal Statistical Society, xcvi. 558-625.
- (25) Osborne, J. G. (1942): "Sampling Errors of Systematic and Random Surveys of Cover Type Areas." Journal of the American Statistical Association, xxxvii. 256-64.
- (26) Östlund, J. (1932): "Erforderling taxeringsprocent vid linjetaxering av skog" [The Requisite Survey Percentage when Line-surveying a Forest]. Svenska Skogsvårdsföreningens Tidskrift, xxx. 417-514.
- (27) Schumacher, F. X., and Chapman, R. A. (1942): Sampling Methods in Forestry and Range Management. Duke University Press, Durham, North Carolina.
- (28) Smith, H. F. (1938): "A Empirical Law describing Heterogeneity in the Yield of Agricultural Crops." Journal of Agricultural Science, xxviii. 1-23.
- (29) Yates, F. (1946): "A Review of Recent Statistical Developments in Sampling and Sampling Surveys," Journal of the Royal Statistical Society, cix. 12-43.

森林標本調査における週期 変動の一例について

An Example of periodic Variation in Forest Sampling.

By D.J. Finney.

(Lecturer in the Design and Analysis of Scientific Experi-
ment University of Oxford)

(Forestry, 23, 1950 より)

森林標本調査における周期性変動の一例について

An Example of Periodic Variation in Forest
Sampling. By D. J. Finney.

(Lecture in the Design and Analysis of Scientific
Experiment, University of Oxford)

(Forestry, 23, 1950より)

緒 言

最近の論文〔1942 (I)〕において、著者は森林の蓄積推定のための
標本抽出及び系統的 *slight* サムプリングの相対的利益について述べた。

ある抽出法が常に抽得し得るという純理論的根拠は存在しない。
サムプリング計画の選択にあたっては、森林で普通に見られる変動
についての経験の累積とともに、経験中の研究の特有の条件を考慮
しなければならぬ。

系統的標本による推定値の精度は、それが多くの場合同一抽出率
の標本抽出よりも高いものではあるが、ある種の補助サムプリン
グによって可能となる以外にはそれを標本自身から推定する事は不
可能である。精度についての知識並びに最大の精度の確保との二つ
の因子は、抽出法を決定する以前に考慮されなければならぬ。

系統的抽出で抽得し得る精度の利得 (*gain*) の知識は、明らかに
重要であるが経験的に変わる以外に方法はない。前論文において提
出した仮説的結論は、二つの地域 (南インドの Mount Stuart とカ
リフォルニアの Black Mountain) の細密な分析に基づくもので
あったが、平均利得の推定し得る推定を行うには、はるかに多くの
証拠を検討すべきことが認められた。この目的のために、広範囲の
森林調査から得られた更に多くのデータが分析されている。これら
の中の一つ (北インドの Dehra Dun) では、以前の分析において見
られなかった興味ある特徴が現われている。というのは、このデ
ータには、変動の規則的な周期的成分が示されているのである。前に
〔1942 (I)〕で述べた通りこのような真実は、系統的抽出の精度を
著しく低下させるもので、一定の抽出率のサムプリングでは標本為

抽出と比較したとき、一般論は系統的抽出の利益が消失してしまいか取いは不利に転化することである。

この論文の目的はこれらの Dehra Dun のデータに対する抽出実験の統計的解析の結果を、前論文と同様に記述することである。用語並びに方法は周知性のために導入された変数なものを除けば既に予発表頭した通りである (1947 (1) 1948 (2))

資料 (The Data)

Griffith [1947 (2)] は Northern India, United Province の Dehra Dun Division の Sal (サロウグヮエ) 林の毎木調査を報告している。この北緯熱帯季風地帯の落葉樹林の気候及び環境は彼の論文にまとめられている。1947年、この地域の20%の毎木調査が行われた。これには市2 chain の strip (帯) を用いたが、調査はとることの出来た全 strip の中各々番毎の strip について行った。strip のそれぞれ5-chain 区画の中の木が別々に記録された。従って一ヶ単位毎の記録が行なわれたわけである。Sahai [1947 (4)] は、この調査方法を詳しく述べている。二つの主要樹種 Shorea robusta, Gaertn および Terminalia tomentosa W. & A. に対する 12 インチから 24 インチ迄のダインを直径階、及び 24 インチ以上の株木本数が記録された。これらから地方収獲表 (local volume table) によって枚層を計算した。着者が各 unit 内の二樹種の収獲の資料を利用出来たのは、Dr. Griffith の好意によるものである。

この論文に用いたデータは 2506 ケの記録単位 (Recording unit) を含む 292 個の strip に関するものである。基線の北西端にある strip は短かく、その殆んどは 5-15 単位を含むのみである。40-171 までの strip の大部分は 30-50 単位からなっていて 20 単位以下のものは一つもない。176-192 の間の strip は短かい (188 は 2 単位のみ)。短かい 279-282 を除く残りの strip の殆んどすべては単位数 25 から 45 の間であつた。前の論文 [1948 (2)] における

と同じく strip の長さを何等考慮することなく、strip 当りの平均枚層を分析に用いて、一次元のサンプリング問題のみを考慮した。

分散の推定 (The Estimation of Variances)

前に研究した Mount Stuart と Blocks Mountain の林については、この地域のすべての strip の毎木調査のデータが利用できた。

Dehra Dun での 292 ケの strip は、調査が行なわれたかも知れない推計 1460 ケの strip の系列からとられた、20% の系統的標本にすぎない。従つてこの林の真の平均枚層との比較はできなかった。その代り 20% 以下の抽出率の標本とこの 20% 抽出の標本の結果とは比較することができた。換言すれば、この 292 ケの strip はあたかもそれがある林の完全な調査の結果であるかのように用いることができるから、それからとられた異なる抽出方法は比較する事が出来る。この分析からは林全体からとられた無作為及び系統的抽出の相対的価値 (merit) を全く公平に示すことはできない。というのは、これらは隣接した strip と近距離の strip 間の距離に大きく影響されるからである。論すべき標本は、この林から抽出する事の出来る特定の形式 (type) のすべての可能な標本ではなく、292 ケの strip の中に含まれる限定された strip の組にすぎない。そして 292 ケの引続く strip 間の距離は、隣接する strip 間の距離よりも一般には小である。

分析に適當な記録が豊富にあれば、Dehra Dun のデータの組はそれが 20% 標本から得られた副次標本 (sub-sample) であるという制限のために捨てられたかもしれない。実際、抽出変動の広範な研究において用い得るデータは、簡単に一方の側への結論をですにはあまり少なすぎた。このことから Dehra Dun の記録ははじめにこの二つの林について述べられたのと同じく同様にして分析された。用語の便宜上、このサンプリングは 292 ケの strip が全数分であるかのように述べることにする。故に Y 分の 1 の標本というのは実際には 1460 ケの strip から成る真の林からとられた 1/4 の標本である。

しかし、それは調査が行われた292のstripからなる特定の粗さのみ抽出するように要請されている。

292ヶのstripの(strip平均値の重みをつけられ平均の重みは平均するとエーカー当り1,028.4 cu. ft.である) 北近畿の概算の枚層は大で、大部分のstripの枚層はエーカー当り1,500 cu. ft.以上であつて、あるものではエーカー当り2,000 cu. ft.をこえる。南東部ではこの値はエーカー当り約500 cu. ft.にまで低下する。

無作為抽出(unrestricted random sampling)について292のstripの偏差平方和から計算された分散は(acre当りcu. ft.)²の単位で

$$S^2 = 205,400$$

である。

Table I は $ar(S^2)$ block による層化無作為抽出(stratified random sampling)と $r(S^2)$ block での層化無作為抽出(stratified random sampling), 及び系統的無作為抽出(systematic random sampling)に対するstrip当り分散の推定値を示す。

無作為抽出(random sampling)についての計算は、分散と r との関係を表わすのに各層と考慮される値数の r の値について行われた。任意の r に対する S^2 は $2r$ の S^2 と同じだから、これらの二つの分散は同じ図表に表わすことができる。(Fig 1)

尤々を用いた系統的抽出については、 $r=58$ 以上とすることは不可能であるが、自明の理によつて、無作為抽出で用いられるべき分散は多くの r の値について分析が行われた。

Fig 2 は S^2 と r の間の関係を示す。

Table I Dehra Dun での strip 当り分散の推定値, $\frac{1}{r}$ 抽出
[1000 (エーカー当り cu. ft.) の単位で]

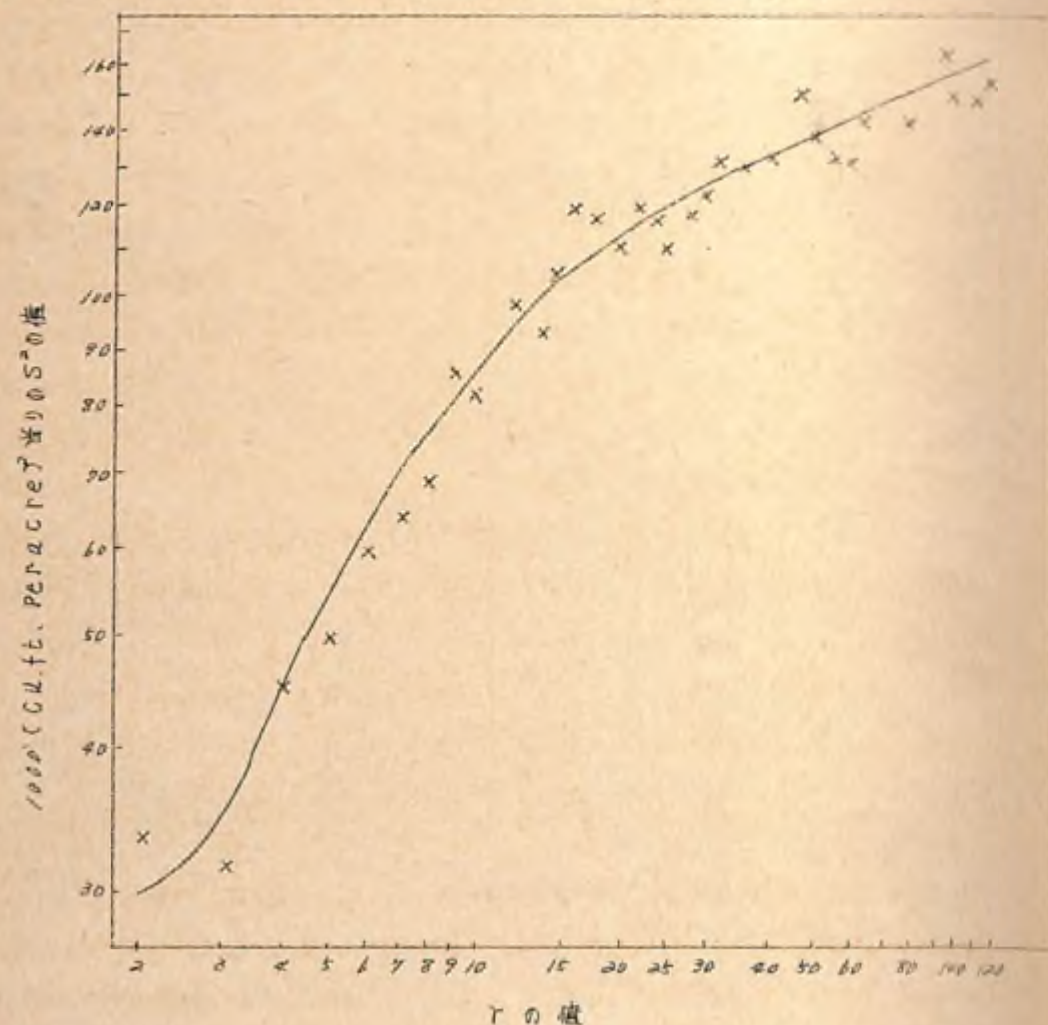
r	S^2	S^2	S^2	r	S^2	S^2	S^2
2	45.4	33.4	25.1	28	131.4	112.6	96.7
3	59.4	31.4	25.4	30	130.5	122.9	104.5
4	68.9	45.4	21.2	32	142.3	130.6	135.9
5	71.8	49.5	28.3	34	...	...	220.3
6	98.0	59.4	29.3	36	149.7	130.1	201.4
7	92.5	63.7	33.0	38	...	...	102.6
8	112.6	68.9	31.3	40	140.3	132.5	77.1
9	116.8	74.9	26.7	42	...	...	90.6
10	110.3	71.3	42.9	44	...	...	120.4
12	115.7	98.0	69.8	46	...	...	129.8
14	112.6	92.5	82.3	48	141.8	150.3	123.7
15	122.7	104.1	96.2	50	142.0	135.8	210.0
16	130.6	119.6	135.7	51	...	...	243.2
17	...	...	158.2	52	...	...	241.2
18	130.1	116.8	142.0	54	...	...	152.9
20	132.5	110.3	141.6	56	148.0	131.4	15.0
22	...	118.9	45.4	58	...	...	45.7
24	150.3	115.7	72.1	60	153.3	130.5	...
25	137.8	102.6	92.0				
26		...	85.1				

無作為抽出の分散は r が増加するにつれて急速に増加することがわかる。また大きい r では S^2 と S^2 の間に僅かの差が見られる。

検討した r の全範囲にわたつて、 r への S^2 の従属関係をそれらの

并数回の一次式で表わすことば（これは Mount Stuart と Black Mountain では十分と思われた）真の関係を表わすには不十分であることは明らかである。実際第3章は数学的模型でこの関係を説明する事は不可能と思われる。しかし Fig I の点を通って滑らかな曲線を描くことができるから、次の分散の推定値 S^2 と r の値に対するサンプリングの効率 (efficiency) の検討は、この曲線から読みと

Fig I r strip の (Type II) block 内で層化した。抽出率 i の無作為抽出の場合の分散 S^2 と r の関係。 i 同じ抽出率であるが $2r$ の block 内で層化 (Type I) の場合のサンプリング。この場合数値は r の代りに $2r$ を読む。(S^2 と r の両方は行数)



ることができた。Fig II あるいは Table I の最後の欄を見ると系統的抽出の strip 当たり分散と r との関係は更に複雑である事があかる。一般に S^2 は r が増すにつれて増加する。しかもこの傾向は $r = 12$, $r = 32$, $r = 51$ の附近における急激な増加によって更に急められている。減少は $r = 22$, $r = 40$, 及び $r = 58$ の附近である。これは strip 当たり収量に周期約 17 の規則的な周期変動の存在する事を強く示唆するものである。

実際、周期性は Griffiths によって与えられた結果からすでにその存在が疑われていた。彼は Dehra Dun のデータについての報告 (1927 (3)) の中で、可能百 8 つの $1/2$ % 調査平均と 16 ケの可能百 $1/2$ % 調査の平均値、即ちこの論文の用語でいえば $1/8$ 及び $1/4$ の系統的標本の平均値を示した。 $1/8$ 標本の平均値は $1/4$ のものより非常に数値が大きいばかりでなく、(最大と最小の差は $1/8$ では 100 であるのに、 $1/4$ では 300 であり、変動は抽出率が半分になった場合に断絶されるものよりはるかに大であった。) $1/8$ 抽出の 6 個の標本平均値では連続して、能平均以上の値を示している。真の周期は 17 に近いので、17 個の $1/8$ 標本をとるとこの現象は更に極端になる。Table II は $1/16$ 抽出の 17 ケの系統的標本の各平均値を示す。これらは更に大きな数値ばかりを示している。最大と最小との差は 535 であり、17 ケの値は同一抽出率の層化無作為標本よりもはるかに値の食い違いが大きい。その上この平均値の系列は規則的な変動の周期が存在する事ははっきり示している。即ち標本データは特に高く、13-17 は特に低くなっている。

$1/16$ の層化無作為標本 (Type II) の平均値の標準誤差は約 80 とする。従って、疑いもなく Dehra Dun の 292 ケの strip は、17 ケの strip 毎に蓄積の増減の繰返される系列であるという周期性を示している。

(即ち全地域では 85 の strip 毎となる)。この周期性は、他の原因による変動によって不明瞭となる。それは 292 ケの strip の値全体でははっきりしないが Table II を作った平均化の操作を行えば明

Table I Dehra Dun での γ の系統的抽出に対する strip 当り
平均収量 (acre 当り Cu.ft.)

抽出を始めた strip NO.	平均収量	抽出を始めた strip NO.	平均収量
1	993	11	994
2	953	12	910
3	1,098	13	891
4	1,119	14	892
5	1,267	15	897
6	1,185	16	979
7	1,314	17	899
8	1,282	総平均	1,028
9	1,101		
10	1,072		

際にある。この現象には如何なる説明も提出する事はできない。無論それは土壤または地形的状態の規則的な変動から生じたものかも知れないが、この地方を知る者の調査からは、サンプリングの行われた 36 マイルにわたる森林で、土地の起伏が 170 フीツ毎に規則的に現われているという傾向は何も見出すことができなかった。この地域の特性あるいは抽出法に關係する何らかの理由があるかも知れないが、この種の簡単な説明は提出せざるにはない。逆にこの周期性は偶然によるものかも知れない。又は結果として生ずっている樹木間の相互作用の複雑性は、一般には γ の“競争”なる一語によって片付けているが、近接した strip の蓄積はこれによって相互に關連するのだから、strip の値の系列は “autocorrelate” (自己相関をもつ) している。短かい系列において、——統計理論の教えるところによれば、292 項よりはるかに長い系列でもその中で偶然な性質が現れることが多いという意味で“短”いのである。——真の自己相関の性質は完全には現われないかも知れないし、また偶然に単純化されすぎた (over simplify) 型で現われるかも知れない。

Dehra Dun の林で現われた成長の競争状態は、必らずしも 170 フीツの長さの周期的な周期性を生み出すものとは推し得ないが、たまたまこの地域で現われた情況から更にこみ入った型式のこの変動の成分についての手掛りを与え得るかも知れない。

周期性の原因に対するこれ以上の考察は無用と思われる。この論文の主旨目的は、サンプリングにおけるその影響を考えることである。Fig. 2 において γ の増加による分散の急激な増加は、 γ が周期 17 の倍数に近くなると最も顕著に増大される。よく知られているように系統的抽出は引続く単位間の interval が周期と一致するとき精度が低下するから、一つの標本のすべての単位は周期の山あるいは谷の近く集まる傾向がある。一方単位間の interval が周期の約 1/4、2/5、3/5、……倍ならばたまたま周期の山に当る strip は谷にある strip に引続くから、その分散は極めて小となることが期待される。このような影響は Fig. 2 にはつきり現われていて、 $\gamma = 22$ 、42、62 の附近では分散が小さくなっている。これらの最小は極大ほどはつきりしない。またこれは周期の半分の前に現われるが、これはおそらく周期の形が対称でないことによるものである。

各標本の全体的な傾向を表わすため、Fig. 1 と同様に全く百分量で、Fig. 2 にならうかな曲線を引いた。このとき周期性によって影響されていることが明らかな点は無視した。このことは、曲線のあてはめに大きな主観的要素を導入したように思えるかも知れない。実際この曲線は Fig. 1 の曲線と同じ形となるように、小さい γ については上に凸、大きい γ に対しては上に凹に画いたものである。その理由は、 γ が増すときにも分散は無制限には大きくなるまいと仮定する方が妥当だからである。この制限とともに、凹の部分に Fig. 1 より長くすると多くの点はこの曲線が非常に満足なものである事を示す。この曲線は周期性のない場合の系統的抽出の分散を表わすものと考えられるから、二つのタイプのサンプリングの精度の一般化を算術において、無作為抽出の分散との比較のためには周期変動の成分を考慮して引いた曲線よりも適当である。

このデータから、同期変動に対する何らかの数学的モデルを構築することは十分でないように思われる。この方法をとらずに周期性を考慮して、サンプリングの精度を研究することも推測することと余り変わりがないに違いない。分散に与めらるべき値を手えるために、同期変動によって影響を受けた点の近くを示すだけというようにして、Fig 2 に修正した曲線を描いた。この曲線は $r = 17, 24, 31$ で最大値をまた最大値のあと π 単位以下の値すなわち $r = 22, 29, 38$ で最小値をとる。周期性がはっきり影響している範囲では、この曲線は最初の曲線と同じ値をとるようにしてある。 $r = 24$ において離点が生ずる。そこでは S_2 は $r = 22$ 、及び $r = 26$ よりかなり低くなっている。これは単に非周期的曲線の偶然の変動であるか、あるいは抽出区間 (sampling interval) が π の倍数を π 単位と考えるとこゝろでは、そのほかの異変変動が出現するのだからだろうか？非周期的曲線は、第2の説明があてはまりそうな $r = 2, 3, 6$ に対する点を非常に満足に通つて引くことができる。また同期曲線については最小の点 $r = 24$ に結ばれている。この同期曲線は、それが同期性の影響を定性的に示すものであるという以上に考えなくてはならない。今までに多くの計算結果があつて、他の抽出率のサンプリングに対する S_2 の値が得られる場合でも、満足すべき数量的論述を十分に示すためのこのようにこみ入った関係の曲線がデータから決定できることは稀である。Fig 2 の実験曲線から、与めらるべき S_2 の値が導かれる。それによって定性的な言葉による同期性の論議が可能となるのである。

以下においては Table I に示された実験的な分散の代りに与えらるべき曲線を用いることにする。その場合

$$S_2 = 20\%, 40\%$$

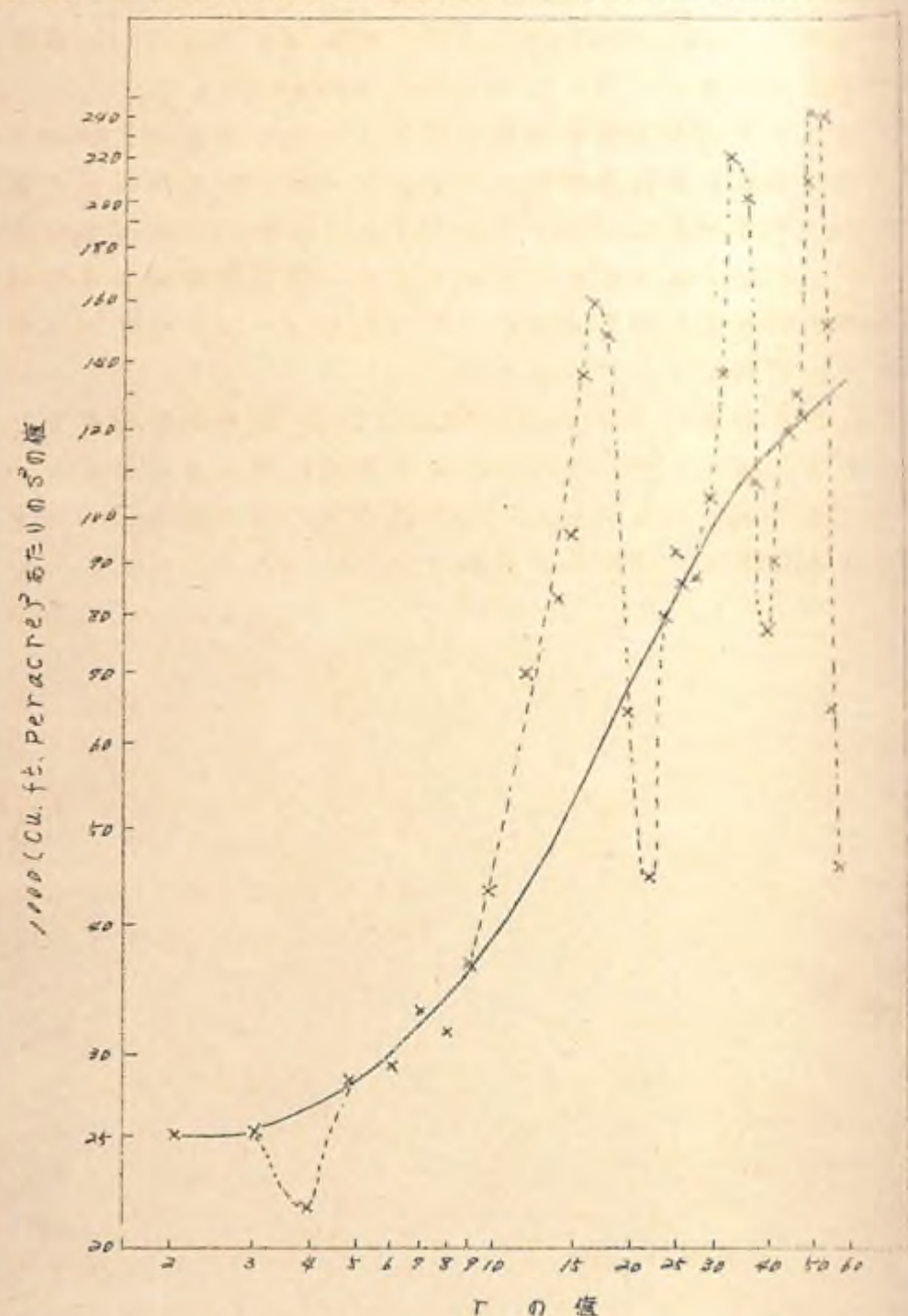
であり S_2 と S_1 とは Fig 1 から、また S_2 は Fig 2 から読みとられる。特に断らない限り、 S_2 は非同期曲線を指すものとする。

抽出法の比較 (The Comparison of sampling Procedures)

こゝで前に Mount Stuart 及び Black's Mountain で行なわれたのと全く同様に、色々色やり方で Dehra Dun のデータに対する操作法及び系統的抽出の比較を行うことができる。[1948 (2)] 系統的抽出の層化抽出法抽出に対するパーセントで表わした効率 (percentage efficiency) を Fig 2 に示す。 r の大きい所を除いては、 S_2 は S_1 よりもずっと大きい。即ち単純操作法抽出に比べると系統的抽出の効率は高く、特に r が 20 より小的时候は実質的にはその効率は 300% をこえる。

Type I の層化抽出 (stratification) を系統的抽出と比較すればこれよりはよいが、Type II の方が更に優れている。しかしこれらの二つの Type を比べても、20 以下の r の大部分については系統的抽出の効率は 2 倍以上となる。

Fig. 2 抽出率の系統的抽出に対する分散 S^2 と r との関係。実線は正規性として述べられているものを示し、虚線は断続成分を考慮したときの関係を示す。 $(S^2$ と r の値は百分)

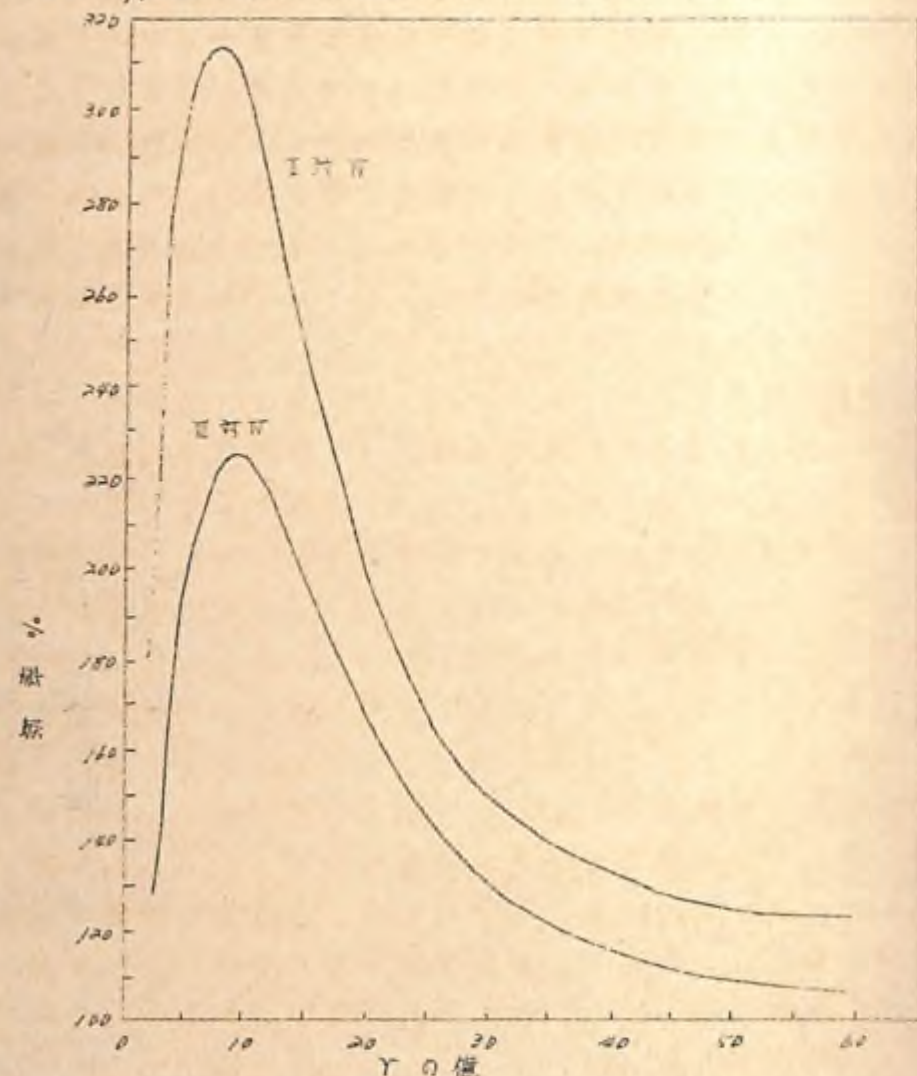


145 には従って抽出率 (sampling intensity) においては、Mount Stuart 及び Black's Mountain のデータで示された様に、系統的とこれら二つの層化抽出の間の効率の差は実際的にははっきりわかない。以前に見られるなかつた現象は非常に高い抽出率 ($r < 8$) では無作為抽出の効率が比較的改善されたことである。一般に Dehra Dun のデータでは前に分析したものより無作為抽出の相対的効率が低下している。Mount Stuart 及び Black's Mountain では、最も不利な条件の下でさえ層化無作為抽出のどのタイプも効率は系統的抽出の半以下とはなるなかつた。

Fig. 3 は断続変動をもたない Dehra Dun のような形の、三層種のサンプリングに対する相対的効率を示す。平滑化した分散 S^2 を求め、Fig. 2 の修正曲線を用いれば、それには断続性が入っているから、相対的効率の新しい組が計算できる。これらは Fig. 4 に示されている。こゝで再び注意しておかなければならないことは、抽出の性質については幾分推測が混雑していて、それらは定性的特徴としてのみ正しいということである。系統的抽出の効率は抽出面積が面積の倍数に近いところで低くなるということ、一般的原则から予測されるものであるが、Fig. 2 によれば Dehra Dun の形では同じ抽出率の層化無作為抽出と比べて相当の効率の低下を系す程、断続性がはっきり現われていることがわかる。一方抽出面積が断続の倍数を若干単位でもこえれば、断続変動成分が存在しない場合よりも効率は高くなる。従つて r に対する効率の従属関係は“波型”の曲線によつて表わされる。

Fig. 5 は、特定の抽出率の系統的抽出と同一精度を獲る為、三つのタイプの無作為抽出の各々について必要な抽出率を示す。これらは Mount Stuart 及び Black's Mountain の対応する曲線と非常によく似ている。断続成分を含むときの曲線は修正されて再び 1/4, 1/8, 1/16 などで極大が現れる。しかし一方の層化無作為抽出の方が 1/4 の系統的抽出より精度がよく、1/8 の系統的抽出の精度を得るには 1/16 の層化無作為抽出が必要だということを示す必要はないだろう。

Fig 3 系統的抽出IV(近距離性)の、抽出率分の層化集作表をわくまに表した効率 (efficiency)。上の曲線: I 対 IV、下の曲線: II 対 IV。



従って修正曲線は画かなかった。

有限修正した strip 当りのパーセントで表わした標準誤差 (percentage standard error) 即ち

$$\frac{100S\sqrt{(1-1/r)}}{1,028.4}$$

は各層数のサンプリングの各々について、Fig 6 に示されている。

Defra Dia ではすべての標準誤差が概分大きく、系統的抽出の利

益がより顕著である事を除けば、こゝでも曲線は他の麻族のものと同様になっている。周期性を考慮に入れた波型、曲線は画かなかった。

Table II は上に述べた各方法の種々な抽出率のサンプリングで平均して期待される平均収獲推定における誤差の限界を示す。

説明のために述べられた三つの抽出率は Mount Stuart 及び Black Mountain で説明に用いられたのと大に同じ標本当り strip 層数を与える。重層集作抽出の方法 I と比較すると層化は精度を非常に改善する。二つの型の層化抽出にはその誤差の限界に大きな差はな

Fig 4 Systematic sampling IV (周期性) の、抽出率分の stratified random 表及び II に対する効率。上の曲線: I 対 IV、下の曲線: II 対 IV。

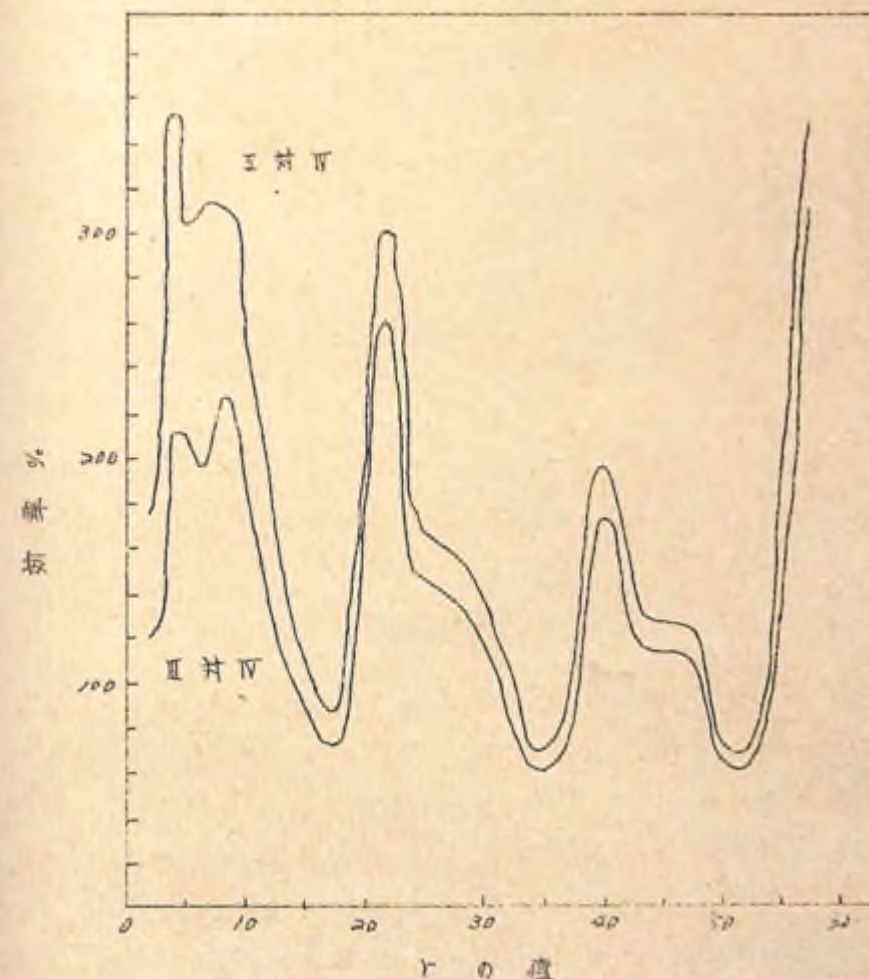


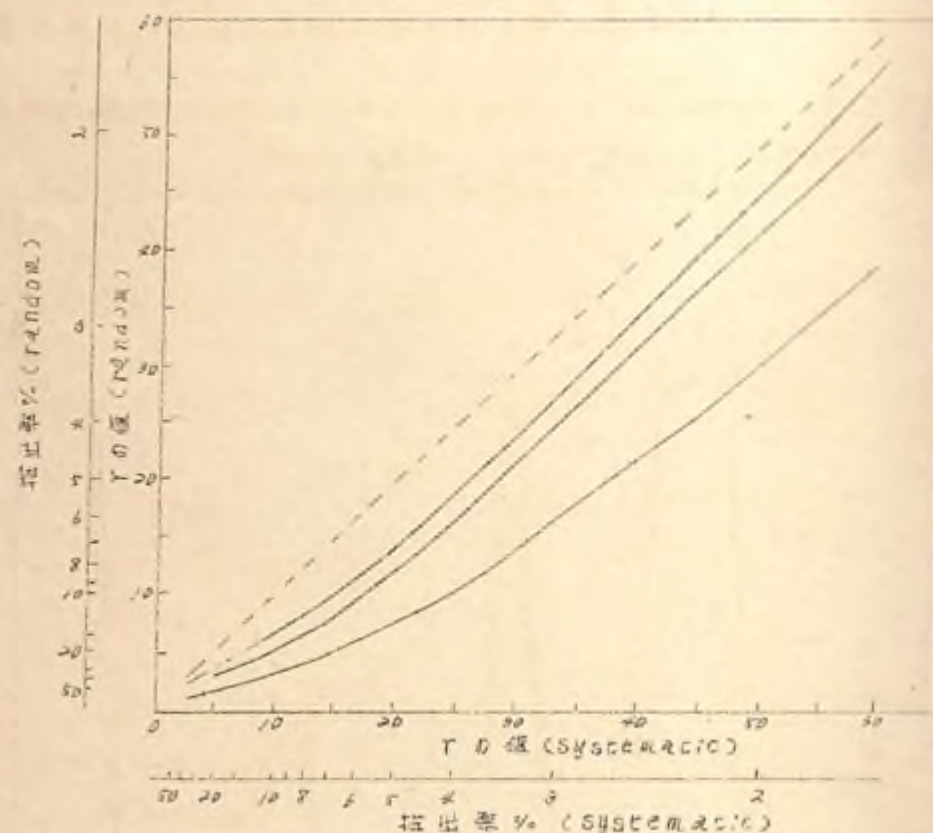
Fig. 5 標本の抽出率での systematic sampling (非同期性) と同じ精度を有するものに
必要 random sampling の抽出率。

下の面積：単純抽出を指し示す

中央の面積：27の block の層化

下の面積：5の block の層化

(面積は strip せり取りが strip の位置や面積と無関係に、全く確率的に選定される
さすべこの形式の sampling が成立するであろうと見られる関係を示す)



い。しかし少なくとも同期変動のない場合には、層化抽出の代りに
(特に抽出率が非常に低いとき) 系統的抽出を用いるべきである
別得が得られる。しかし $1/8$ 及び $1/32$ の標本は同期性の影響が非常に
はつきり現われる抽出率でのものであるから、平常の Dehra Dun
のデータ (理想化された非同期的な結果と区別して) については系
統的抽出はどの層化抽出と比較しても優れているとはいえない。

Table 5 Dehra Dun での誤差率 (%)

抽 出 率	$1/8$		$1/16$		$1/32$	
標本内の strip 数	36		18		9	
誤差の確率	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01
抽出方法:						
単純 random (I)	13.5	12.8	12.8	26.0	21.5	32.2
層化 random (II)	9.7	12.7	15.5	21.4	23.9	31.4
” (III)	8.1	10.7	14.2	18.6	22.3	29.8
Systematic (IV) 非同期性	5.5	2.2	10.2	13.4	12.8	26.0
” (V) 同期性	5.5	2.2	16.0	21.1	23.1	30.3

討論 (DISCUSSION)

森林標本調査においては Dehra Dun の結果の二つの側面が興味深い。
前の論文 (1948 (2)) においては僅かに二つの異なる得られた
データにもとづいて種々抽出方法の得失を仮定的に結論づけたの
で、更に多くの証明が必要なることを注意しておいたのである。既に
指摘したように、Dehra Dun のデータはこの目的には全く十分なも
のとはいえない。なぜなら記録が利用できた 292 ケの strip は保持
しているのではなく、それ自身が 20% の系統的標本をなしているとい
うことによるものである。

これらの strip について行つた任意の抽出の精度は、選定した
292 ケの strip について行つた対応するサンプリングより低いとい
う事が期待されよう。Fig. 6 及び Black Mountain の対応する図及び
表と比較して、パーセントで表わした標準誤差及び誤差の限界はど
の点でも大きくなっている事が見られた。もし同期性を無視すれば
系統的抽出はどこでも何れの無作為抽出よりも精度の高い事が証明
された。また系統的抽出の優越性は層化無作為に対して他の二つ
の標本以上であった。Fig. 5 は無作為標本で特定の系統的標本と同
じ精度を得ようと思えば、抽出率を 30-50% あげなければならぬ
ことを示す。これがどれ位 strip の非同期性によるものかは明らか

らないが、この結論を述べる際には系統的誤差と殆んど同じ程度の結果が得られるという結論を前(1948(2))に述べたが、この結論はこゝではおそろくあまりに樂觀にすぎると考えなければならぬ。

Debra Dun の第二の重要な側面は周期性である。これについては何等の確実な説明も与えることが出来なかつた。比較的短い値の系列では周期性は Table I のような性質をもつてであるといふことは偶然のものかもしれない。もしも色々な抽出率で行った系統的抽出の一連の記録を詳細に分析するこの種の統計的研究が数多くなされれば、時として偶然だけのために、周期性が現われるであろう。即ち *17 strip*、換言すれば *100 chain* の周期を示す *Debra Dun* の記録は、幾いもなく Table I 及び Fig 2 をしるべきものとわかる事である。實際非常に不運な一致の場合にのみ周期変動が生じたり抽出間隔を周期の倍数に取ることになるのである。(勿論規則的な変動が行なわれた系統とか、例外的に規則正しい地理的条件をもつ系統においては、予想される周期の倍数とならないような抽出間隔を用いることに留意すべきである)。この様な一致は系統的抽出の性質の一として受け取られるべきものである。それは稀な事ではあるが、もしその様な事が起つた場合には、精度は希望したものより遙かに低くなるものである。*Debra Dun* の例についていえば、層化無作為抽出 (Method II) と同じ位低くなる。また他の系においては殆どこれよりは更に低下するであろう。

その上周期変動の存在については標本そのものからは手掛りは得られない。実際にはむしろ反対に、引続く *strip* の各々の間には緊密な一致が現われる傾向がある。[1947(1)]

[1947(1)、1948(2)] の論文において強調した通り、一般に系統的抽出を採用する事は、抽出誤差の内部的推定値が必要でないという考えを受け入れる事である。というのは標本から正しい推定値が得られる見込みはあまりないのである。周期変動によって精度が低下することがあるといふこと、データからはこのような疑念が

生じないかも知れない、という危険性は、こゝでもまた認めなければならぬ。これらは必ずしも系統的抽出への非難でないことは幾度となく十分に説明したところである。本質的なことは、無作為抽出に系統的抽出を採用する場合その低値とともに危険性についても十分な認識をもち、この方法を使いものと思ひ込むあまり、更に無作為抽出の他の利点をも期待するというような安易な考えをもつてはならぬ(過去において非常に多かった様に)。Table II 及び以前の論文の結論する表からはっきりすることは、系統的標本は一般に精度が高いけれども、ブロック当り2単位の層化無作為標本は普通これに比肩する精度をもつかる。系統的抽出程不十分なものではないといふことである。

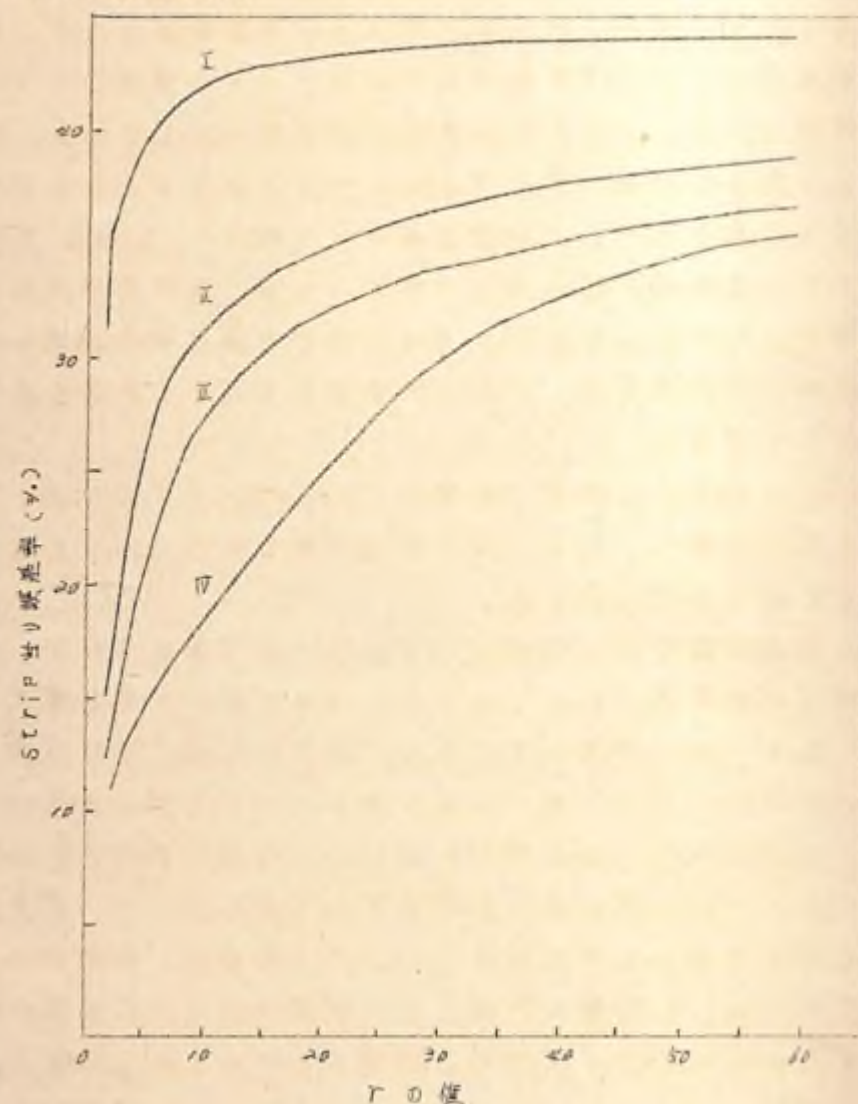
Yates は最近その重要な論文[1948(5)]において、系統的抽出法の理論を論じ、こゝに用いたと同様な方法によって幾つかのデータの系列の研究を行つた。

彼の論文の緒言及び結論は、たとえこの理論の主体が、彼等の数学的能力の範囲外であるとしても、サンプリングの實際にたづねる人々のすべてに読まねばならないものである。*Yates* は彼の研究から系統的抽出においては“如何なる方法によつても標本自身から、實際に正しい誤差の推定値は得られないという事が確かめられた”と述べている。“無作為抽出は全然未知の手段に打ちて、完全な信頼をもつて適用することが出来る”にもかゝらず、系統的抽出を採用した場合には、“対象の予測しない周期性のために非常に誤った結果を導くかも知れない”事を彼は指摘している。もし抽出される対象の周期性について何かわかっているかあるいは、企画された研究が主標本 (*main sample*) の設計の爲の全くの補助的手段として、対象の一部の予備調査を許し得る程大規模なものである場合には、標本の系統的抽出はより考慮の値あるものとなる。

系統的標本の標準誤差の不偏推定値に対する改善の策は、役に立たない程には大きくない誤差の上限を与えることであろう。

実証的目的の多くについて、研究者は、その大きさの限界が、真

Fig 6 4つの抽出方法 I, II, III (全部無作為) および IV (系統無作為抽出) に対する誤差率 (%)



の値に十分近いならばわかっている量よりも枝の得た誤差が小さいということを含んで述べるだろう。Yates の指摘から strip (同じ他抽出単位) 間の変動が主として確率的 (random) であるときに、一つの系統的標本の記録から得られる誤差の上限がどれ位の大きさであるかわかる。しかし厚々産出したように林の次々の strip の立木枚数は確率的には分布していない。誤差の限界を得る場合で

さえ、ある補助的な sampling が必要となる。Yates は適当の単位を主標本 (main sample) の次々の単位間の間隔の $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ までとする適当の系統的標本を、片側の全域、あるいはまた片側の一部分にのみ置換することを提案した。

彼はこの補助データの使い方を示した。非常に広い林地のサンプリングを除いて、この巧妙な計画が森林のサンプリングにおいてより有利に使用できるかどうかは疑問しい。余数成分の推定値が確実なものであるためには、それらは適当な数の自由度にもとづかなければならない。従って研究全体の大きさとかかわりなく、しかも有効であるような補助サンプリングの大きさには最小の限度がある。

主標本 (main sample) が 100 またはそれ以上の strip から取っていない場合は、誤差を知るために必要な補助データの割合が非常に大きくなって、同数もしくはより少ない strip 数の無作為標本の方が経済的でないかどうか疑問しくなる。もし考えているのが 5% の抽出率であれば、このことは系統的標本の精度を知るための補助サンプリングが経済的に列を合うためには、全標本には 2,000 あるいはそれ以上の strip が含まれなければならないことを意味する。

要約 (Summary)

この論文でとり扱った方法は、立木枚数推定のために北インドの Dehra Dun の或る森林について行なわれたサンプリングの他の方法を研究するのに適用されたものである。用いたデータは、これらの林の 5 つの strip 毎の調査記録で、この標本から導かれる副次抽出 (sub-sampling) について色々な計画を考慮した。

データからは近頃変動の頭うかな証拠が得られた。この変動は大概 100 ナエーンの長さと言っている。これは色々な形式の無作為および系統的抽出の統計的精度ならびに効率に重大な影響を与える。一般に系統的抽出は、同一抽出率のどの様な形式の無作為抽出よりも高い精度を与えるが、この性質は系統的標本の次々の strip 間の間隔が、変動の倍数となる場合には全く逆転する。このことの系統

的抽出の実行や系統的標本による推定値の標準誤差の評価の問題に対する重要性を論じた。しかしこの結論は、このデータが木の種か分の標本だけにもとづくという理由から、条件付で受け入れなければならぬ。

Yates の最近の研究は、系統的標本の誤差に対する上原などの様に評価すべきかについての幾つかの理論的な指示を与えている。不幸なことにこの方法は、それが非常に多くの補助的データを必要とすることから、森林のサンプリングにおいてはあまり便えそうにないように見える。おそらく非常に大さな森林でない限り、状態として研究者は精度の評価の可能な無作為標本とおそらく必ずしも無作為標本より正確ではなく、かえってそれ自身の精度についての信頼できる情報を犠牲にする系統的標本との二重苦一を余儀なくされるであろう。

謝 辞

インド、デラダンの森林研究所長および A. L. Griffith 博士(上記研究所の森林官)が、この論文のもととなったデータの使用を許されたことに対して著者は深く感謝するものである。Griffith 博士はまたデータに関する疑問や困難に手紙で説明を与えられ非常に世話話をいただいた。

この論文および以前の論文についての非常に多くの計算は、計算助手の方々にやって頂いた。それらの方々が非常に面倒な仕事を熱心かつ忍耐強く行なわれたことに対してこの機会をかりて感謝の意を表する次第である。

参考文献

- (1) Finney D. J. (1947): Volume Estimation of Standing Timber by Sampling Forestry 21, 2, 179-203.
- (2) Finney D. J. (1948): Random and Systematic Sampling in Timber Surveys, Ibid., 22, 1, 64-99.
- (3) Griffith A. L. (1947): The Efficiency of Enumerations. XV Sal (Shorea robusta) Forest in Dehra Dun Division of the United Provinces. Forest Research Institute, Dehra Dun, Indian Forest Leaflet, No. 96.
- (4) Sahai, R. (1947): Partial Enumeration in the Dehra Dun Forest Division. Indian Forester, 73, 437-44.
- (5) Yates, F. (1948): Systematic Sampling. Philos. Trans. A, 241, 345-77.

林分調査における抽出誤差

Sampling Error in Timber Surveys

By A. A. Hasel

(Jour. Agric. Res. vol. 57. 1938 より)

林分調査における抽出誤差

Sampling Error in timber surveys

A. A. Hasel (Journ. Agric. Res. Vol. 52, (1938)より)

要 言

普通立木調査においては、ある与えられた地域の平均材積を、標本としてとられた小部分の林地の単位面積あたり平均材積から推定する。この推定された平均材積がある程度までの平均材積と違ってくることがやむを得ないであろう。木や面積の測定の誤り、あるいは不適当な材積表の使用などのような因子を除くすれば、真の平均材積と推定された平均材積との差の確率とおもわれる範囲は、抽出誤差のみによってきまってくる。もし標本を構成するプロットまたは抽出単位の選み方が、独立性と無作為性の条件を満たすならば、標本そのものの中に抽出誤差を推定するのに必要な情報が含まれる。

平均値がどれ位の精度で推定されたかを知ることは興味のあることであるが、一方経済的に見れば、仮定された許容誤差範囲に対してはどのような標本をとれば十分かを予定しうることが一層重要である。抽出誤差が未知であれば、この知識をうるのにその地域から予備標本をとることが必要である。これによって、平均値の誤差が仮定された許容範囲内に収まるような調査（抽出）率を定めることができる。以後は実行された作業が妥当なものとなるように、調査の進行とともに随時補足的なチェックを行うことだけである。

規則的な調査ではプロットを系統的に配置することが多い。そのような場合の標本は、隣接したプロットからなる等距離のストリップ、または等距離の直線上に一定の間隔でとられたプロットとから構成される。たいていの立木調査では調査とともに林相図および他種図が作られるが、この巨約のためには地域のすべての部分を一定基準で図化できるように、調査線等を等間隔に設けることが望ましい。林分や林相の変化は一般に等高線に垂直な方向で緩大だから、普通調査線はその方向にとり、プロットも線間よりは線に沿って密に設ける。この方法によって林相および等高線を一層迅速に位置づけま

を面化する事ができる。そうして変動の最大な方向で抽出率を大きくすれば、抽出精度の程度が向上する。

この任意の間隔で配置したプロットを統計解析における無作為標本のように扱って、サンプリングの各当性の検証を行なうようなことをすれば幾つかの困難が生ずる。それはある地域内で抽出可能なプロットも、標本抽出の際に選出される機会は平等かつ短くでなければならぬという基本的要求に反しているからである。

標本物の実験では、地域のある部分から他の部分にかけて比重が系統的に変動することが再三示されている。隣接または近接したプロットは、平均して離れたプロットよりも似通っていることが多い。地域について予備知識がない場合には、外見の一般性にとらわれずプロットの母集団は多少とも異質的であると認むなければならぬ。異質性に関係する諸要素が、標本内においてほゞそれらの割合割合で表わされることを保証する唯一の方法は、抽出誤差の推定にあずかる標本のプロット、または部分を無作為に抽出することである。例えば、調査するプロットは、それぞれ可能なプロット位置を示すよくかきまぜられた数字をぬき出して選ぶことができる。抽出が終るごとに数字を記入した紙片をもとに戻し、次の抽出を始める前にもう一度まぜ合わせる。同じ数字が繰返しも現われても二度目からはとらない。なぜなら選ばれた各プロットは単位面積あたり同じ量の情報を与えるが、これから構成される標本内の調査対象は全面積に亘り一定割合を占めるようにするのが目的だからである。同様の選択の自由性を保証する更に優れた方法は、TIPPEL の乱数 (4) を用いるものである。このようなプロットを林地に指定することは系統的にプロットを配置するより面倒であろうし、また地図作業のために別の調査線を描ける必要が生ずるかも知れない。これは当然な誤差を推定するために及ばねばならぬ犠牲である。資料収集の技術を除いて、林分標本調査の問題が土地に変異性があると思われ他の標本調査でのものと、本質的に同じだということはいまだあまりよく認識されていなかった。これまで、異質性を検定しかつ必要

なる抽出誤差の推定値に対するその影響を除去するという——1923年 Fisher および Mackenzie (3) によって初めて提唱され記述された——方法が利用されていなかったことは明らかである。林型、林相、林齢および地位が同じと考えられる地域は同一な母集団として取り扱われてきた。任意なプロット配列が色々と用いられてきた。Mudgett および Gevorkian (6) は Wisconsin 州における森林調査の信頼度を推定するのに、1.2 または 3 マイル離れた平行線上に 1/8 マイル間隔で位置づけられたプロットを用いた。分類されたあるタイプ内における無作為抽出誤差は、系統的に配列されたプロット間の全変動から求められた。可居の林地の広葉樹林調査において、Schumacher と Bull (9) は 3 マイル離れた調査線上に 1/8 マイル間隔でとられたプロットから誤差を推定した。プロットを林分、即ち原生林、伐跡地、二次林分等に分類し、このようにして得られた標準偏差の加重平均を用いて抽出誤差を推定した。New England において、Goodspeed (4) は、330 フィート離れた調査線上に 165 フィート間隔に設けたプロットを用いる line-plot 調査と、同じ線上でそれぞれ長さ 165 フィートの帯状地域 (strip) を独立に観測値としてとる連続帯状調査 (continuous-strip survey) とを比較した。ストリップとプロットは 45% 重なったから、抽出変動は実際には各標本の 55% に限られた。このデータを統計的に分析して、彼は同じ精度で適用するとき、二つの方法は本質的に類似の、そして等しく信頼できる結果を与えると結論した。Preston (7) は系統的 line-plot 調査を統計的に分析することを推奨し、また林型は別々に、かつ調査の前に面化すべきことを示唆した。彼は 5% とか 10% あるいは他の特定のあらかじめ予想した抽出率に敬服することの無益なことを指摘した。

カナダにおいては Wright (12) は 10 チェーン間隔の調査線に沿って 10 チェーン間隔で設けたプロットを用いた。帯状調査の場合彼のストリップは 1/8 マイル間隔でとられ、記号は 2 チェーンの長さごとに別々におこなわれた。第 1 標本のプロットとして長さ 1/8 マイルの

各ストリップの最初の10ナエーンをとり、第2標本のプロットをとり、次の10ナエーンをとるといふようにして、異なるナエーンのプロットで産出される第2標本までを作つて、7つの推定値が求められる。抽出誤差の推定にあつては、変動性に対するこれらの7つの標本推定値の平均をとつて、全プロットの平均値に適用した。Wrightは統計的の方法を用いて推定値の精度(accuracy)を調べる場合の主な方法は、信頼できる標本抽出の値をうることにあると述べている。Robertson (8) は、与えられた母集団について期待精度をうけるのに十分な数のプロットをとるため、調査期間中時々データを分析して得た結果から、小数の大プロットを勝手に選ぶよりも、小プロットを地域に均等に配分する方がよいと述べている。彼はラインプロット調査の方がストリップ調査より精度がよいことを示出した。彼はストリップ調査では、プロットが一方宙について連続であるから、プロットはその方向についての状況を正當な割合以上に代表するものと考えた。Candy (1) は、与えられた推定値の精度が計算できる調査方法は、推定値の精度が明確でないとか、あるいは全数計算できないような方法よりはるかに優れていると述べている。彼は系統的に配置したストリップとラインプロットの両方を用いたが、その結果標本調査の精度が十分であつたか否かを知ることができるのは、ラインプロットの場合だけであると結論した。

この研究においては、5,760エーカーの地域に対する葉の平均収量は、なかにプロット間の葉の変動がわかっている。プロット収量の分布は近似的に正規分布であることが知られている。したがって母集団に関する統計的知識の本質的なものはすべて既知なわけである。標本平均と葉の平均との差の予想される幅を、プロットの数と大きさや形状、配置および抽出率などの因子の影響を考慮にいれて計算し、定められた計画にしたがつてとられた標本から、真値と平均値との差の範囲とされた幅をこの予想値と比較した。抽出方法の理論的効率と実際の効率の照合は容易に行なわれる。というのは研究した地域が、Black Mountain 実験地の一隅で、その807エーカーの全

地域がすでに完全に調査されており、プロット位置、標本および地帯が図化されているからである。系統的に配置したプロットは、抽出が相互かつ無作為であるための条件を備えているという、よくおこなわれる仮定が、ストリップおよびラインプロット配置の両方に於いて検討された。種々の調査方法の効率は、与えられた精度の推定値をうけるのに要する抽出率の比から決定される。抽出誤差の妥当な推定値がえられるような調査では、母集団全体の標本推定値の精度を求めることができる。

資料と方法

この分析は、おこなつた5,760エーカーの原生林は、Lesser 国有林内のCalifornia 北東部にある。林相はマツの純林で、Ponderosa Pine (*Pinus Ponderosa* Dougl.) と Jeffrey Pine (*P. jeffreyi* Oreg. com.) が樹種の90%以上を占めている。その他の樹種は White fir (*Abies concolor* Lindley and Gordon) と incense cedar (*Libocedrus decurrens* Torr.) である。この林分には幼令級および過熟令級が十分含まれていて、すべての令級がそろっているが、中間の令級の割合が少ないので樹齢は正常以下である。小地域を除いて、全林地は一様のように見えただけで、このような林分の図化に用いられる基準では腐化しなかつた。換言すれば全く奇一な母集団と考えられたのである。Fig. 1 に示した7つの section は、それが完全な形の section であり、小面積を除いてはすべて立木地だという理由で研究のために選ばれたものである。7個の section に含まれる2,304個の25エーカープロットの各々について、直径12インチおよびそれ以上の木のボードフィート材積を算出した。これらの矩形プロット(25×10ナエーン)を基本プロットと名付けた。さらにこれらの位置を図面に記入したから、隣接するプロットを組合せて、全部で4,152個の5エーカープロット(5×10ナエーン)、576個の10エーカープロット(10×10ナエーン)、あるいは形と大きさが、基本プロットの大きさを面積の倍数となるような他のプロットを作ることがで

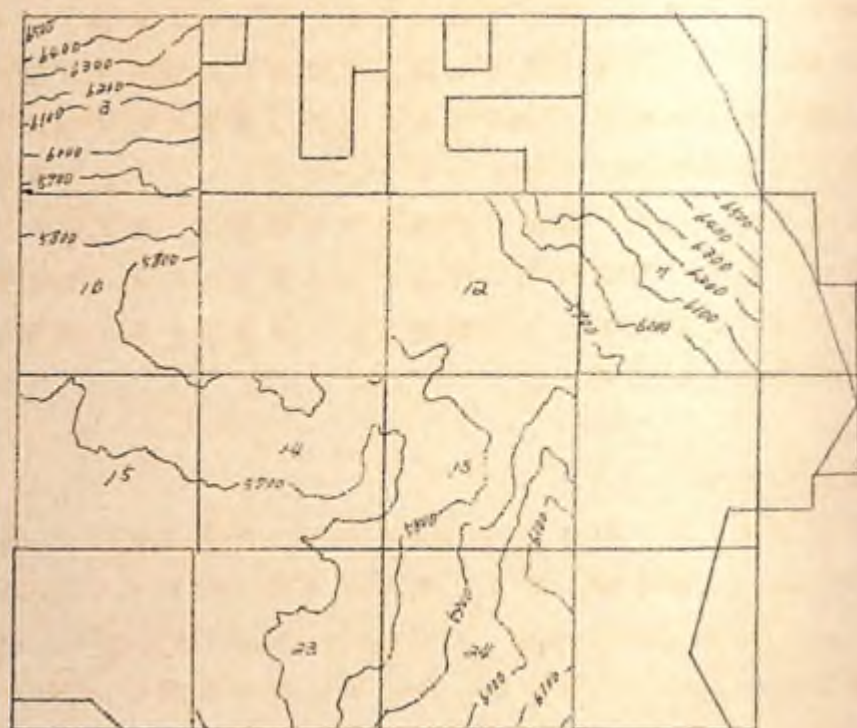


Fig 1 Black Mountain 実験地から分所のために選んだ地塊の等高線と section 番号

きた。

section が正確にノマイル四方で占めたので、section の面積にある基本プロットの大きさと形がある程度不規則になるのは避けられなかった。これらのプロットの放積は、その面積に順応して25エーカー基準のものより増減した。必要とされた修正量は、全体に対する割合では無視しうる大きさであった。基本プロットの長辺はすべて東西方向にとった。

プロットより大きい区画をブロックと名付けた。これらは土地利用管理事務所 (Land Office) の定める forty, $\frac{1}{4}$ section (quarter section) $\frac{1}{2}$ section (half section) あるいは section などの区画にとるのが普通である。Fig 2 は主として用いたプロットまたはブロックの大きさと形を示している。標本の一部を購収するプロットが独立かつ無作為に選ばれるとき、それは無作為抽出単位となる。プ

ロットが調査線にそって規則的な間隔で配置される場合、調査線が独立にしかも無作為に選ばれているならば、ラインプロットの組合せが抽出単位となる。同様に、プロットの端と端がつながって、ストリップを作るような場合、ストリップが独立かつ無作為に抽出されるときにはストリップが抽出単位となる。このようにして作られた配列は、それぞれ無作為ラインプロットおよび無作為ストリップとよぶことができる。母集団のすべての可能なものの中から抽出単位を無作為にとり出すとき、この方法を各ブロックから同数の単位

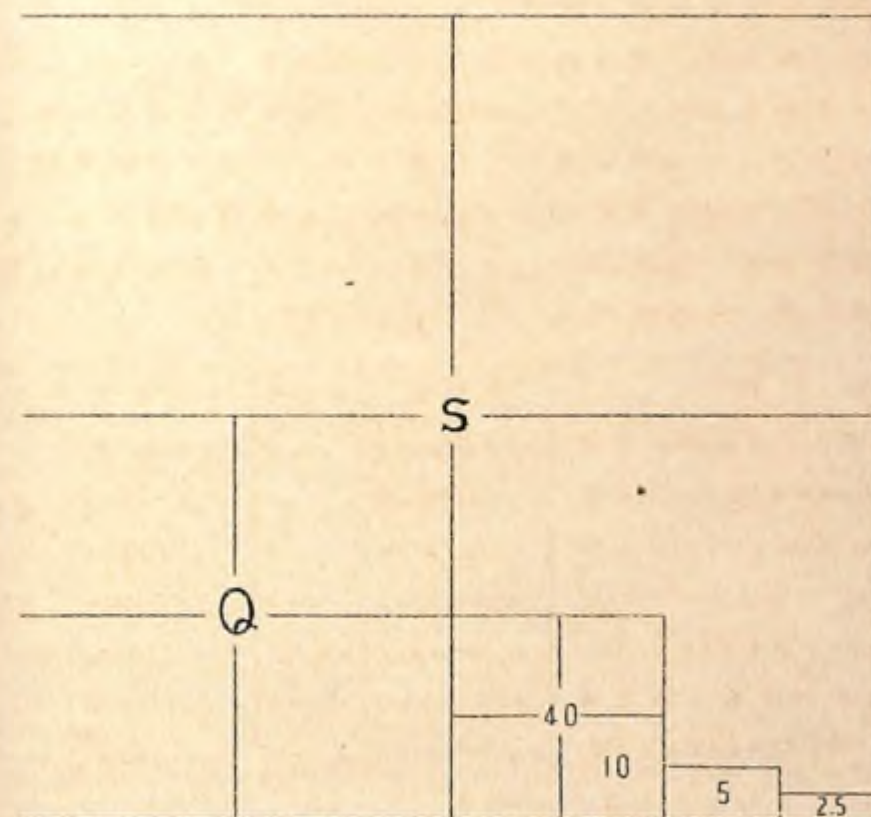


Fig 2. プロットとブロックの大きさと形状

S は section、Q は $\frac{1}{4}$ section (160 エーカー)、

小さい単位はエーカー数で区別した

を要するプロット内無作為 (random within blocks) と区別して、単に無作為抽出法とよぶ。系統的ストリップ、およびラインプロッ

ト配置は、各プロット内の抽出率が同一となるような代表的標本であるが、操作為標本ではない。操作為抽出単位間の変動は、距離の変動因の毎年による部分と、*Fisher* の分散分析法で分離される誤差分散とに分けられる。本研究で用いたこれらの方法の解説は *Fisher* (2.3) および *Snedecor* (10)。また *James* (5) によるこの方法の利益と適用例の章に与えられている。

結 果

プロットの大きさと形

標本の代表性に関する本質的な知識は第1表に与えられている。平均平方の比はすべて *Snedecor* (10) の与えた下の1% 程度に達している。したがって正確は場所と結果があり、母集団は異質である。一般にプロット間の変動は、プロット間の距離が増すにつれて増加する傾向がある。この理由によって、プロットの大きさと形はサンプ

第1表 分散分析法

変 動	平方和	自由度	平均平方	F 値	0.05 F 値
総平均からの section 平均	109,692.3526	8	13,711.6691	6.39	3.26
section 内の 1/4 section 間	57,927.4032	27	2,145.8297	3.42	1.92
1/4 section 内 for by 子間	66,562.5344	108	616.3846	1.65	1.11
for by 内 10 エーカプロット間	161,102.7722	432	372.9093	1.26	1.08
10 エーカプロット内 5 エーカプロット	121,940.8201	576	211.7028	1.23	1.04
5 エーカプロット内 基本単位間	123,237.9395	1,152	115.7446	---	---
全体: 総平均からの基本プロット平均	650,588.6220	2,303	282.4961 ³⁾	---	---

1) $F = \frac{\text{大きい方の平均平方}}{\text{小さい方の平均平方}}$

2) *Snedecor* の下表より (本表をみよ)。これに等しいか、またはこれより大きい値は、差が統計的に極めて有意なことを示す。

3) $\sqrt{282.4961} = 16.81 = \text{母集団平均 } 40.73 \times 10^3 \text{ feet board}$

Measure からの基本プロット平均の標準偏差

リングの切率を定める重率に成りとなる。拒絶してとられた2つのプロットでは、一般に2つを合わせた標本内 (*within*) の成分変動は僅かであるから、そのような行間 (*between*) の変動性は離れた片間よりもずっと大きくなる。このことから、5 エーカプロット間の変動は、ある標本の上で標本をいってとった2つの2.5 エーカプロットの作る5 エーカプロット間の変動より大きくなる。同様にしても、隣接プロット間の距離のため、5 エーカプロットの標本要素とりととられる2.5 エーカの単一プロットで表わした5 エーカプロット間の変動は、操作為抽出単位とりととられた2.5 エーカプロット間の変動より大きくなるであろう。

第2表の2.5 エーカプロット間の平均平方は、第1表の全体に於ける平均平方である。これは操作為に選んだ2.5 エーカプロットの誤差分散である。5 エーカプロットでの片断する値は、第1表の変動因の中、10 エーカプロット内の5 エーカプロット間から、(総平均からの) section の変動までの平方和、自由度をこみにして計算される。これらの二つの和の比、449.3926 は、操作為に抽出した5 エーカプロットの平均平方を単一の2.5 エーカプロットで表わしたものである。これは282.4961 に比べてかなり大きい。その比率におよぼす影響は平均値の分散に対する公式

$$\sigma_M^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad (1)$$

から知られる。

さとし

σ_M^2 = 標本平均値の分散、すなわち標準誤差の二乗

σ^2 = 標本プロットの分散すなわち平均平方

n = 標本プロットの数

である。

与えられた標準誤差に対して、5 エーカプロットの場合の n は2.5 エーカプロットの $449.3926 / 282.4961 = 1.59$ 倍が必要である。最終単位母集団の標本抽出において、5 エーカプロットと2.5 エーカプロットと同じ精度をうるためには、標本面積を1.59 倍にし

なければならぬ。換言すれば、2.5 エーカープロットと比較するとき、5.0 エーカープロットの効率比は、 $282.4961/449.3926 = 62.86\%$ だということである。2.5 エーカープロットの場合とエーカープロットの標本抽出と同一精度の信頼推定値をうるには面積は 62.86% でよい。2.5 エーカープロットは 1.0 エーカープロットと比較するとき一層有利である。それで基本プロットより大きいプロットすなわち抽出単位を用いるときには、プロット内の基本プロットの個数にしたがって分散に重みをつける。同様に 1.0 基本プロットの数で表わす。このようにしても、えられる標準誤差は所与に変りない。平均平方を用いたプロットの大きさや形、あるいは配列にかかわらず直接比較できるようにするため、本論文ではこれらの基本プロットあたりで示すことにする。

第2表から明らかなように、1.0 エーカープロットの中で最も効率のよいのは細長い形のものである。これは 10×10 ナエーンや $50 \times$

第2表 種々の大きさと形状のプロットの相対的効率

プロットの大きさと形状	平均平方	効 率	与えられた標本を500に 増やすのに必要となる 標本の増加率
2.5 エーカー: 2.5×10 ナエーン ¹⁾	282.4961	100.00%	1.00
5 エーカー: 5×10 ナエーン	449.3926	62.86	1.59
1.0 エーカー:			
2.5 $\times$ 40 ナエーン	566.0602 ²⁾	49.90	2.00
5 $\times$ 20 ナエーン	711.8291 ²⁾	39.68	2.50
10 $\times$ 10 ナエーン	682.4958	41.09	2.40

1) 1 ナエーン = 66 フィート

2) 母集団分散を別々に計算して求めた。他の平均平方はすべて第1表の自由度と平方和をこみにして直接求められる。

20×10 ナエーンプロットと違って、この形のプロットでは面積が全く異なったり、あるいはあつても僅かだ。平均的変動を増加させるような独立本プロットが少なかつたことに一部の原因がある。部分変動の最大な方向に対するプロットの方角の影響は F.2.1 で示される。

部分変動は各通等高線と直角な方向で最大である。この資料を調査した際には、プロットの長辺は常に東西方向であつた。すなわち section 内の標高差は非常に大きく、section 24 と 23 では長辺が最大変動の方向に向いたプロットで、section 27 では最大変動の方向と 45 度をなすプロットで、また section 3 では最大変動と平行なプロットで調査がおこなわれた。サンプリングはこの点では section 間で大体的な割合がとれていたことがわかる。もしプロットの長辺を常に等高線と直角になるようにとつていた細長いプロットの利点は更に大きかつたであろうから、 50×20 ナエーンプロットは 10×10 ナエーンプロットよりはるかに優れているように思われる。

第2表の結果は、理論的に無限な母集団からの無作為標本抽出によつてえられたものだという点を強調しておかねばならぬ。平均値に有限母集団修正をほどこし、ブロック間の変動を削除するものと等しい抽出方法では、これらの相対的効率は厳密に近い値とはなるが、必ずしも同じ結果がえられるとは限らない。

無作為プロットおよびブロック内無作為調査

上述のように、実質な母集団では、抽出単位を独立かつ無作為に選んで、実質性の要請が大抵その真の割合で表わされるようにすることが必要である。抽出単位に 2.5 エーカープロットを用いれば、無作為標本による分散の推定値は真の分散 282.4961 に近い値となるであろう。標本推定値の数が多くなれば、それらの平均は一層真値に近づくであろうし、また大標本からえられた推定値も同じように真の分散のまわりに密集し、誤差の正規法則に非常によく一致するであろう。分散の妥当な標本推定値は公式 (1) に代入することができる。そのとき t は既知であるから標準誤差が計算できる。これによつて我々は、真の母集団平均が μ_0 の確率で含まれるような標本平均値からの範囲を定めることができる。えられた標準誤差を s 倍すると、 $1/20$ の確率で真値が含まれるような範囲がえられる。

精度調査の場合公式 (1) を用いると、抽出誤差を相当逐大に推定

することになる。というのはそれが理論的な無限母集団平均からの
範囲を推定しているのに対して、我々がこゝで求めているのは限ら
れた2,304個の25エーカープロットの母集団についての範囲だか
らである。公式中の n に2,304を代入すると、有限母集団平均値に
対する母集団平均値の範囲の推定値がえられる。これは標本平均値
の分散と無関係な部分で、次式の $\frac{\sigma^2}{N}$ と表わされるものである。

$$\sigma_M^2 = \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{N} \quad (2)$$

こゝで

N = 有限母集団に属する25エーカープロットの数

実際の場合にえられる統計量は、標本平均値とそれに関する分
散の存在値の二つである。二つの場合のデータでは、有限母集団の
真の分散と平均値がわかっているから、公式(2)の n を動かせば色々
な抽出率で予想される真の平均値のまわりの標本平均値のバラツキ
の真値が計算できる。これはプロットの大きさや形と、もに変化する
からこれらの因子の影響は当然予想される標本平均値の散らばりに
反映する。公式(2)の σ^2 に代入するのに適切な平均平方を第3表に
示す。これらは第1表から計算したものである。色々な大きさのプ
ロットから作られる種々の抽出率の無作為標本について、予想され
る標準誤差を第4表に示す。確率的に配選したプロットを同じ全
部で7つの調査に対して真の分散から求めた期待標準誤差があげて
ある。それぞれの調査に対して、予想値と観測値を比較するため
2つの独立な標本が抽出された。2,304個のプロットに並番号をつけ、
各調査に必要個数のプロットを Tippett (11) の乱数表を用いて抽
出した。真の平均値からの標準誤差および標準偏差の推定値を対応
する真の標準誤差とともに第4表に示す。

第3表

標本平均およびプロット平均に対するプロットの分散

プロットサイズ と 変 動 因	平 方 和	自 由 度	平均平方 ¹⁾	プロット平均 ²⁾ 値の分散	標準誤差
25 エーカー :					
総平均から-----	650, 588, 6220	2,303	282,4961	282,4961	16.81
section IV -----	540, 895, 2694	2,295	235,6892	235,6892	15.35
1/4 section IV ----	482, 759, 8662	2,268	212,9444	212,9444	14.59
forty IV -----	416, 388, 3518	2,160	192,7924	192,7924	13.88
5 エーカー :					
総平均から-----	519, 250, 8825	1,151	449,3926	224,6963	14.99
section IV -----	409, 557, 5299	1,143	356,5683	178,2842	13.35
1/4 section IV ----	349, 620, 1267	1,116	313,2997	156,6398	12.52
10 エーカー :					
総平均から-----	395, 310, 0624	575	687,4958	171,8739	13.11
section IV -----	285, 616, 7098	567	502,9332	125,9333	11.22
1/4 section IV ----	227, 699, 3066	540	421,6283	105,8071	10.29

1) 単一の基本プロット(25エーカー)の分散

2) 大きいプロットを構成している基本プロットの平均値の分散

表 第 2 号 炭の平均炭積からの標準平均値の偏差と標準値

プロットと標本の大きさ	列 番	全母集団に対する標準偏差			プロット内の標準偏差		
		母集団分散 から求めた 標準偏差	母集団分散の 標準偏差に よる標準偏差	炭の平均値の 標準偏差の 標準偏差	母集団分散 から求めた 標準偏差	母集団分散の 標準偏差に よる標準偏差	炭の平均値の 標準偏差の 標準偏差
2.5 エーケー 3 1/4 %	1	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	2	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	3	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	4	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	5	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	6	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	7	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	8	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	9	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	10	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	11	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	12	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
5 エーケー 6 1/4 %	13	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	14	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	15	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	16	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	17	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	18	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	19	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	20	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	21	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	22	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	23	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	24	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822

12 1/4 %	25	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	26	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	27	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	28	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	29	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	30	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	31	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	32	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	33	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	34	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	35	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	36	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
14 エーケー 6 1/4 %	37	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	38	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	39	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	40	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	41	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	42	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	43	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	44	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	45	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	46	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	47	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	48	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
12 1/2 %	49	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	50	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	51	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	52	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	53	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	54	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	55	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	56	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	57	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	58	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	59	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822
	60	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822	4.822

1) エーケープロットの炭の平均炭積は 40.82×10^3 feet board measure である。

2) 各プロットからの炭の平均炭積を標準偏差に抽出した、この場合のプロットは、最も炭の炭積が平均炭積の方の単位とした。

しかし分散分析を用いて全平方和を既知の変動要因による部分に分ける、ブロック間の変動とブロック内の変動による部分に分割しうるように、プロットの配置を変えることによつて、これらの標準誤差を減少することが出来る。各ブロックは無作為にプロットを抽出することによつてすべて同様の標本抽出がおこなわれる。級内平均平方を推定するためには、ブロックあたり最低3つのプロットが必要である。この場合のブロックは、そのような標本抽出がおこなわれる最小の方形単位と考えられる。抽出率はブロック内およびプロットサイズの変動によつてさまざまになる。このようなプロット配置は、全地域に対するプロットの無作為抽出と対比される。後者の抽出では殆んどの場合ブロック内の抽出率は同じにならない。

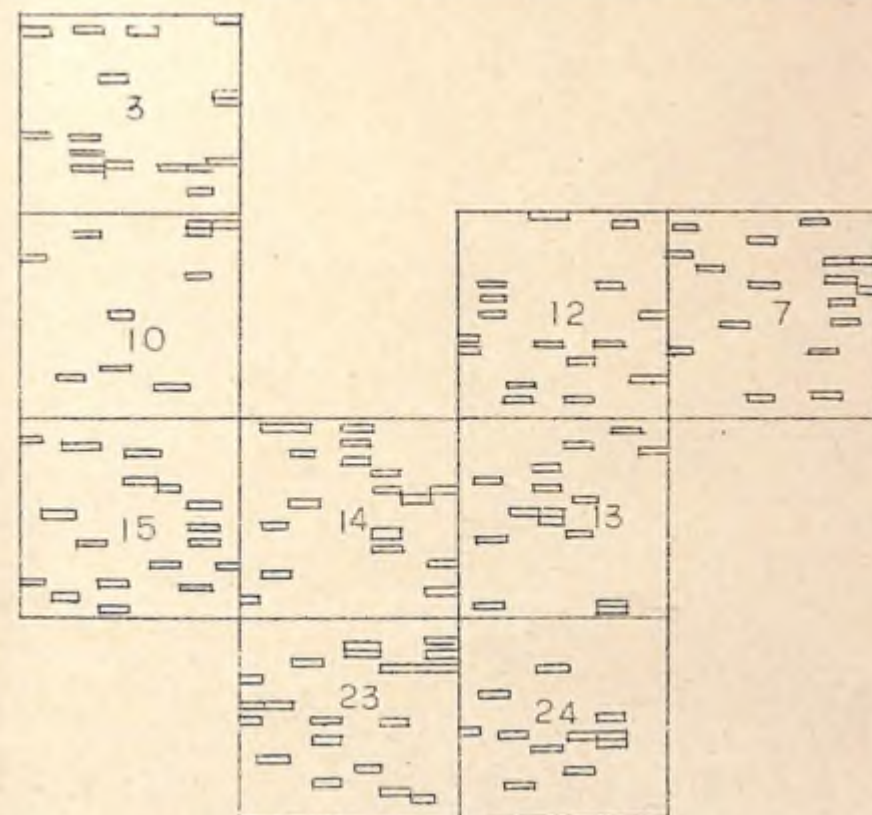
ブロック間変動にもとづく平方和の自由度は、ブロックの数より1だけ少ない。ブロック内変動による平方和の自由度は、抽出単位の数マイナス偏差をとるのに用いたブロック平均値の個数である。F検定を適用してみるとすべての場合について級内平均平方が有意に大きいことがわかる。これは誤差分數に全平均平方ではなく級内平均平方を用いたことによつて、抽出誤差と無関係な主要成分の成分が除去されることを示している。第3表のデータを用いて、プロットサイズ2.5エーカーの1/4 section に対するこの分析を、必要計算とともに第5表に示す。

第5表 1/4 section ブロックと2.5エーカープロットに対する分散分析

変動因	平方和	自由度	平均平方	F
1/4 section 間	167,630.7558	35	4,789.4502	22.49
1/4 section 内	432,957.8662	2,268	212.9444	-----
全 体	600,588.6220	2,303	260.4961	-----

この方法は妥当である。なぜなら各ブロックを母集団とみなしたときのブロック内平均平方は、ブロック平均値の差とは無関係に、抽出誤差の範囲内で同一だからである。全ブロック内の平均平方を

こみにした推定値は、自由度が大きいと特定ブロックに適用した場合でさえ、単一ブロックから求めた推定値よりずっと正確である。小さいブロックの使用による誤差分數の減少は、第3表から明らかである。2.5エーカープロットを抽出単位とし、F.23に示した無作為配置でも1/4%調査をおこなったところ、誤差分數は282.4961で標準誤差は平均値の3.32%となった。ブロック内無作為抽出では、100個のプロットを1/4 section—これは第5表とF.23に示されたようなブロック単位である—に割当てると平均4個となる。誤差分數は212.9444で、標準誤差は2.98%に減少する。第4表の全母集団での無作為抽出と比較すると、ブロック内無作為抽出で予測された標準誤差の減少はすべてプロット配置の違いだけから生じたことがわかる。母集団分散にもとづく各標準誤差に対する実際の標本



F.23. 24のsectionの1/4%無作為調査における2.5エーカープロットの配置、プロットは全母集団から無作為に選んだ。

から計算したものの推定値と、これに対応する真の平均値からの標準平均値の偏差が与えられる。

プロットの大ささ、形状、配置および抽出率が抽出誤差におよぼす影響は、計算された標準誤差において現れる。従来では、あるいは推定値にともなう部分的な誤差によつて、近接点の交差性をよく避けて、これらの影響が正確にきめられることすれば、正規分布の標準単位で表わした真の平均値からの標準平均の偏差は抽出誤差だけから生ずる大きさを以上にはならぬ筈である。もし抽出誤差の評価に必要な情報が標本中に含まれていれば、標準誤差の標準推定値から求めた標準単位で表わした偏差の幅は、同じように正規法則から推定したものとも一致する筈である。予想とよく一致した観測結果を第6表に示す。観測次数は、そのような試行の対数で平均される範囲の中におさまっている。

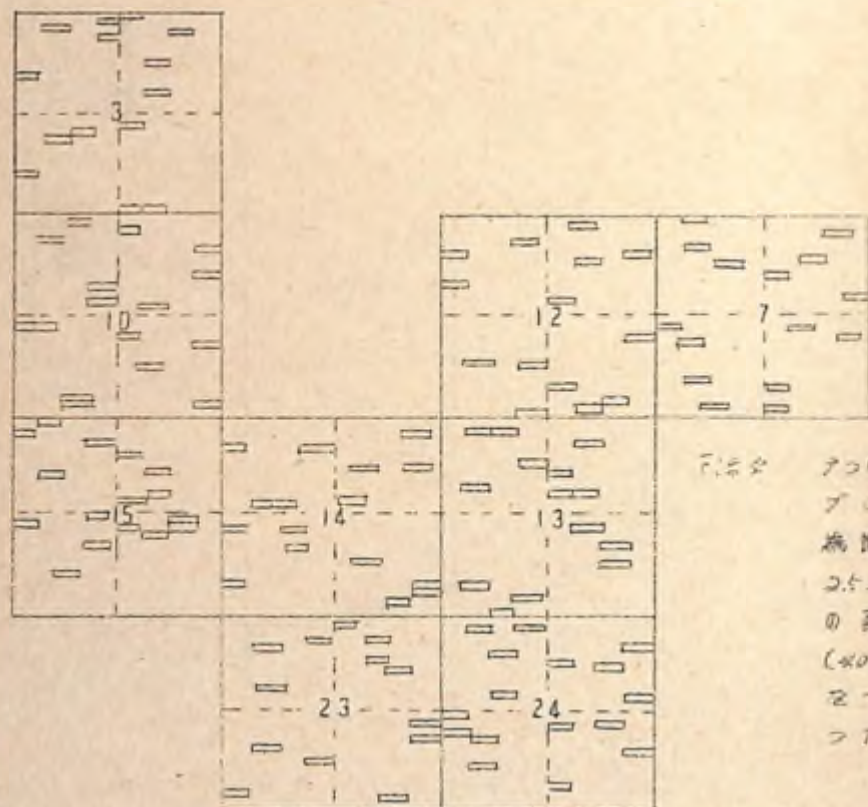


図5 7つの section の各々のプロットに観察される25エーカープロットの配置。1/4 section (40x40 エーサー) をプロットにした。

第6表 真の平均値のさわりの標準平均値の数のばり：
予選値と観測値

正規分布の標準単位で表わした真の平均値の偏差の幅	観測次数	予選値の観測次数		ブロック内無作為観測次数	
		真の標準誤差による	推定された標準誤差による	真の標準誤差による	推定された標準誤差による
0.25以下	56	7	6	5	4
0.25から0.52まで	56	6	7	6	7
0.52から0.84まで	56	6	6	5	4
0.84から1.28まで	56	5	4	7	8
1.28以上	56	4	5	5	5
計	280	28	28	28	28

帯状調査 (strip census)

これまで最も効率のよいことが示された抽出方法は、最近ユウのプロットかと思われるような大きさのブロックを用いる。ブロック内無作為抽出、すなわち25エーカープロットの“層化”抽出法であつて、この抽出法の欠点は、プロットの設定と、地域全部を要求された標準誤差に化することが難しいことである。あるブロック内においてはプロットがかたまって、別の図化にのみ必要な調査線を選ばない限り広い地域が図化できないまま残される。プロットを配置するのには誤ける調査線の不揃いは下図5のようにブロック内でストリップを無作為にとることによつて、ある程度避けることができる。

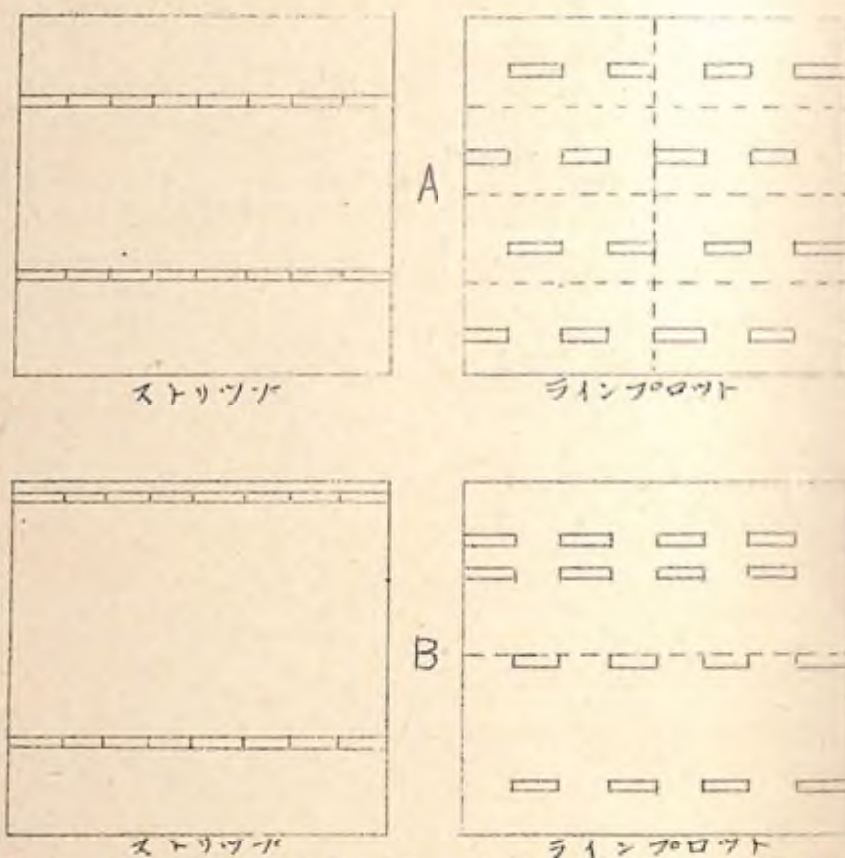


Fig. 5. $1/4$ のストリップおよびラインプロット配置における代表的なプロット配置

A: 系統的調査, B: ブロック内無作為調査.

図は *section* 内のブロックの境界を示す.

この場合の抽出単位は 25×80 + メーンのストリップで、これはブロック単位である *section* 内の、可能な 32 個のうちから 2 つが選ばれる。そのような 28 個の調査間の (25 エーカープロット当りに換算した) 平均平方は、第 7 表にあるように 385.5211 である。前に述べた理由から、これは *section* 内のストリップ間の平均平方から計算した抽出誤差のみの平均平方とは違っている。後者はこの場合には 425.1970 と推定されている。F 検定でこの仮説に反証をあげることばできない。

第 7 表 抽出率 $1/4$ のストリップ調査に対する分散分析

ブロック内無作為ストリップ

変動源	平方和	自由度	平均平方	F 値	ブロックに属する分散
調査間	10,409.0638	27	385.5211	72.0	407.70
調査内 <i>section</i> 間	277,894.8542	224	1,240.6020	2.92**	
<i>section</i> 内ストリップ間	103,142.6481	252	425.1970		
小計	385,044.5023	476	808.9170		
全体: ストリップ間	395,453.5711	503	786.1900		

母集団分散

調査間			381.2952		
<i>section</i>	109,693.3526	8	13,711.6691	35.96**	428.49
<i>section</i> 内ストリップ間	106,381.3677	299	381.2952		
全体: ストリップ間	216,074.7203	287	752.8736		

系統的ストリップ*)

調査間	2,835.2736	15	189.0182	2.21	
調査内 <i>section</i> 間	153,411.7846	128	1,198.5292	2.87	390.57
<i>section</i> 内ストリップ間	60,104.5909	144	417.3930		
小計	213,551.3255	272	784.9865		
全体: ストリップ間	216,351.5991	287	753.8883		

1) 28 個の調査の平均収獲 = 40.79

2) 72.0 = 有意差がない (nonsignificant). ** は 1% 値を示している。

3) 標の平均値 = 40.83

*) 16 個の調査の平均収獲 = 40.83

section 内ストリップの標の母集団平均平方は 381.2952 である。えられた推定値が、これと有意に異なるかどうかはカイニ乗分布で検定することが出来る。

$$\text{カイニ乗} = \frac{\text{平方和}}{\sigma^2}$$

信度 252 のカイニ乗は $P = 1.275$ で $20 \times 10 \times$ で、 $P = 2.025$ では $20 \times 20 \times$ である。 $\chi^2 = 321.2952$ を代入し、対応する各平方和について除いて 252 で割ると、このような試行の 95% において予想される平均平方の幅が与えられる。与えられた値は 317.0052 と 452.0423 である。したがって、標本推定値を誤る理由はなにもないことになる。

section 間の変動は *section* 内の変動より有意に大きいから、誤差に全分散を用いると非常に過大な推定値が与えられる。したがってこれは正しくない。誤差の平均平方の推定値については、系統的ストリップ調査はプロット内で無作為にとつたストリップに全く匹敵するように思われる。隣り合った 16 箇の 64% の誤差によって地域の 100% はわち全母集団が覆われる。これにもとづいてストリップ調査の母集団分散が第 7 表の下のように分析される。そのような調査間の変動は、プロット内無作為間のもの、約半分である。系統的調査を有利ならしめるこの利点は、そのような調査では抽出が $1/2$ *section* の各々について平等におこなわれるため、ずっと代表性があるのに対し、無作為抽出の場合の最小プロットが *section* であることを考慮してもなお極めて大きいのである。

調査間の変動は無作為抽出の場合にそのような試行の 95% において予想されるものよりも小である。しかしストリップは等間隔だから F 検定を用いるのは適当でない。系統的配置の場合に全分散の成分が無作為配置のものと同じ位違ふかをみるため、母集団分散の分析をおこなった。明らかに、ストリップ間の全母集団分散はどちらの配置でも同じである——ここに示した値は、推定に簡略法を用いたため正確には同じでない。したがって成分も異なる。*section* に関する変動は無作為配置より系統的配置の方が小さいから、それに対応して *section* 内のストリップの変動が大きくなっている。系統的配置の場合の平均平方の標本推定値は、無作為のように同一の値に近づくといいことがないから、誤差の平均平方を分離する標本がない。単一の調査では、このような分離をおこなうための情報がない。

与えられないのである。無作為調査では、プロット配置によって、データの与える誤差の平均平方を推定するための基礎が唯一つ定まるから単一の調査でこのことが実行である。

この場合のように、全く一様な部分での抽出率の高い調査では、系統的ストリップに比べて無作為ストリップの使用から生ずる成績推定値の精度の低下は無視できないものである。ある場合には、誤差分散を十分推定できるだけの自信度が与えられるまで分散したプロットを無作為ストリップで調査し、次に残りの部分を系統的に調査することが可能であろう。このようにすれば推定値の誤差を許容限界内に抑えようような代表性のある抽出法が確実に与えられる筈である。図化に便利なることもまたこの方法の優れている点である。ある地域では調査前に適当な地図が利用できることもあるが、しかし大部分の調査ではやはりサンプリングによって地図を作ることが主要な問題である。

ラインプロット調査

第 8 表の無作為ラインプロット配置において、抽出単位は *section* を横断して等間隔に配置された 4 つの 2.5 エーカープロットからなっている。プロット単位である $1/2$ *section* からこのような単位の可数は 32 箇の中の一つが無作為に選ばれる。このような調査間の真の分散は $221.28/2$ (第 8 表である)。無作為抽出における適当な誤差の推定値は、 $1/2$ *section* 内のラインプロットの平均平方で与えられる。これは真値に近づいてゆく。このような調査を 56 箇所におこなうと与えられる対応する推定値は、抽出誤差の範囲内にあるから、相互間に有意差はない。

第2表 抽出率64%のラインプロット調査に対する分散分析

ブロック内無作為ラインプロット¹⁾

変動因子	平方和	自由度	平均平方	F ²⁾	ブロックに 関する分散
調査間	10,109.0880	55	183.8016	7.1	233.18
調査内1/2 section	660,240.1175	952	693.5295	3.15 ³⁾	
1/2 section内ラインプロット	228,976.3900	1,008	227.1591		
小計	898,216.4875	1,960	453.6819		
全体：ラインプロット間	898,325.5755	2,015	446.3154		

区集団分散³⁾

調査間			221.8812		
1/2 section 間	128,774.5115	17	7,574.9413	34.14 ⁴⁾	236.72
1/2 section内ラインプロット	123,809.4229	558	221.8812		
全体：ラインプロット間	252,584.2344	575	439.2767		

系統的ラインプロット⁴⁾

調査間	3,106.6748	15	207.1112	1.21	200.88
調査内1/2 section 間	177,375.0742	272	652.1142	2.60	
1/2 section内ラインプロット	72,102.4804	288	250.3558		
小計	249,477.5546	560	445.4956		
全体：ラインプロット間	252,584.2394	575	439.2769		
調査間	3,106.6848	15	207.1152	1.06	64.10
調査内20x40ラインプロット	374,693.3468	1,136	347.4413	1.58	
20x40内プロット間	252,558.0700	1,152	219.2344		
小計	647,251.8168	2,288	282.8396		
全体：プロット間	650,358.1016	2,303	282.3960		

区集団分散⁵⁾

変動因子	平方和	自由度	平均平方	F ²⁾	ブロックに 関する分散
調査間			221.8812	1.10 ⁴⁾	89.04
20x40ラインプロット	202,289.9365	71	2,847.1540	14.18 ⁵⁾	
20x40内プロット間	458,298.6856	2,222	206.2507		
全体：プロット間	650,588.6221	2,303	282.4961		

- 1) 46面の調査での平均収獲 = 40.70
- 2) 7.1 = 有意差がない。***は下の1%値をこえている。
- 3) 区集団の平均値 = 40.83
- 4) 16面の調査の平均収獲 = 40.83
- 5) 区集団の平均値 = 40.88

F185に示した系統的ラインプロット調査においては、ブロック単位について次のことを決定する場合に困難が生ずる。すなわちこのようにプロット配置は無作為ラインプロットに比較すべきであるか、あるいは大きき20x40サエーンのプロット内から2つのプロットをとる無作為抽出法と比較すべきかということである。実際には、同一面の調査だけでは最も有用な情報のものである方法を決定することはできない。この特別な地域については16面の調査によって作られる区集団に対して、上述の決定をおこなうことができるか、しかしその結果を一級に適用するわけにはゆかない。抽出単位が植生かつ無作為に選ばれる場合には、誤差の平均平方を決定するための正しい基準について何等問題は生じない。

系統的配置を無作為ラインプロットと同じように取扱うことが許されるなら、ブロックに関する分散は無作為抽出の真値より小さくなり、またブロック間平均平方はずっと大きくなる。そのような無作為決定値はストリップ調査の場合と同じく、全分散の真の値に近く傾向があるが、調査間の分散は対応する無作為調査のものより小さくなる。したがって全分散を調査内に帰属する変動に分割すれば偏りが生ずる。一方の過大推定が他方の過小推定によって償われる。

ているのである。このことは、 40×40 セン単位をプロットとするとき一層はつきりする。この場合もしF検定を使つてよければ、無差平均平方の2つの推定値は抽出変動の範囲内にあることが示されるであろう。二つの中、 20×40 セン単位プロット内平均平方の方が一層有用な情報を与える。標本が一つしかとれないような場合には、どちらがより著しい誤差推定値を与えるかということばかりからない。ストリップ調査についての推測は、こゝでどちらを選ぶかということと固く論理の問題であつて、これほどあまり有用でないことが示されている。何れの場合でも全分散を誤差分散として用いるのは妥当でない。

調査の相対的効率

色々な調査の相対的効率を比較する基準として、我々は3/8%調査に對して $P = 0.05$ で平均値の8.00%という誤差の範囲をとる。したがつて抽出率を2倍の6/4%にすれば誤差は5.33%に減少し、更に2倍して12/4%とすれば4.00%に減少することが予想される。これは公式(1)から導かれる結論である。単一の25エーカープロットをもとにすれば、この精度をうるのに要する誤差の平均平方は199.9584である。有限母集団修正をほどこすと効率はよくなる。というのはこの場合の平均平方は、公式(2)からわかるように標本に含まれる母集団の割合だけ減少するからである。相対的効率があまり違つてこないのが第9表ではこの修正はやっていない。平均平方の修正値が与えられれば、抽出率の増加にともなうプロットサイズの減少の効果が完全に分離される。199.9584の逆数すなわち逆分散(invariance) = 0.00500を25エーカー当りの単位情報とし、これをもとにして各調査の情報量を求める。情報量が1単位だということは、1単位の調査と同じ精度をうるのに2倍の大きさの標本が必要であることを示している。もし単位面積あたりの調査費用が同じなら、前者を用いれば費用が2倍になるということである。

第9表 調査の相対的な情報量

3/8% 抽出

抽出単位とその配置	平均平方	逆分散	25エーカー当りの情報量単位
25エーカー、1/4 section内で2プロットをとる	212.9444	0.00470	0.94
25×80 センストリップ、無作為	752.8736	0.00132	0.27
80 センの直線上で等間隔に4つの25エーカープロットをとる。直線はsection内で2本	252.0121	0.00397	0.79

6/4% 抽出

25エーカー、20×40内で2プロットをとる	200.8517	0.00498	1.00
25×80 センストリップ、section内で2つ	381.2952	0.00262	0.52
80 センの直線上で等間隔に5つの25エーカープロットをとる。直線は1/2 section内で2本	221.8712	0.00451	0.90
5エーカー、1/2 section内で2プロット	313.2797	0.00319	0.64
10エーカー、1/4 section内で2プロット	477.6622	0.00209	0.42

12% 抽出

25エーカー、for=1/2内で2プロット	192.7724	0.00519	1.00
25×80 センストリップ、1/2 section内で2つ	323.3341	0.00309	0.62
80 センの直線上で等間隔に4つの25エーカープロットをとる。直線は20×80内で2本	187.3106	0.00528	1.06
5エーカー、20×40内で2プロット	291.6305	0.00343	0.69
10エーカー、1/4 section内で2プロット	421.6283	0.00237	0.47

- 逆分散 = $\frac{1}{\text{平均平方}}$, 0.00500 = 1 情報単位
- 3/8%抽出では、0.05水準での8.00%の誤差、6/4%調査では5.65%の誤差、および12/4%調査では4.00%の誤差を1単位とする。
有限母集団修正は含まない。

3つの異なる抽出率について与えられたそれぞれの基準によるものは、25エーカープロットによるプロット内無作為調査法であ

る。抽出率が低いとき、プロットは偶然為ラインプロット調査の精度はそうひどく悪くないが、100%抽出の方が少し精度がよくなっている。丁介る精度がえられること、プロットの決定に便利なこと、またエネルギープロット、プロット内無作為ラインプロット配置を避けるのが最良と思われる。

と知られた抽出単位では、第2表に示された抽出率の増加にともなう精度の増減は、プロットの大さの減少およびそれによって抽出誤差と無関係な変動が除去されるためである。

この場合には、母集団の100%調査から系統調査と類似の無作為調査の誤差の範囲を比較することが可能である。系統調査は第2表の無作為調査のようには取扱えないが、ストリップおよびラインプロットの両方についても100%調査の平均値の誤差の変動は、この有限な集団について求められたものである。どの場合でも、平均平方は正確な無作為調査のものより小である。このこと、区画に都合がよいということから、一つは標本では抽出誤差の推定には必要な情報が見えないといつてこれらの抽出法を簡単に作らなければならないかどうかは疑問いように思われる。これらの抽出誤差は近似値で近似できる可能性がある。地区が必ずでないか、あるいはすでに作られているような場合には、対応される系統調査と同じ時間と労力とで調査ができる。調査者は抽出誤差の推定づけ加えられる余分の精度が、正確な推定値の正確さの減少によって犠牲されるかどうかをきかなければならない。真の平均値のまわりの系統調査の平均値の範囲は、方形プロットを用いたプロット内無作為抽出で予想された範囲とよく一致することが、前に示されている。

もし母集団のすべてをそのようなプロットの多数が無作為に選ばれ、無作為配置によって調査されるなら、そのようにしてえられる誤差分散のこめにした推定値は、抽出がなされた母集団の全体に十分

適用できるであろう。そうして残りのプロットは系統的配置によって調査することができる。このときプロットは同じ数で、大きき形も同じものを用いる。プロットの形状についての制限を除けば、Fisherは示したような系統調査ストリップ配置に対するいまの研究には、 40×20 チェーン（南北方向の大きさ）のプロットが適当である。そのような単位内の標準変動は 195.5×48 に近づいてゆく。これは第2表の調査間の平均平方 182.0182 と非常によく似た値である。ゆかり誤差分散を近似するために提案されたこの方法は、非常に短かいストリップや細長いプロットを用いると妥当な範囲をこえて過ぎられることになりやすい。ゆかりくプロットの長さはその幅の2倍をこえてはならないだろう。

系統的ラインプロットを用いる場合には、上記のような誤差分散の近似式を採用するのが安全と思われる。 20×40 チェーンプロットでの無作為抽出誤差の平均平方は、 200.8707 で、系統的調査間の平均平方は 202.1152 である。抽出誤差のこの近似方法の妥当性は、Fisherから頭うかである。系統的配置は、無作為より代表性が高い。ラインプロット抽出では、 20×20 チェーンの各々から1プロットを抽出する。一方、無作為抽出ではプロット配置がそのようになつていないので、ある 20×20 チェーンプロットではプロットが全然抽出されず、まにあるプロットでは2つのプロットが抽出されるかもしれない。

英国の Rothamsted 農事試験場の主任統計技師である F. Yates は、各プロットの中心で一つの抽出単位がとられているような系統調査の抽出誤差は、同じ大きさのプロットで無作為に選んだ2つの抽出単位から計算される誤差分散の推定値で近似できることを示した。プロット内今取の丁介る推定値をうることのできる無作為調査を母集団内で一つだけ実行し、調査は系統的配置で進行することができる。その結果、無作為調査と比較して系統配置の代表性が高いという利点がある。プロットの大さが同じ抽出率の無作為調査の丁度きかたよいということのために誤差分散の減少となつてあらわれてく

* Haas, A. A. Ponderosa Pine 木の収穫を求めめるためのサムプリング方法の分析, Calif. Forest Range Exp. Sta. Rep. 6, June, 1937

る。1/4%の系統的ストリップ誤差では、14面の調査面の平均平方は189.0182である。1/2 section 内の無作為ストリップ面の平均平方は、前に引用した報告中に223.3341であることが示されている。推定に用いた自由度は僅か15であるが、差は無作為無偏性の抽出誤差による変動の範囲内にある。189.0182という値はこの無作為無偏性より成り立っていない。他の調査面地域でよりよい調査をおこなうと、その推定値は大概223.3341に近い値となるであろう。例えばプロットの配置について選んだプロットのプロットを10とするより、プロット内でプロットを抽出する方がよい場合には、ストリップ配置がいつでもラインプロットより近い推定値を与えるということも期待できない。同様に、無作為ストリップより優れている抽出法は、一層代表性のある抽出法であるということになる。系統的ストリップ調査の誤差を推定する方法は、前述のストリップをプロットと見た場合に適用できると考えられる。

ラインプロット配置では、2つの方法での結果は非常によく似ている。20×80 ナエーンプロット内のラインプロット抽出単位面の分散は、189.2106である。これは20×40 ナエーン内のプロット面の分散 210.8507と少ししか違っていない。また自由度15で推定した20×1152とも有意な差はない。

他の因子をそのままにしておいて抽出率を2倍にすると8.00%のものの抽出誤差は566%の増加を前に注記しておいた。抽出誤差の増大に正確な推定とか誤差分散の推定のもととなる抽出率の種かな変更などは、それによつて種々の原因からの偏りのある誤差が調査推定値の全誤差の大部分に影響するということがない限り意味ではない。

抽出率を小さくして縮小される時間を偏りの誤差の減少に振り回けることは非常によいことである。

誤差分散の推定値の精度

誤差分散とりとえられた平均平方は、取扱つている母集団の真値

から求めたものである。標本推定値はこれらの値に近づいてゆくのである。真値のまわりで標本推定値そのものが散布している範囲は、それらの推定に利用できる自由度のみで定まる。そのような推定値の95%が含まれる範囲が無作為抽出に対して公式(3)から計算され、第10表に与えられている。この推定値が、8とか9のように少ない自由度で求められている場合には、単一の標本からは誤差計算の非常に大まかな、すなわち信頼性の少ない基礎しかえられない。

この点では無作為プロットの方がラインプロットよりもはるかに有利であり、また後者はストリップ調査より優れている。しかしながら、小数の section についてスケーラーよりもつと小さく、またおそらくもっと効率のよい大きさのプロットを用いて、普通の抽出率の調査をおこなえば、推定の十分な基礎がえられるであろう。このような検討を第10表に示してあるが、これは前に述べたように外推を系統的調査をおこなう前に、無作為調査で調査しなければならないプロット数を定める基準となるものである。

3/16 % 抽出

抽出単位とその配置	自由度	平均平方	標準偏差の範囲の範囲
25エーカー, 1/4 section 内で2プロットをとる	36	212.9444	123.8059 - 319.2763
25x80 エーカーストリップ, 操作機	8	252.8736	203.8805 - 348.7932
80 エーカーストリップの線上で等間隔にとった4つの25エーカープロット, 1/4 section 内で2本の線をとる	9	252.0121	24.4226 - 532.1875

6 1/4 % 抽出

25エーカー, 20x40 エーカーストリップ内で2プロットをとる	72	200.8507	139.4796 - 270.2647
25x80 エーカーストリップ, section 内で2つをとる	9	381.2952	112.6092 - 605.1260
80 エーカーストリップの直線上で等間隔にとった4つの25エーカープロット, 1/4 section 内で2本の線をとる	18	221.8712	100.4166 - 388.2921
25エーカー, 1/4 section 内で2プロットをとる	36	312.2997	172.1408 - 469.7107
10エーカー, 1/2 section 内で2プロットをとる	18	492.6623	216.1924 - 835.9090

12 1/2 % 抽出

25エーカー, 40 エーカーストリップ内で2プロットをとる	144	192.7724	150.2018 - 239.0988
25x80 エーカーストリップ, 1/2 section 内で2つをとる	18	323.5341	146.2236 - 565.7847
80 エーカーストリップの直線上で等間隔にとった4つの25エーカープロット, 20x40 内で2本の線をとる	36	189.2106	100.0652 - 283.8334
25エーカー, 20x40 内で2プロットをとる	72	281.6205	202.5212 - 392.4172
10エーカー, 1/2 section 内で2プロットをとる	36	421.6283	248.1347 - 632.1448

結果の範囲

調査の際は、理論的に正しいものと現実に行うことができるものとの妥協点を見出すことが必要である。経験のある調査者は、それだけでは図化ができないこと、収縮推定値の精度が系統的調査ほどよくないということのために、他を除外して操作機配置のみを用いようなどとは考えないであろう。しかし、誤差分数の各々かつ分岐推定値をうることも重要であるが、これは最初の時間および費用の犠牲をあまり大きくしなくても可能である。そうすれば抽出誤差に属する限り、最も低廉な方法で必要な精度の推定値を確実に入手することが出来る。抽出誤差がわかっているれば、推定値をあとで実際に収縮して求めた値と比較することによって、偏った測定値から生じた誤差を分離することが可能である。したがってその重要度に応じて誤差を減少するという方向に努力をかけることができる。

普通調査すべき地域は幾つかの別々の母集団からなっており、それらは図化に用いられる基準にしたがってわけられている。母集団に対して調査方法を実行に移す際には、一見奇異と思われるけれども、変動状態は一概でないと考えねばならない。次に、プロットの大きさと形状が重要な問題となってくるから、単位面積あたりに含まれる株分変動が最大となるようなプロット、すなわち抽出単位の種数を見出すため検討(検討)をおこなねばならない。与えられた誤差の限界に対する可能な最小の抽出率を示すには、この研究に用いた最小プロットでも明らかに大きすぎる。分散分析の方法は、はっきりと定めている程度でない母集団にもあてはまるが、更に進んだ研究がおこなわれるまでの大体的目安として、プロット枚数の分布が正規に近づいてゆくような最小プロットサイズを示しておく。いずれにしても検討する最小の大きさはあまり多くのプロットで枚数がりとなるようなものではない。これらの基本プロットの調査に要する時間と基本プロットの個数は、プロット間の単位距離あたりの移動時間および図化時間とも記録しなければならない。実際においては、理論的に示される最小のプロットを多数用いるよ

り、小数のプロットで調査を大きくする方が経済的であることが示されるであろう。プロット内で無作為にプロットを選ぶことにより、抽出率を最初に定める際には必要とされる情報が見えらる。プロット配置と抽出率は、そのような形にプロットと予備知識がない場合には、更に検討する必要がある。考えられている最小のプロット内で無作為にプロットまたはラインプロット配置を用いて、必要と思われるより更に抽出率の大きい調査を実行すべきである。仮にそうになっているときは隣接するプロットをまとめて大きいプロットを作り、プロット内とプロット間の両方をおよび調査度をこまにすると、より大きなプロット内分散を推定することが可能である。

よく行なわれるように、調査度を上げて最大変動の方向の抽出率が高くなるようにプロットの向きをきめるのが得策である。土地管理事務所 *subdivision* は都合のよいプロット単位になっていて、*section* 内の調査度は変動の方向にしたがって、一般に南北または東西方向に走る。内部変動を小さく、またそれに伴って振幅の変動を大きくするような大きさと形のブロックを用いれば、抽出誤差と振幅の変動の最大が排除される。ブロック内分散の推定値をあらかじめ定めた誤差の許容限界内に納めうるような分散度の区間度が見られたとき、種々の配置およびブロックサイズに見えらる基本単位あたりの情報量が計算できる。各方法で得るプロット間の平均の移動時間と調査時間がわかれば、単位情報あたりの費用から無作為配置の場合の最も効率のよい抽出法がわかる。同じ抽出率の系統的配置で調査を続行すると、誤差の推定値は過大になるであろう。ブロックの大きさを%とし、それぞれの中心に一つの系統制抽出率を置くことにすれば、近似度は向上する。過去の研究から、この大きさのブロック内に見る無作為抽出法の分散がわかっているれば、このブロック内分散の推定値をブロックの振幅または系統的に配置したプロットの数で割ると平均値の抽出分散の近似値が見えらる。この平方根が調査平均値の標準誤差である。

無作為に選んだプロット内で無作為に調査を行ない、誤差分散の推

定値のナエツツや改善をおこなう場合の外は、同じような形で上述した調査開始時の手続を繰返す必要はない。ここでは *Ponderosa* 林の振幅のように、40 エーカーあるいはそれ以上のプロット内の振幅が一様であるような振幅の、抽出率の大きい調査に近づくことができる方法を見た。小面積の不規則な振幅で覆れる振幅に打ちて無作為調査を用いることは、一時に事前に無振幅が入手できないときは一面である。このことは、振幅の複雑な地方における振幅調査のように、抽出率が大きいときでも同じである。しかしこれらの分散した小面積の振幅を一語にすれば、分散分析からおそくそれらが多数の異質な母集団からなっていることが示されるであろうから、系統制に配置したプロットで求めた全分散は誤差分散の正しい推定値にはならないであろう。そのような推定値は、間違いなく過大に推定値であるという意味において有用であるにすぎない。

経営計画の作成や土地利用の研究において進行中の、あるいは計画されている振幅調査の取組をもとにして、主要振幅および種々の振幅条件のもとで十分の振幅をとるのに最も効率のよい方法を探索することは、実際の場合に非常に重要な結果を導き出すことになるであろう。現在ある実験振幅および計画中の実験振幅は、固有振幅の主な振幅を公平に代表するものと考えられる。これらの地域を全林毎木として、十分小さい単位について別々に取組を記憶すると、それらの代表する振幅のサンプリングを行なう上で貴重な基礎資料が見えらるであろう。

結 語

Black Mountain 実験林の 5,760 エーカーの地域における振幅調査の実質性は、この振幅が実際では一様に見える、振幅の変動が系統制であると、もとに幾分振幅規則性を示すような他の振幅物と類似していることを証明している。

異質な母集団で効率的な調査をおこなうのに重要因子はプロットの大きさと形状である。抽出誤差の正しい推定は、抽出単位が振

立かつ無作為に選ばれた場合にのみ可能である。地域を一様な大きさと形のプロットに分け、その各々から同数の、少なくとも二つの抽出単位を選べば、Fisher の分散分析の方法で誤差分散を著しく減少することが可能である。誤差分散として全分散を用いたり、また系統的に配置したプロットを無作為抽出単位として処理するようは、普通に用いられる方法に、抽出母集団が等一と認められるときにのみ正しいであろう。そのような条件の満たされるのばたとえあつたとしても稀である。従つて、無作為抽出法を用いたときにのみ変異性に影響する要素をその真の割合で代表すると思ふられる。

系統的調査は同様な無作為調査よりも正確な推定値を得え、また地域の作成にも便利である。母集団の各プロット内の変動は、抽出誤差の限界内でありかわらないし、またプロットの平均値とも相立だから、誤差分散の推定すべき推定値を確実にうる方法としては十分な無作為調査をおこなう以外にないことが示される。もし母集団の残りを系統的に配置した抽出単位で調査すれば、誤差の推定値は少し近大になるであろう。系統的抽出単位を一つしか含まないような大きさのプロット内の変動を、誤差分散として用いれば抽出誤差の近似はもっとよくなる。このようにして無作為抽出に比べて代表性の高い系統的抽出法を考慮にいれることができる。

引用文献

- (1) Candy, R. H. : Accuracy of Methods in Estimating Timber Jour. Forestry 25: (1927)
- (2) Fisher, R. A. : Statistical Methods for Research Workers. (1934), Edinburgh and London
- (3) Fisher, R. A. & Mackenzie, W. A. : Studies in Crop Variation I. The Manurial Response of Different Potato Varieties J. Agric. Sci. (1923)
- (4) Goodspeed, A. : A Modified Plot Method of Timber Cruising Applicable in Southern New England. Jour. Forestry 32 (1934)
- (5) Immer, F. R. : Size and Shape of Plot in Relation to Field Experiments with Sugar Beets Jour. Agric. Res. 44. (1932)
- (6) Mudgett, B. D. and Gevorkiantz, S. R. : Reliability of Forest Surveys Jour. Amer. Statis. Assoc. 29, (1934)
- (7) Peckson, J. F. : Better Cruising Methods. Jour. Forestry 32 (1934)
- (8) Robertson, W. M. The Line-Plot System Its Use and Application Jour. Forestry 25, (1927)
- (9) Schumacher, F. X, and Bull, Henry : Determination of the Errors of Estimate of a Forest Survey. With Special Reference to the Bottom-Land Hardwood Forest Region. Jour. Agric. Res. 45 (1932)
- (10) Snedecor, G. W. : Statistical Methods Applied to Experiments in Agriculture and Biology Iowa (1937)
- (11) Tippett, L. H. C. : Random Sampling Numbers (1927) London
- (12) Wright, W. G. : Variation in Stand as Factor in Accuracy of Estimate. Jour. Forestry. 23. (1925)

ストリップ・サンプリングによる 林分材積の推定

By A. A. Hasel

Estimation of volume in Timber Stand by Strip Sampling

(Ann. Math. Stat. Vol. 13, 1942 より)

ストリップサンプリングによる林分材積の推定

By A. A. Hase I

Estimation of volume in timber stand by strip sampling

(Ann. Math. Stat. Vol. 13, 1942 より)

1. 緒言

この論文は、森林標本調査の幾つかの方法の性質と標本の統計的処理を系統的に研究する目的で提出された一連の研究の第二のものである。林分材積の標本推定値の精度に対する抽出単位の大さき、形状、および配置の影響については Blacks Mountain の 5760 エーカーの実験林について前の論文(1)で報告した。全林毎木のデータから、研究した中で最小のユースエーカープロットが、他の更に大きいプロットに比べて最も効率のよい抽出単位であることがわかった。即ち一定の抽出率では抽出誤差がそれらのものより小さくなった。細長いプロットは同じ大きさの正方形プロットより効率が良かった。一定の長さの線に沿って等間隔に配置した二つもしくはそれ以上のプロットから構成されるラインプロット (line-plot) 抽出単位は、単一プロット (single-plot) 抽出単位と同程度の効率であり、また端から端まで連続したプロットで作られる帯 (strip) よりも効率が良かった。地域を等しい大きさの矩形ブロックに分割し、同一抽出率で各ブロックから標本抽出することによって推定値の精度が向上した。系統的抽出 (systematic sampling) では、平行なラインプロットまたはストリップの抽出単位の中心線は等距離に配置されるが、その材積の標本推定値は比較し得る無作為標本の推定値より改善された。しかし時折実際に行なわれる様に、系統的標本の個々のプロット上の材積を無作為抽出の観測値のように取扱うことは、抽出誤差の極めて偏りのある推定値を与えることが示された。

この論文においては、不規則な形のブロック内からとったスト

リップ標本から得られる標本推定値と、その結果として標本内の長さを変えた抽出単位を取扱う。この方法はラインプロット標本にも同様に適用できる。

Neyman (2) によって述べられた一般概念に従って次のことが考えられる。

- (1) 確率論の公式をいくとも標本の処理に適用すべきなら、標本抽出の理論模型はある確率化の要素を含まなければならない。
- (2) この確率化の要素は標本を無作為に抽出することによって都合よく導入できるが、しかし、それは仮定された模型から、抽出された地域内の立木材積の偏差 (deviation) の分布においてもまた現れると予想できる。
- (3) 系統的配置を統計的に取扱おうとする多くの試みは誤りである。何故ならこの処理は無作為化の仮定のもとに推論された公式を系統的配置に適用するものだからである。

もし抽出の配置が系統的で、確率的な誤差は造物主によって与えられるものであるなら、このデータの処理は抽出の系統的配置および対象のある確率的な要素の厳密な仮定のもとに推論された公式にもとずいて行なうべきである。この種の処理の例は、農業実験の系統的配置の処理について考察された Neyman の放物線の方法 (Neyman's method of parabolic curve) (2) である。

- (4) 最後に、任意の実験的問題に対する数学処理は、理論の予想と実験的事実が十分一致するときのみ有用である。

抽出方法が無作為であっても系統的であっても数学的な抽出理論には、常に抽出方法自身かあるいは抽出される対象についての仮定された要素が含まれる。特定の数学的処理が実験有用であると確信し得るためには、現実の状態が理論の仮定と食い違ったとき予測の正しさに著しい影響を与えるか否かを知るために実験的な研究を行なうことが必要である。

2. 記号および定義

本論に入る前に統計的用語や記号の意味を説明しておくのが有用であろう。Neyman に従って、統計実務家の屢々混同する三つの異なる概念をはっきり区別する。

定義 1: 既に完了した無作為化を含む実験で与えられるものでもよいし、また丁度今任意に選ばれたものであってもよいが、 $u_1, u_2, \dots, u_n$ を任意の定められた数とする。このときこれらの数の Karl Pearson のいう "標準偏差" 即ち記号で S は $S = \sqrt{\sum (u_i - \bar{u})^2 / N}$ を表わす。ここで $\bar{u} = \sum u_i / N$ は u の平均値である。

いま X は確率変数を表わすものとする。これはその値を偶然的な試行 (chance experiment) で決定しようとしている変数である。従って X はある地域から無作為に抽出しようとしているストリップ上の立木材積であってもよい。 $E(X)$ で $u_1, u_2, \dots, u_n$ なる値をとり得る変数 X の数学的期待値を表わす。そうすると

$$E(X) = u_1 p_1 + u_2 p_2 + \dots + u_n p_n$$

である。このとき各 p は X の相異なるすべての可能な値のそれぞれの確率である。

定義 2: " X の標準誤差", 記号で σ_x は

$$\sigma_x = \sqrt{E(X - E(X))^2}$$

を表わすのに用いる。

確率変数 X の標準誤差がある数 u の標準偏差と等しいこともあるが、このことは二つの概念が同等ないし似ているということさえ意味するものでないことがわかるであろう。 $E(X)$ 、従って σ_x も X の確率法則が既知の場合にのみ計算できるもので、それらは標本抽出を行なった母集団では一定である。これに反して S は母集団の任意の標本について計算でき、その値は u の標本毎に変化する。

標準偏差あるいは標準誤差と屢々混同しやすい第三の標準誤差推定値の概念を説明する前に、母数 (parameter) の不偏推定値 (unbiased estimate) について定義しなければならない (3)。

72個の確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ の組を考える。これらは例えば、無作為な方法またはその他の方法で、ある地域から抽出しようとしている72個のストリップで観測される立木材積でもよい。 X の確率法則に含まれる母数を θ で表わす。例えば θ はその地域の立木材積でもよい。

X の任意の函数を F とかく。

定義3: もし F の数学的期待値が一意的に θ と等しくなる場合には、 F は θ の不偏推定値であるという。

普通 θ の不偏推定値は無数にある。これらは函数 F の性質によって分類することができる。即ち線型推定値とは

$$F = \lambda_0 + \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n$$

のようなものと考えられる。ここで λ はある定数を表わす。

定義4: θ の線型不偏推定値の標準誤差が、任意の他の線型不偏推定値のそれより小さいかあるいは少なくとも等しいとき、この推定値は最良線型不偏推定値 (best linear unbiased estimate) 略して B. L. U. E. といわれる。母数の最良線型不偏推定値を決定できるにみかわらず、その標準誤差の値 σ_F の計算が不可能な場合がある。それを知るためには抽出を行なった全母集団を知ることが必要であろう。この様な場合には、標準誤差の二乗、即ち σ_F^2 の不偏推定値が計算される。 F の標準誤差の二乗の不偏推定値を σ_F^2 と書く。これが上に注意した第三の概念である。

線型不偏推定値およびそれらの精度の尺度と考えられる標準誤差を広範に用い得る根拠は Liapounoff の定理とよばれるものである。その内容は大体次の様に述べることができる。もし変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ が独立で、 n があまり小さくなければ、 $F - \theta$ が σ_F のある倍数を超える確率は近似的に正規法則で定められる場合の確率に等しい。上記の結論は、実際において出現すると思われる X の確率分布の如何によらずまた、例えば有限母集団から非復元抽出 (4) で定められた場合の X のように互いに独立でない場合でも正当性を失わない。

上の結論は上記の定義の意味で偏っているような推定値にあてはまらない。同様にそのような推定値の標準誤差の精度の十分な尺度とはなり得ない。

3 データの記述

Lassen 国有林にある Blacks Mountain の実験林から得た全林毎木のデータは、森林調査に対する標本調査理論の応用可能性について恰好の資料を与える。

この林は原生の林で、すべての令樹を含むマツ (pine) の純林であり、その材積の 90% 以上を ponderosa pine および Jeffrey pine が占める。蓄積の大部分は過熟木即ち樹令 300 年以上の木が占めている。この林は北東 California 台地の地位中および下の森林のまず代表的なものといつてよからう。一部の地域を除き、全地域を、普通に用いられている基準に従って一様な林相をもつものとして地図を作成した。地位についてもまたかなり一様であったので、これを単一の層と考えることができた。一般に層内の場所ごとの林分材積の変動性は、異なる層の場所の間の変動性より平均するとき小さいことが予想される。同様に層内の小さくまとまった区画内の変動は層全体の平均的変動より小さいと思われる。従って異質性は層をブロックに細分し各ブロックを別々の母集団として取扱うことによって多少減ずることができる。

実際には、この地域内の全立木地および別々の事業区毎あるいは林班毎に材積推定をしなければならないことがある。一帯に事業区の外縁は道路、尾根、河川、および規則的な土地区割線によって定められる。これらの事業区は都合よくブロックとしてとることができまたそれが十分大ならば二つないしそれ以上のブロックに分割し得る。以上のことに基き、この研究の地域分割を行なった。

これらのブロックの全林毎木のデータを第1表に示す。ストリップはすべて幅 $\frac{1}{2}$ チェーンで、東西の方向に延びている。長さ X は 10 チェーン単位で、また材積 V は 1000 ボードフィート単位で与えられている。

4. 材積とストリップの長さとの間の相関をもととする推定法

林分材積の標本調査で普通に行なわれる方法は、ブロック内のすべての抽出可能なプロット又はストリップの中から、規則的な間隔かあるいは無作為にプロット又はストリップを選びその上で測定を行なうものである。ブロックの形は大概不規則であるから、一列に並んだプロットの個数、あるいはストリップの長さは変化する。この変動によって標本統計量の計算について、正しい“重みづけ”という問題が生じてくる。Blacks Mountain の20個のブロックの中15個でこの様なことが起った。

長さを例えば10チェーン単位で表わした第 i 層の長さ X_i のストリップ上の材積を Y_i で表わし、ブロック内に N 個のストリップの母集団が含まれると仮定すると、ストリップの10チェーン単位当りの平均材積は $\beta = \sum_{i=1}^N Y_i / \sum_{i=1}^N X_i$ である。明らかにもし $\sum X_i$ が既知でこれが正しい場合であれば、 β を推定するという問題は全材積を推定することと同じである。

ブロック内の N 個のストリップから X と Y の値の n 対を与えるような大きさの n の標本をとる。それらを

$$x_1, y_1; x_2, y_2; \dots \dots \dots : x_n, y_n$$

と書く。このとき比 $b = \sum_{i=1}^n y_i / \sum_{i=1}^n x_i$ は β の推定値と考えられるから、ブロック内の全材積の推定値は $b \sum_{i=1}^N X_i$ である。

ここでの我々の目的は不偏性の面から上記の推定値 b を研究することである。この論文ではストリップの抽出は全く無作為に行なうものとする。 b が不偏か否かを調べるためには、その期待値を計算しなければならない。これは二つの段階にわけて行なわれる。まず $x_1, x_2, \dots, x_n$ の値は何等かの方法で選ばれていて、固定されているものとする。従って b の値は y の値のみに依存する。 x の与えられた値、例えば x_1 に対して丁度1つの y_1 という対応する値がブロック内に存在することもあるが、一般には同じ長さ x_1 でも立木材積の異なる幾つかのストリップがある。標本

に含めるためこの群(group)からどのstripを抽出しても b の分母は一定であるが分子は変動するのである。これを固定したという仮定の下で計算した b の期待値は

$$(1) E(b|x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n E(y_i|x_i) / \sum_{i=1}^n x_i,$$

である。但し $E(y_i|x_i)$ は x_i が一定値であると仮定して計算した y_i の期待値である。明らかなように $E(y_i|x_i)$ は y の x に対する即ち材積のストリップの長さに対する回帰函数とよばれるものである。

$E(y|x)$ のグラフは殆んどいつも多少不規則であるといえる。しかし一方では、不規則な形の真の度数多角形の代りに回帰を表わす滑らかな曲線を用いると、極めて正確な結果の得られることが知られている。従って $E(y|x)$ は適当な次数の多項式

$$E(y|x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_sx^s$$

で表わし得ると仮定しても強ら不当ではなかろう。この式を(1)式に代入すると

$$E(b|x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{n A_0}{\sum_{i=1}^n x_i} + A_1 + A_2 \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i} + \dots + A_s \frac{\sum_{i=1}^n x_i^s}{\sum_{i=1}^n x_i}$$

が得られる。しかしこれは x の値を固定したという仮定のもとに計算した b の条件付期待値であって、計算の中間段階にすぎない。我々には x が無作為に選ばれたという仮定のもとで計算した絶対的な期待値が必要である。これは

$$(2) E(b) = A_0 E\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}\right) + A_1 + A_2 E\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i}\right) + \dots + A_s E\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^s}{\sum_{i=1}^n x_i}\right)$$

β の値は $E(\sum x_i / \sum x_i)$ の代りに $\sum x_i / \sum x_i$ が入るということを除いては(2)式と同じである。一般には前者は必ずしも後者と等しくないから b が不偏であるための必要十分条件は

$A_0 = A_2 = \dots = A_s = 0$ なることである。この条件は y の x に對

する回帰線が原点を通る直線

$$(3) \quad E(y|x) = A, x$$

であることを意味する。

(3)が満足されるか否かは実際における問題で、その権威ある解答は広範な調査データについて直接回帰を研究することによってのみ与えられるものである。これとともに注意しなければならないのは、(3)が普通に満足されると仮定できるためには、それが多数の地域について成立することが必要である。逆に少数の地域のみで(3)の真でないことが示されたなら、未知の地域の標本調査を行なう場合にそれを認めることは馬鹿気ている。

この点を研究するため、材積のストリップの長さに対する線型回帰方程式をBlacks Mountain実験林のノ5のブロックについて計算したところ、常数項が正または負の何れの場合もあり、絶対値は12から67の間にあったことがわかった。従って、ストリップの単位当り平均材積についての普通の推定値には、偏りがあるらしく思われるから、不偏推定値を導びく他の方法を探究することが妥当であるという結論が得られた。

5. ストリップの長さに対する材積の線型回帰にもとづく材積の最良線型不偏推定値

この節では上で考えたものの改良と考え得る林分の総材積即ち θ の推定法を提出する。新しい方法は θ の線型不偏推定値を用いるものである。この推定値の形を導びく為に、抽出される林分に対してある仮定を設けなければならない。そうして、もしこれらの仮定が実際において満足されないような場合には、新しい推定値が希望する不偏性の性質をもつとは限らない。

推定値 F を導びく為、標本抽出を行なう林分は次の条件を満足するものと仮定する。

(1)立木材積のストリップの長さ X に対する回帰は(近似的に)線型で

第10ブロック番号

ストリップ 番号	(2) 号	1		15		18		19		20	
		Σ	Y	Σ	Y	Σ	Y	Σ	Y	Σ	Y
1	12	762.4	0	300.7	8	286.0	2	34.4	2	104.8	
2	12	651.0	9	170.1	8	206.1	2	43.7	2	104.3	
3	12	461.4	9	210.7	8	319.0	2	33.3	1	20.7	
4	12	521.1	9	386.7	8	285.5	2	57.0	1	36.7	
5	12	652.7	7	246.7	8	282.4	3	89.1	1	56.1	
6	12	543.7	7	215.8	8	281.8	3	72.1	1	42.4	
7	12	541.5	7	248.4	7	218.8	3	43.0	1	22.9	
8	12	589.6	7	265.7	7	244.2	3	81.4	1	75.5	
9	11	532.6	7	392.4	6	171.7	3	91.0	1	62.5	
10	11	516.9	7	221.6	5	127.5	3	94.3	1	37.5	
11	11	517.5	7	268.4	2	58.4	3	141.4	1	40.8	
12	11	538.8	7	271.3	2	79.7	3	107.6	1	72.8	
13	10	508.6	7	279.0	1	28.0	3	108.8	1	34.5	
14	10	443.6	7	312.6	1	12.8	3	117.3	1	35.7	
15	10	492.5	7	303.2			3	122.3	1	22.3	
16	10	498.3	7	208.5			3	97.5	1	52.1	
17			7	301.1			3	126.8	1	37.0	
18			7	260.3			3	163.0	1	36.5	
19			7	258.5			3	111.7	2	61.0	
20			7	267.6			3	140.8	2	72.2	
21			7	256.0			2	87.9	2	95.1	
22			7	178.2			2	89.0	2	99.3	
23			7	242.9					2	77.8	
24			7	193.1					2	82.1	
25			7	147.8					2	66.7	
26			7	58.5					2	77.3	
27			7	36.7					2	68.5	
28									2	73.4	
29									2	31.5	
30									2	33.6	
31									2	44.5	
32									2	105.5	
Total	180	8777.2		6548.9	79	2703.1	60	2053.6	48	1877.6	

(2) ブロック内の

第1表 Blaks Mountain 実験林の15個のブロックに対する全林毎木のデータ ブロック番号

ストリップ 番号	1		2		3		4		5		6		8		9		12		13		14		15		18		19		20	
	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3
1	12	762.4	7	470.6	4	63.6	7	174.3	5	121.4	9	351.1	7	247.5	3	143.6	1	26.1	1	21.1	6	184.1	10	300.7	8	286.0	2	34.4	2	104.8
2	12	551.0	7	426.1	4	73.7	7	159.2	5	169.5	9	377.7	7	286.4	3	157.2	1	48.5	1	23.3	6	198.1	7	170.1	8	304.1	2	43.7	2	104.3
3	12	461.4	7	448.5	4	71.7	7	156.6	6	315.8	9	295.1	7	339.5	4	209.2	4	137.8	2	40.4	7	240.7	9	210.7	8	319.0	2	33.3	1	20.7
4	12	521.1	7	421.5	4	61.4	7	139.6	7	207.1	9	237.8	7	360.2	4	207.5	8	329.7	3	43.1	7	348.4	9	356.7	8	285.5	2	57.0	1	36.7
5	12	652.7	7	372.1	4	35.5	7	178.0	7	318.9	9	305.0	8	326.2	4	227.2	10	354.8	4	50.5	7	315.3	7	246.7	8	282.4	3	89.1	1	56.1
6	12	543.7	7	312.2	4	82.8	7	168.7	7	366.0	9	284.4	8	332.7	5	247.0	12	401.0	4	75.9	7	262.4	7	215.8	8	281.8	3	72.1	1	42.4
7	12	541.5	7	410.6	4	109.2	7	127.1	9	445.0	9	362.9	8	330.1	5	277.0	14	477.7	5	145.4	7	242.6	7	248.4	7	218.8	3	43.0	1	22.9
8	12	589.6	7	322.8	4	107.6	7	181.3	9	406.4	9	352.4	8	403.6	5	371.7	15	554.5	5	155.6	7	312.7	7	265.7	7	244.2	3	81.4	1	75.5
9	11	532.6	7	380.6	5	114.7	7	155.8	9	427.1	9	345.1	8	378.9	6	302.5	15	534.0	5	126.7	7	287.2	7	292.4	6	171.7	3	91.0	1	62.5
10	11	516.7	7	427.7	5	101.6	7	207.3	9	418.7	7	354.0	6	277.5	6	207.7	15	517.0	5	161.0	7	254.2	7	221.6	5	127.5	3	94.3	1	37.5
11	11	517.5	7	434.1	5	74.4	7	181.4	9	381.6	7	401.2	4	206.5	7	305.0	15	570.7	5	213.7	7	302.8	7	268.4	2	58.4	3	141.4	1	40.8
12	11	538.8	7	374.5	5	104.3	7	121.3	9	223.3	9	351.0	2	120.1	7	352.4	9	402.8	5	143.0	7	338.9	7	291.3	2	77.9	3	107.6	1	72.8
13	10	508.6	7	542.9	6	161.2	7	124.6	9	360.0	8	408.4	1	45.3	8	363.7	9	354.5	5	201.0	7	303.3	7	279.0	1	28.0	3	108.8	1	34.5
14	10	448.6	7	606.6	6	171.6	7	86.0	9	343.7	8	374.5			8	361.1	9	362.1	5	178.3	7	283.6	7	242.6	1	13.8	3	117.3	1	35.7
15	10	492.5	8	416.5	6	223.5	3	113.3			8	374.3			8	332.8	9	561.9	5	173.1	7	284.6	7	303.2			8	122.3	1	22.3
16	10	472.3	8	325.7	6	164.8	3	128.8			8	337.3			8	289.6	6	228.8	5	217.9	7	306.4	7	208.5			3	77.5	1	52.1
17																	6	245.5	5	276.8	7	278.4	7	301.1			3	126.8	1	37.0
18																	5	255.7	5	150.5	7	218.7	7	260.3			3	163.0	1	36.5
19																	5	244.8	5	157.5	6	230.6	7	258.5			3	111.7	2	61.0
20																	5	245.1	5	162.6	6	187.8	7	267.6			3	140.8	2	72.2
21																	11	248.0	5	140.7	6	189.4	7	256.0			2	87.7	2	95.1
22																	11	250.3	5	212.1	6	177.8	6	178.2			2	87.0	2	77.3
23																	4	200.4	5	142.8	6	124.6	6	242.9					2	77.8
24																	2	98.1	5	224.5	5	151.5	4	193.1					2	82.1
25																	2	151.8	6	174.0	3	109.2	3	149.8					2	56.7
26																	1	40.8	6	187.2	2	72.8	2	58.5					2	77.3
27																	1	45.8			1	31.5	1	36.7					2	68.5
28																													2	73.4
29																													2	31.5
30																													2	33.6
31																													2	44.5
32																													2	105.5
Total	180	8777.2	142	6755.4	76	1783.8	104	2425.3	109	4650.7	140	5522.2	81	3676.5	91	4136.4	191	2708.4	117	3861.1	165	6222.0	178	6548.9	77	2703.1	60	2053.6	48	1877.6

(2) ブロック内の北から南へ向ってつけた番号

(1) 固定された X に対する Y の変動性が正確にわかっている

しかしこの線型回帰直線が座標軸の原点を通るということとは仮定しない。これによって上に例示したように長に偏りがある場合でも F が不偏となり得るだろう。Markoff (5), (3) に従えば, (1) なる条件のもとで不偏であるような θ の線型推定値は無限に存在するということを容易に示し得る。それで, これらの中から標準誤差が小さくなるようなものを選択することが可能となる。しかしこれは, X の値が固定されているときの Y の変動性について何かわかっているときにのみ可能である。この論文ではこの点について (2) の条件を仮定することにするが, 実際においては, 一般にそれは全く不可能である。この点は更に sec. 6 において考察する。

そこで特別な値 $X_1, X_2, \dots, X_s$ をもつと仮定し得る真の変数又は非確率変数⁽³⁾ (sure or non-random variable) を考える。

X_i ($i = 1, 2, \dots, s$) のそれぞれの値に対応する N_i 個の数 $u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{iN_i}$ からなる有限母集団 π_i があると仮定する。また母集団 π_i の平均値 u_i は X_i の線型函数であると仮定する。即ち任意の i についてある未知の値 A, B の

$$u_i = A + B X_i$$

とする。

母集団 π_i のそれぞれについて, 非復元抽出でとられた n_i 個の個体からなる (但し $0 < n_i < N_i$) 無作為標本があるものとし, 抽出される u の値を $y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in_i}$ と書く。

もし立木材質のストリップの長さに対する回帰が線型なら, 全林分を推定する問題は

$$\theta = \sum_{i=1}^s N_i (A + B X_i) = A \sum_{i=1}^s N_i + B \sum_{i=1}^s N_i X_i$$

(3) これは, Fréchet によって考案された非確率数および非確率関数 (non-random number and non-random function) を表わす優れた仏語 "nombre certain" および "fonction certain" の英訳である。

を推定することと同じである。ストリップの長さ X は任意に選んだ原点から測定することができるから、一般性を失わずに $\sum_{i=1}^S N_i X_i = 0$ と仮定できる。従って $\theta = A \sum_{i=1}^S N_i = AN$ (例えば) となる。固定したそれぞれの i について y_{ij} に同じ重みをつけると、 θ の B.L.U.E は

$$(4) \quad F = \sum_{i=1}^S n_i \lambda_i y_i$$

と表わすことができる。ここで $y_i = \sum y_{ij} / n_i$ である。

この場合入は不偏性

$$(5) \quad E(F) = \theta$$

および最適性

$$(6) \quad \sigma_F^2 = \text{minimum}$$

の条件を満足しなければならない。

(5) の条件は λ が

$$(7) \quad \sum_{i=1}^S n_i \lambda_i = N \quad \sum_{i=1}^S n_i \lambda_i X_i = 0$$

となるように選ばれていれば (4) によって満足されることが容易に示せる。

ここで条件 (6) を考えることができる。いくつかの確率変数の線型函数の分散に対する一般公式から、 y_{ij} は y_{kl} と独立であるという事実から

$$\begin{aligned} (8) \quad \sigma_F^2 &= \sum_{i=1}^S \left\{ n_i \lambda_i^2 S_i^2 + n_i (n_i - 1) \lambda_i^2 E[(y_{ik} - u_i)(y_{il} - u_i)] \right\} \\ &= \sum_{i=1}^S \left\{ n_i \lambda_i^2 S_i^2 - \frac{S_i^2}{N_i - 1} (n_i^2 \lambda_i^2 - n_i \lambda_i^2) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^S S_i^2 \frac{n_i (N_i - n_i)}{N_i - 1} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^S A_i^2 \lambda_i^2 \quad (\text{例えば}) \end{aligned}$$

ここで S_i^2 は母集団 π_i の (S.D.)² 即ち

$$S_i^2 = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} (u_{ij} - u_i)^2$$

を表わす。更に (7) 式を満足するためには、(8) を最小にするように λ_i を選ばなければならない。

Lagrange の方法を用いて、 $0 < n_i < N_i$ および $A_i > 0$ なるとき

$$(9) \quad \lambda_i = \frac{n_i}{A_i^2} (\alpha + \beta X_i)$$

なることがわかる。

まずすべての $n_i < N_i$, $i = 1, 2, \dots, S$ と仮定する。そうすると α および β は (7) に (9) を代入して得られる。即ち

$$(10) \quad \begin{cases} \alpha \sum_i w_i + \beta \sum_i w_i X_i = N \\ \alpha \sum_i w_i X_i + \beta \sum_i w_i X_i^2 = 0 \end{cases}$$

但し簡単のために

$$(11) \quad w_i = \frac{n_i^2}{A_i^2} = \frac{(N_i - 1) n_i}{(N_i - n_i) S_i^2}, \quad \sum_{i=1}^S w_i = W$$

とおいた。

もし w_i を $X = X_i$ なるときの観測値の重みと考えるなら、次のように X の重みつき平均値および重みつき S.D. を導入するのが便利であろう。

$$(12) \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^S w_i X_i}{W}; \quad S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^S w_i X_i^2}{W} - \bar{x}^2$$

この記号を用いて (10) 式を書き直すことができ容易に

$$(13) \quad \begin{cases} \beta = -\frac{N \bar{x}}{W S_x^2} \\ \alpha = \frac{N(S_x^2 + \bar{x}^2)}{W S_x^2} \end{cases}$$

が得られる。これらの値を (4) に代入して簡単な変形をすると

$$(14) \quad F = N(\bar{y} - \bar{x} b_0)$$

が得られる。但し $\bar{y} = \sum w_i y_i / W$ で、 b_0 は B の不偏推定値を表わし

$$b_0 = \{ (1/W) \sum w_i X_i y_i - \bar{x} \bar{y} \} / S_x^2$$

が与えられるものである。

次の段階は σ_F^2 を計算することである。(8) に (9) を代入し (11) および (12) を用いると

$$\sigma_F^2 = W (\alpha + \beta \bar{x})^2 + W \beta^2 S_x^2$$

が得られる。結局 (13) を用いて

$$(15) \quad \sigma_F^2 = \frac{N^2}{W} \left(1 + \frac{\bar{x}^2}{S_x^2} \right)$$

となる。

任意に選んだ単位での与えられたストリップの長さを X で表わし、ブロック内のこれらの X の平均値を $\bar{X}$ とすると (14) および (15) は

$$(16) \quad \begin{cases} F = N \{ \bar{y} + b_0 (\bar{X} - \bar{x}) \} \\ \sigma_F^2 = \frac{N^2}{W} \left\{ 1 + \frac{(\bar{X} - \bar{x})^2}{S_x^2} \right\} \end{cases}$$

と書くことができる。

同様に n_i の一つが N_i に等しい、例えば $n_1 = N_1$ のような場合には

$$(17) \quad F = N \{ y_1 + \bar{b} (\bar{X} - X_1) \}$$

なることがわかる。

ここで

$$\bar{b} = \frac{\sum_{i=2}^S w_i (X_i - X_1) (y_i - y_1)}{\sum_{i=2}^S w_i (X_i - X_1)^2}$$

である。同時に

$$(18) \quad \sigma_F^2 = \frac{N^2 (\bar{X} - X_1)^2}{\sum_{i=2}^S w_i (X_i - X_1)^2}$$

である。上記の公式で X_1 は必ずしも X の最小のものを表わすものでなく、それらで $n_i = N_i$ となるものの一つを示すものであることを強調しておかねばならない。

n_i のよめるいはそれ以上が、それぞれ対応する N_i に等しいような場合を細かく考察する必要はない。回帰が厳密に直線であるという仮定と、例えば $n_1 = N_1$ および $n_2 = N_2$ なる仮定を一緒にすれば、ストリップの長さに対する材積の回帰が正確に知ることができて、誤差なしで θ の判定が可能であるという結論が導かれるであろう。回帰が直線であるという仮説は最良の場合でさえ近似的にのみ正しいという事実から、推定の誤差は必ず現れるし、従ってせいぜい一つの n_i が対応する N_i に等しくなるように抽出を行なうか、あるいはここで考えたものと異なる理論にもとづいて標本の統計的処理を行なうかの何れかが絶対必要となる。

6. S_i^2 に対する附加的な仮説

(11) によって定められる w_i についての公式 (16) は、 S_i^2 の値が未知であるということから実際において適用することができない。我々のなし得る最善は、 S_i^2 の値がどんなものであるかについて尤もらしい推量を行なうことである。これらの推量はせいぜい近似的に正しいという限定を受けているから実際に適用し得る θ の推定値は“近似的にのみ最良”なものとなる。しかし容易にわかる通りそれらの不偏性は保つことができる。

我々は S_i^2 の推測値を y_i^2 で表わすこととする。この値を (8) の S_i^2 のところに代入して、例えば

$$F_g = \sum_{i=1}^S n_i \lambda_i y_i$$

の不偏性と

$$\sigma_g^2 = \sum_{i=1}^S y_i^2 \frac{n_i (N_i - n_i)}{N_i - 1} \lambda_i^2$$

の最小値を保証するような λ_i' を求めるためのすべての計算を繰返さねばならない。

λ_i' の値は、それらが S_i^2 でなく r_i^2 に関係することを除けば、 λ_i のそれと同じ公式から求められる。結局 F_g は F と同じ形

$$(19) \quad F_g = N(\bar{y}' + \bar{b}'(\bar{x} - \bar{x}'))$$

で表わされる。ただ違うところは $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{b}$ がここでは別の重み

$$v_i = \frac{(N_i - 1) n_i}{(N_i - n_i) r_i^2} ; \quad V = \sum_{i=1}^s v_i$$

で計算されねばならないことである。

もし F_g の不偏推定値の形が F のと同じであっても、その標準誤差の二乗 σ_g^2 は更に複雑である。それを計算するには (20) に戻って、それに推定された重み v_i から得られる新しい λ_i' の値を代入しなければならない。即ち

$$\lambda_i' = \frac{N_i - 1}{(N_i - n_i) r_i^2} (\alpha' + \beta' X_i)$$

但し

$$(20) \quad \begin{cases} \alpha' = \frac{N}{V S_x'^2} (S_y'^2 + \bar{x}'^2) \\ \beta' = -\frac{N \bar{x}'}{V S_x'^2} \end{cases}$$

から

$$(21) \quad \begin{cases} \sigma_g^2 = \sum_{i=1}^s S_i^2 \frac{n_i(N_i - n_i)}{N_i - 1} \lambda_i'^2 \\ = \sum_{i=1}^s v_i p_i (\alpha' + \beta' X_i)^2 \end{cases}$$

を得る。ここで $p_i = S_i^2 / r_i^2$ である。

ここで $v_i p_i$ に等しい重みをもつ、もう一つの種類の X の重みづき平均値および重みづき (S.D.) の記法を導入すると便利である。それで

$$(22) \quad \bar{x}'' = \frac{\sum_i v_i p_i X_i}{\sum_i v_i p_i} \quad S_x''^2 = \frac{\sum_i v_i p_i X_i^2}{\sum_i v_i p_i} - \bar{x}''^2$$

と書くことにする。

(21) を展開し (20) を用いると

$$(23) \quad \sigma_g^2 = \frac{N^2 \sum_i v_i p_i}{V^2} \left\{ \left[1 + \frac{\bar{x}'(\bar{x}' - \bar{x}'')}{S_x'^2} \right]^2 + \frac{\bar{x}'^2 S_x''^2}{S_x'^2} \right\}$$

を得る。

公式 (23) は X がそれらの母集団平均値 $\bar{x}$ から測られている場合のものである。これを X がそれらのもとの値で与えられている場合に戻すには、 $\bar{x}'$ の代りに $(\bar{x}' - \bar{x})$ を、また $\bar{x}''$ の代りに $(\bar{x}'' - \bar{x})$ を入れなければならない。

従って

$$(24) \quad \sigma_g^2 = \frac{N^2 \sum_i v_i p_i}{V^2} \left\{ \left[1 + \frac{(\bar{x}' - \bar{x})(\bar{x}' - \bar{x}'')}{S_x'^2} \right]^2 + \frac{(\bar{x}' - \bar{x})^2}{S_x'^2} \cdot \frac{S_x''^2}{S_x'^2} \right\}$$

同様な手続きを $n_i = N_i = 1$ で $n_i < N_i$, 但し $i = 2, 3, \dots, S$, なる場合に適用すれば容易に

$$(25) \quad F_g = N \left[\bar{y}_1 - (X_1 - \bar{x}) \frac{\sum_{i=2}^s v_i (X_i - X_1)(y_i - y_1)}{\sum_{i=2}^s v_i (X_i - X_1)^2} \right]$$

および

$$(26) \quad \sigma_g^2 = N^2 (X_1 - \bar{x})^2 \frac{\sum_{i=2}^s v_i p_i (X_i - X_1)^2}{\left[\sum_{i=2}^s v_i (X_i - X_1)^2 \right]^2}$$

この公式は推論した S_i^2 の値の妥当性を検討するのに役立つ。入りの分子分母には同じ巾数の S_i^2 と r_i^2 の含まれることに気がつくであろう。我々が推測する必要のあるものはすべて S_i^2 に比例した数の組であって S_i^2 そのものではない。我々の問題は *Black Mountain* 実験林のデータについて、このような推測を二重に検討し、それらの中から一般に小さい σ_g^2 を与えるようなものを見出すことである。

オII未は 15 箇のフロックについて計算した S_i^2 の値とそれに

オ正数 S_i^2 の値

X_i	1		2		3		4		5		6		7	
7077	N_i	S_i^2	N_i	S_i^2	N_i	S_i^2	N_i	S_i^2	N_i	S_i^2	N_i	S_i^2	N_i	S_i^2
1														
2														
3							3	561	4	54	4	625		
4					2	46							14	1,027
5									2	578			3	647
6														
8													4	1,961
9					2	61	3	71	3	2,834	2	2,294	2	586
12	4	75	2	721			4	2,073	3	26	2	118		
13	2	1					2	515	13	1,781	2	44		
14											7	851	16	1,380
15											2	1,047	17	671
18	2	50	2	116									2	161
19			6	538	16	214								
20	16	261	16	534										
Total	24		26		20		17		20		17		53	
総計		191		529		662		830		1,370		814		1,026

X_i	8		9		10		11		12		15	
7077	N_i	S_i^2	N_i	S_i^2	N_i	S_i^2	N_i	S_i^2	N_i	S_i^2	N_i	S_i^2
1					4	525	4	82	8	2,894		
2	2	2,052	14	4,931								
3												
4												
5			8	4,028								
6	4	633	12	2,031								
8	5	879										
9	4	961										
12			4	6,989							4	387
13												
14												
15			3	2,832								
18	6	192										
19												
20												
Total	21		41		4		4		8		4	
総計		765		4,319		525		82		2,894		387

対応する X_i の値を表す。 $N_i = 1$ 即ち $S_i^2 = 0$ なる場合が少数ある。これらの場合は表に含めなかった。オ正数の S_i^2 の値を用い、また N_i の値の組を仮定してこれらのブロックの σ^2 を計算した。これらは各ブロックの全立木材質の最良線型推定値に対する真の (S.E.)² であるが、しかしそれらを標本データから計算することは不可能であろう。

σ^2 は S_i^2 に対する次のような推測を用いて計算した。

(1) これらは X_i と無関係である。

(2) これらは X_i に比例する。

(3) これらは $\sqrt{X_i}$ に比例する。

(1)を用い全ブロックごみで計算した比 σ^2/σ^2 は 0.770、(2)では 0.769、また(3)では 0.777 であった。平均的にいうと、 S_i^2 が X_i に比例するという推測の場合が一番 σ^2 の平均値が小さくなることがわかる。しかしこれらの三つの差がすべての実証的問題では無視し得るということは興味ある事実である。

σ^2/σ^2 のような比を幾つ最良線型不偏推定値 F と比較した F_2 の情報の量 (amount of information) ということがある。この概念は R.A. Fisher が導入したものである。ある場合には、この用法を正当化する次のような性質を有する。即ち F_2 を計算するための標本の大きさを n とするとき、もし最良線型不偏推定値 F を計算できれば、これと同じ精度の推定値が、大きさ $n\sigma^2/\sigma^2$ の標本から得られるであろう。

この論文で考察した範囲では、その様な状況は起らなかった。それでも比 σ^2/σ^2 は事柄を説明するのに便利なるものと思われる。

7. 9の位の推定方法

S_i^2 がわからないということだけが上の公式の適用を困難ならしめているのではないことが理解されるであろう。それとときに N_i の値に関連する問題が存在するのである。ここでは幾つかのブロックにおいて、また幾つかの異なるストリップの長さについて、

$N_i = 1$ となった。実際このことは $N_i \geq 2$ となるようにプロットの外周を定めれば避けられたであろう。しかし N_i がもっと小さくなることのある実際の状況に厳密に従う方が最良と考えられたのである。この様な場合我々は標本中には与えられた長さ、例えば X_i なるすべてのストリップが含まれるかもしれない。もしそのような標本に Y の X に対する回帰が厳密に直線であるという明白な仮定のもとに推論された上記の公式を適用すれば、あてはめる回帰直線が点 (X_i, Y_i) を通ることを断言することになる。厳密な直線性の仮定が正しくないことが明らかなであり、また長さ X_i のストリップを全部含めようとするのは、そのようなストリップが極く少数しかないときのみであるから、上述したやり方ではすべて最良の推定値に重大な不正確さが生ずるかもしれない。これを避ける一つの方法は、有限母集団から推論された公式を取扱うときには、注意の与えられた長さのストリップは決して全部含まれてはならないということである。

真の回帰点 (regression point) $(\bar{X}, \bar{Y})$ が実際直線上にないという事実は、同じ長さのストリップからなる母集団の有限性を考慮することが、有限な推定値の精度に有利か否かということとをあいまいにするものである。

前の章で我々は同じ長さのストリップの数は有限個しかないという仮定と、回帰が厳密に直線であるという不正確な仮定について検討した。この節で我々は、それによって σ^2 の仮定の不正確さの影響を減少するという見直しのもとに σ^2 の仮定を放棄することにする。

N_i が何れも無限であるという仮定は、 μ_i を推測する場合のみ用いるが、それによって重みも変わってくるであろう。公式(11)はこの場合には $w_i = \pi_i / S_i^2$ となる。もし更に $S_i^2 = X_i^2 / k$ と仮定すれば (但し k および k はある定数である、)

$$\bar{w}_i = \frac{k\pi_i}{X_i^2} \quad \bar{w} = \sum_i \bar{w}_i = k \sum_i \frac{\pi_i}{X_i^2}$$

で最良の推定値は

$$(17) \quad F = N \left[\bar{y} + \bar{x}_0 (\bar{y} - \bar{y}) \right]$$

となる。

F の標準誤差の二乗はここでも (16) と同じ形

$$(18) \quad \sigma_F^2 = \frac{N^2}{W} \left\{ 1 + \frac{(\bar{x} - \bar{x})^2}{S_x^2} \right\}$$

となって、豈うところは W , $\bar{x}$, および S_x^2 だけである。もし $k=0$ なら S_x^2 は定数と仮定できるから、

$$\bar{w}_i = k\pi_i \quad ; \quad W = k \sum_i \pi_i$$

で、記号 $\bar{x}$, $\bar{y}$ および S_x^2 はすべて普通の平均値および (S.D.)² の意味のものとなる。

$k=1/k$ 時に対する正確な公式は容易に導びけるであろうが、これらはあまりすっきりした形でない。しかし、もし必要が生じれば $\bar{w}_i = 1/X_i^2$ から出発して計算することができる。 k を除外しても F の形には影響がない。

N_i が有限であるという正しい仮定と、回帰が厳密に直線であるというもう一つの不正確な仮定とを組合せた方が、二つの不正確な仮定を組合せるよりも優れているかどうかという問題は、Sec. 9 の抽出実験で研究することにする。

8. σ^2 の不偏推定値

数の系列 (system of numbers) が S_i^2 に比例するという推論が成功する見込みがないわけではないが、それにもかかわらず S_i^2 の実際の値を推論しようとするのは全く望みがない。従って標本から F の精度のある種の測度を求める必要があれば、我々は σ^2 の推定値を計算しなければならない。

我々は、 Y の X に対する回帰が厳密に直線で、 S_i^2 は X_i^2 に比例しまた N_i がすべて有限であるという仮定のもとにこの問題を取扱うことにする。これらは $(N_i - 1)/(N_i - \pi_i)$ なる比によって公式中に入ってくるということがわかるであろう。もし N_i が無限とい

う仮定のもとに公式を導く必要があるれば、この比を 1 で置きかえればよい。勿論記号 k はいつも定数であることを注意しなければならない。実際のフロックのストリップ数を表わすから、 k が無限であるという仮定によって影響されない。

これらの仮定のもとに

$$E(y_i) = A + Bx_i$$

$$\sigma_{y_i}^2 = E(y_i - A - Bx_i)^2 = S_y^2 = kx_i^2$$

但し、 y のある値は正確に推測できると仮定するが、明確に規定する必要はない。また k は未知の比例定数である。従ってこの y の標準誤差の二乗は

$$(29) \quad \sigma_{y_i}^2 = \frac{S_y^2}{n} \frac{N_i - n_i}{N_i - 1} = k \frac{x_i^2 (N_i - n_i)}{n_i (N_i - 1)}$$

であることがわかる。

(29) 式の右辺は我々が前に w_i で表わした観測値の $x = x_i$ における重みの逆数に等しい。

上で我々は、 F を与える公式は w_i の値と無関係であるが、 w_i の間の比には関係することを注意した。言い換えれば、もし未知の定数 k を省略して、この比を w_i と書けば、

$$(30) \quad \frac{n_i (N_i - 1)}{x_i^2 (N_i - n_i)} = w_i$$

となって、これは既知の値しか含まれていない。そうしてこれらを新しい重みとして用いると、 y の重みの大きさと全く同じ F の値が導かれる。ここでは重みの定義を変えて公式 (30) を用いると都合がよい。この新しい意味の w_i を用いると (29) は

$$\sigma_{y_i}^2 = k/w_i \text{ と書ける。}$$

更に我々は、少なくとも 1 つの観測値をもつような x_i の数を記号 m で表わすことにする。換言すれば、 m は標本内のストリップの異なる長さ (different lengths) の数でこれはまたそれをもとにして計算しようとしている異なる y_i の数でもある。

ここで F の標準誤差の二乗を与えている (6) の公式をふりかえってみよう。又おまけ S_y^2 は未知の比例定数 k と無関係であるのに、 y の重みの合計 W はそれと関係していて、かつ新しい w_i の意味を用いると、

$$W = \frac{1}{k} \sum_i w_i$$

であることがわかる。従ってこの場合 σ_F^2 は

$$(31) \quad \sigma_F^2 = \frac{k N^2}{\sum_i w_i} \left[1 + \frac{(\bar{x} - \bar{x})^2}{S_x^2} \right]$$

と書くべきである。そうして σ_F^2 を推定するには、 k の推定値を求めれば十分である。 k の不偏推定値は、Markoff の定理 (3) の σ^2 の部分を適用するだけで容易に求められる。これによって、自由度 $m - 1$ の自由度にもとづく k の不偏推定値は、

$$(32) \quad \sum_{i=1}^m \frac{[y_i - \bar{y} - d_0 (x_i - \bar{x})]^2}{m - 1} w_i$$

で与えられる。ここで $\bar{y}$ 、 $\bar{x}$ おまけ d_0 は N_i おまけ y に対して与えた仮定に従って計算される。しかし推定値 (32) は、そのもととなる自由度が非常に小さいためあまり正確でないことが予想される。

k のもっと良い推定値を求めるため、まず観測によって、(32) の分子と似ているが、特定の y_i にはつきり依存する和、即ち、

$$S_0^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} [y_{ij} - \bar{y} - d_0 (x_i - \bar{x})]^2 \frac{w_i}{n_i}$$

の期待値を計算することから始める。もし N_i が有限なら y_{ij} と y_{ie} は従属であるから、Markoff の定理は S_0^2 に適用できないことがわかる。

記法

$$y_{ij} = y_{ij} - A - Bx_i$$

$$y_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} = y_i - A - Bx_i$$

を導入する。多少長い計算が必要であるが、結局に S_0^2 が

$$S_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \frac{w_{ij}}{n_i} y_{ij}^2 - \left(\sum_{i=1}^m w_i \bar{y}_i \right)^2 + \frac{1}{S_x^2} \left[\sum_{i=1}^m w_i (x_i - \bar{x}) \bar{y}_i \right]^2}{\sum_{i=1}^m w_i}$$

の形に書き直せることがわかる。これは期待値を求める計算に最も便利な形である。

まず

$$E(y_{ij}^2) = k x_i^2$$

$$E(y_{ij}^2) = \sigma_{y_{ij}}^2 = \frac{k}{w_i}$$

なることがわかる。

更に $i \neq j$ に対して y_{ij} と y_{ji} とが互いに独立なら、 y_{ij} と y_{ji} も独立である。故に、

$$E(y_{ij} \cdot y_{ji}) = 0 \quad i \neq j$$

結局

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^m w_i y_{ij}^2\right) &= E\left(\sum_{i=1}^m w_i^2 y_{ij}^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^m w_i^2 E(y_{ij}^2) = k \sum_{i=1}^m w_i \end{aligned}$$

となる。

同様に同じ理由から $E\left(\sum_{i=1}^m w_i (x_i - \bar{x}) y_{ij}\right) = k S_x^2 \sum_{i=1}^m w_i$ したがって

$$E(S_0^2) = k \left[\sum_{i=1}^m \frac{n_i(N_i-1)}{N_i - n_i} - s \right]$$

であるから比

$$(33) \quad \frac{S_0^2}{\sum_{i=1}^m \frac{n_i(N_i-1)}{N_i - n_i} - s} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \{y_{ij} - \bar{y} - \bar{y}_i(x_i - \bar{x})\}^2 \frac{w_{ij}}{n_i}}{\sum_{i=1}^m \frac{n_i(N_i-1)}{N_i - n_i} - s}$$

は k の不偏推定値である。すべての $n_i = 1$ またはすべての N_i が無限大である場合には、(33) の分母は S_0^2 の自由度 $\sum n_i - s$ に等しくなる。この数値の差が大きい小さいかは $(N_i - 1)/(N_i - n_i)$

の比によってきまる。我々は多くの実際問題ではそれが小さいと期待できる。

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^m w_i}$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^m w_i (x_i - \bar{x}) \bar{y}_i}{S_x S_y}$$

と書くことにする。

これから、

$$S_0^2 = \sum_{i=1}^m w_i S_y^2 (1 - r^2)$$

となる。この公式を (33) に代入しその結果を (31) 式の k のところに代入すれば結局

$$(34) \quad \mu_F^2 = N^2 \frac{S_y^2 (1 - r^2)}{\sum_{i=1}^m \frac{n_i(N_i-1)}{N_i - n_i} - s} \left[1 + \frac{(\bar{x} - \bar{x})^2}{S_x^2} \right]$$

を得る。

n_i の一つが対応する N_i に等しい場合、例えば $n_i = N_i = 1$ なるときも同じ方法で取扱える。(18) 式と上で用いた記号から、

$$\sigma_F^2 = k \frac{N^2 (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=2}^m w_i (x_i - x_1)^2}$$

と書くことができる。

σ_F^2 の不偏推定値 μ_F^2 の式がこれと違っているのは、それには未知の定数 k の代りにその不偏推定値が含まれている点である。この推定値を求めるため、

$$k_0 = \frac{\sum_{i=2}^m w_i (x_i - x_1) (y_i - y_1)}{\sum_{i=2}^m w_i (x_i - x_1)^2}$$

を用いて、上と全く同様にして

$$S_0^2 = \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{n_i} \left[y_{ij} - \bar{y}_i - d_0 (x_i - \bar{x}) \right]^2 \frac{w_i}{n_i}$$

の期待値の計算を始める。

σ_F^2 の不偏推定値は

$$(35) \quad \mu_F^2 = \frac{S_0^2}{\sum_{i=2}^m \frac{n_i(N_i-1)}{N_i-1}} = \frac{N^2 (x_1 - \bar{x})^2}{\sum_{i=2}^m w_i (x_i - x_1)^2}$$

である。 μ_F^2 の自由度は

$$f = \sum_{i=2}^m n_i - 1$$

である。

9. これまでの理論の経験的な検証

どのような数学理論の応用でも、研究している現象に対する正確には正しくないある種の仮定が含まれる。理論からの予想が現実と比較し得るという希望を妥当ならしめるためには、経験的な検討を行なって、現実において普通に現れるような、理論の根拠をなす仮定とのくい違いが、与えられを理論の研究に著しい影響を及ぼすか否かということ調べなければならない。この章での我々の目的は、このような違いが理論の適用性に影響を与えるかどうか、またそれはどの程度のものであるかどうかということの検討である。この目的のためには、理論の可能と思われる更に重要な用法を列挙することが有用であろう。

次の点として、未知の立木材積 θ を推定する最良線型 推定値 F の精度の尺度である標準誤差 σ_F の選択を考える。もしすべての仮定が正しく、標本の大きさ $\sum n_i$ が適当でありさえすれば Liapounoff の定理によって

$$(36) \quad (F - \theta) / \sigma_F$$

の度数は、S.E.=1 で θ のまわりに、非常に正規に近い形で分布することが保証される。

もし、これが実際に正しければ、 σ_F の値は色々な推定値の中

から選択を行なうための妥当な一つの基準を与えるものである。しかし、理論のもととなる仮定と現実とのくい違いは容易に F に偏りを導くものであり、また上記の σ_F の重要な性質を失なわせるものである。

故に我々は、まず実際において現れるような条件のもとで抽出を繰返えすとき、(36) の比が本当に正規法則と対比し得る形で分布するかどうかを調べなければならない。Blacks Mountain 実験林の 100% 調査のデータはこの検討資料を与える。

理論の σ_F の応用は、 μ_F の用法に関するものである。 μ_F を計算する目的は、標本から得られた F の値の精度の特徴を示すためである。このための最も適切な方法は θ の信頼区間 (confidence interval) を計算することである。これは

$$(37) \quad F - t_{\alpha} \mu_F \leq \theta \leq F + t_{\alpha} \mu_F$$

なる形 (5) のものである。但し、 t_{α} は μ_F の自由度および選ばれた P の値に従って定められる "Student"-Fisher のものである。信頼区間はもしそれが多数の標本から計算されるなら、 θ の真値が $F \pm t_{\alpha} \mu_F$ なる限界内にある頻度は信頼係数 (confidence coefficient) として定義される $\alpha = 1 - P$ という値に近づくという性質をもっている。

列挙した色々な仮定を別にすれば、もし θ の分布が正規なら、上記の信頼係数に関する論述は全く正しい。標本の大きさがかなり大きいという条件があれば、Kozakiewicz (6) の定理の結果として y_{ij} の分布が正規でない場合にも同じ論述が近似的に成立する。上記の理論を適用すべき場合においては、これらのすべての仮定は満足されない。それでも信頼区間の公式は非常に役に立つであろうが、しかしこれを用いるには幾つかの経験的な根拠を求めなければならない。検討すべき最も重要な点は、比 (37)

$$(38) \quad t = (F - \theta) / \mu_F$$

が抽出を繰返えした場合、"Student" の分布として知られている理論的な分布に十分近いものに従うか否かである。もしこの後

幾何分布が "Student" の法則に近づくなら、(97) の形の θ に関する論述が正しい回答は、置かれたものに近似的に近づく。そこでこの並べかえを。

この実験での n_i は粗表に示した組わけに従って固定された。且しすべての X_i が標本に含まれる機会は一様であり、また n_i は殆んど全く θ と比例していて後者の約 5 倍である。任意のストリップ群から n_i 個のストリップを抽出するには乱数表 [7] を用いた。15 個のアロックに均等に分布する全部で 150 個のアロックの標本が抽出された。

すべての $n_i < N_i$ なる場合の標本は 95 個ある。これらに対して、 F を計算するために公式 (19) を用い、また S^2 はすべてのストリップ長さについて一定であるという推測のもとに、 θ^2 を公式 (24) から求めた。比 (26) が 0 のまわりの $S.E. = 1$ で正規に分布しているという仮説のもとに、もし仮説が真なら、観測値が任意の特定の区間に落ちる確率が 0.05 に等しくなるように、(26) の可能な値の受動範囲を 20 個の区間に分割した。従って、95 個の標本について期待される各区間の頻度は 4.75 である。観測された頻度を対照表に示す。

観測された分布と仮説の分布との一致は、適合度 (*goodness of fit*) の 4 次の平滑性検定 (*fourth order smooth test*) によって検定される。この検定は "平滑 (Smooth)" ということのある仮説的分布からの偏りに対して特に鋭敏になるよう計画されている。それをここで用いた理由は、もし比の実験の分布が正規または "Student" の分布と著しく違つて見えられても、この実験の分布を見わす曲線は、多分単一のモード (*mode*) をもち、また仮説的な曲線と小数の段で交るような "平滑な" 曲線であろうと思われるからである。この様な場合には、普通の χ^2 検定より 4 次の平滑性検定がより有効であるという実験的な根拠がある [9]。

4 次の平滑性検定で用いた検定基準を $\chi^2_{(4)}$ と書く。検定される仮説が真なら、 $\chi^2_{(4)}$ は近似的に自由度 4 の χ^2 分布に従う。 $\chi^2_{(4)}$ の

オ III 表

抽出実験に対する n_i の組

アロック	X_i	N_i	n_i	アロック	X_i	N_i	n_i	アロック	X_i	N_i	n_i	アロック	X_i	N_i	n_i
1	10	4	1	8	1	1		13	1	2		18	1	2	
	11	4	1		2	1			2	1	1		2	2	1
	12	3	2		4	1	1		3	1			5	1	
					6	1			4	2	1		6	1	1
計		16	4		7	4	1		6	2			7	2	
2	3	2	1		8	5	1		5	18	4		8	6	2
	9	14	3												
計		16	4	計		13	3	計		26	6	計		14	4
3	4	3	2	9	3	2	1	14	1	1		19	2	6	1
	5	4	1		4	3			2	1	1		3	16	4
	6	4	1		5	3	1		3	1					
					6	2	1		5	1		計		22	5
計		16	4		7	2			6	7	2	20	1	16	4
					8	4	1		7	16	4		2	16	4
4	3	2	1												
	7	14	3	計		16	4	計		27	7	計		32	8
計		16	4	12	1	4	1	15	1	1					
					2	2	2		2	1					
					4	4			3	1	2				
5	5	2	1		5	3	1		4	1					
	6	1			6	2			6	2					
	7	3	1		8	1									
	9	8	2		10	1	1								
計		14	4		12	1			7	17	4				
					14	1									
					9	4	1		9	3	1				
6	8	4	1		15	4	1		10	1					
	9	12	3												
計		16	4	計		27	7	計		27	7				

オ 五 表 重 R の仮定のもとに計算された $(F-0)/0F$ および $(F-0)/1F$ の頻度分布⁴⁾

仮定: ストリップの母集団は有限				仮定: ストリップの母集団は無限		
$(F-0)/0F$		$(F-0)/1F$		$(F-0)/1F$		
すべての n_k	1つの $n_k = N_k$	すべての n_k	1つの $n_k = N_k$	すべての n_k	1つまたはそれ以上の $n_k = N_k$	計
5	1	4	9	3	4	7
3	1	5	1	4	2	6
5	2	6	2	7	2	9
8	1	4	0	2	1	3
3	2	4	2	5	4	9
4	2	5	3	4	3	7
5	1	6	2	6	0	6
3	2	4	2	5	4	9
3	2	5	2	8	2	10
7	0	6	1	5	3	8
1	0	3	0	4	0	4
4	1	3	0	4	4	8
6	1	5	2	7	5	12
5	1	6	3	3	7	10
5	1	6	1	7	1	8
2	1	6	3	9	5	14
5	2	8	4	6	1	7
4	6	5	3	4	0	4
10	1	3	2	2	6	8
4	6	1	2	0	1	1
計 95	44	95	44	95	55	150
$\bar{X}$ 1.376	33.812	5.463	13.091	9.055	2.572	8.764
P .85	<.01	.25	.01	.01	.63	.09
P _{tot} .57	<.01	.63	.09	.18	.12	.21

4) 等確率の20区間による。

計算は次のようにして行なう。

X を確率変数とし、 X の分布が完全に指定された函数 $f(x)$ で与えられるという仮説を H_0 と書く。 X の変動範囲は $25=20$ 区間即ち

$$(-\infty, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_{19}, +\infty)$$

に分割されるから、もし H_0 が真なら、これらの任意の区間に X が落ちる確率は正確に 0.05 に等しい。このような細分は確率 $f(x)$ に対する適当な表から容易に行なうことができる。これらの区間に對して、その k 番目の区間に対する値が、

$$Z_k = \frac{zk-1}{45} - \frac{1}{2} = \frac{z(k-5)-1}{45},$$

$$k = 1, 2, \dots, 25$$

となるように変量 Z を与える。もし我々が点 a_5 から出発し、区間を右および左に出てゆけば、対応する Z の値が、

$$Z = \pm \frac{1}{45}, \pm \frac{3}{45}, \dots, \pm \frac{25-1}{45}$$

となることがわかるであろう。

次に変数 Z に対する為数を X の観測値 $x_1, x_2, \dots, x_n$ のものにおきかえる。もし任意の値 x_m が k 番目の区間 $a_{k-1} < x_m \leq a_k$ に落ちるとすれば、これは値 Z_k を作り出した X の観測値であると解釈する。区間 (a_{k-1}, a_k) に落ちる観測値 X の数を n_k とし、また Gauss の記号 $[Z^i]$ は

$$[Z^i] = \sum_{k=1}^{25} n_k Z_k^i$$

を表わすものとする。4 次の平均性検定を適用するためには、このような和を $i = 1, 2, 3, 4$ について計算しなければならぬ。そうしてこれらを、 X の範囲を細分した区間の数が $25=20$ に等しいという仮定のもとに導かれた下記の方程式に代入する。

$$\chi^2 = n^{-1} (3.463, 440 [Z])^2$$

$$u^2 = n^{-1} (13.500, 884 [Z^2] - 1.122, 261 n)^2$$

$$u_2^2 = \pi^{-1} (53.857, 548 [Z^2] - 8.031, 507 [Z])^2$$

$$u_3^2 = \pi^{-1} (218, 143, 007 [Z^4] - 46, 237, 587 [Z^2] + 1137, 500 \pi)^2$$

最後に $u_4^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_5^2$ である。もし計算した u_4^2 の値が選ばれた有意水準に対応する自由度4の χ^2 値の値を超過すれば検定した仮説は棄却すべきである。⁽⁵⁾

オメガ表は観測された分布と期待された分布とが非常によく一致することを示しており、標本を抽出の誤差のみからこれだけの誤差の生ずる確率は0.85 となっている。次々の区間の組を全部で10個の区間ができるように組合せた χ^2 検定の対応する値は、0.57 である。

一つの $n_i = N_i = 1$ となるような場合の標本は44個ある。これらの標本について公式(25)からFの値を計算し、再び S^2 の値がアロックス内のすべてのストリップの長さにならって一定であるとして、公式(26)から OF^2 の値を計算した。この場合にはオメガ表に示した期待値からの偏差は、偶然のみによるものとしては大きすぎる。これらの結果は χ^2 検定によっても与えられるが、それによれば $Z^2 = 25.091$ で $P < 0.01$ (但し自由度は9)である。

仮定の一つが、ストリップの母集団が有限である場合にこれらの結果から導かれる結論は、アロックス周囲をすべての $N_i \neq 1$ となるように決定するか、あるいはそれができなければ、 n_i の組を $N_i = 1$ なるストリップから抽出が行なわれないように定めるべきであるということになる。対応する n_i が1に等しいか、または大きいとき、幾つかの n_i が0に等しくなるということは、理論の由

(5) 上記の4の式はもとの平滑性検定の論文のものとは少し違っている。それは後者の検定が群わけをしない観測値についてのみに適用するように計画されているからである。ここにあげた公式は、はじめにプリントの形で出た *Statistical Laboratory of the University of California* のサメストから得たものである。

もし区間の数 $2S$ が増せば、群わけしたデータに対する公式が群わけしない場合のものに近づくことが容易にわかる。

きにして大きい影響を与えない。前に説明した $n_i < N_i$ なる標本に対する検定において、公式(29)および(24)に用いた N はいつもアロックス内のすべてのストリップを考えているのもあって、特定の長さ N_i のストリップの幾つかがある標本中には現れないという事は考慮しないのである。

同じ標本を用い、自由度を考慮に入れて、上に述べたのと平行な論法によって、 $(F-0)/nF$ の分布を "Student-Fisher" の分布と比較する。

OF^2 の推定に用いた公式、即ち u_4^2 の推定に用いた公式は(30)および(35)である。但し前者ではすべての $n_i < N_i$ であり、後者では一つの $n_i = N_i$ である。0の推定値、例えばFは、前に計算したものと変りはない。

オメガ表の平滑性検定で判定するとき、理論のこの χ^2 の適用によって得られた結果から、理論の χ^2 の適用から得られたものと同じ結論、即ちストリップの母集団が有限であるという仮定のもとでは如何なる n_i も抽出し置してはならないということが導かれる。

一つの $n_i = N_i = 1$ となっている標本に対する $(F-0)/nF$ の観測された分布に χ^2 検定を適用しても、この分布が "Student" の法則に従うという仮説が棄却されないということは興味ある事である。この場合の範囲は等確率の10個の区間に分割され、得られた χ^2 の値は15.091であった。これは自由度9では0.07 のオーダーのPを与える。

(36)の比はストリップの母集団が無限であって、一つの $n_i = N_i$ であるという仮定のもとでは決定することができない。それは S^2/n^2 の値がこのようなストリップでは求められないからである。このような仮定のもとでは、この研究で推論した公式によって u_4^2 を計算することは不可能であるから、理論の χ^2 の用途は除外しなければならない。しかし、 OF^2 の推定値は標本から計算することができるから比(30)が決定される。

推定値は $m_i = n_i$ において公式 (2) から計算された。これと同じ公式は、一つもしくはそれ以上の N_i が抽出し盡くされても盡されなくても適用できる。フロック15からの各標本とフロック17からの1標本は一つもしくはそれ以上のストリップ長さを抽出し盡しているから、これらの推定値はこれまでの仮定のもとでは計算できない。しかし、ここでいまの仮定を用いれば求めることができる。推定値 M_i^2 は、 S_i^2 がすべてのストリップ長さに対して一定であるとし、 $m_i = n_i$ とおくことによって (3) 式からすべての標本について求められる。一つまたはそれ以上の N_i が抽出し盡されたということによって、そのような標本に対する手続がどのような形においても変化することはない。表IVのすべての $m_i < N_i$ なる場合について χ^2 検定から得られた $P=0.06$ なる値は、観測された分布と期待された分布との一致は、それが緊密なものでないにせよ受け入れ得るものであることを示している。データーを10個の級に再組わけして、 χ^2 検定を適用すると自由度9について $P=0.18$ を得る。

一つもしくはそれ以上の $m_i = N_i$ となっている標本の $(\sum m_i)/M$ の分布に χ^2 検定を適用すると、期待値との対応が良好であることが示される。この結果は前の表での対応する結果と著しい相違をなし、また与えられた長さのストリップの数が有限であるという仮定を放棄することによって回帰が正しく直線であると仮定するほどの誤差がある程度認められるという直観的な考察にもとずいて、前にオク章で説明した考えを支持するものである。これらの観察にもとずいて、もし抽出において与えられた長さのストリップの数が盡されるなら、有限性の仮定は除くべきであり、また標本推定値は、すべての N_i が無限という仮定から導かれた公式で計算する¹⁾ という結論をつけ加えることができる。

ここで、すべての $m_i < N_i$ となっているような標本の統計的処理をどのようにするかという疑問、即ち、有限母集団の仮定で導かれた公式を用いるか、あるいは無限母集団の仮定で導かれた

公式を用いるかという問題が残されている。最終的な選択は、信頼区間の相対的な大きさによるのが最も良い。すべての $m_i = 1$ の場合、推定値は何れの仮定を用いても同一である。全フロックをこみにして推定すると、有限母集団の推定値は100試行のうち、95回が0の5.5%以内を集める。一方無限母集団推定値での対応する率は6.0である。従って、すべての $m_i < N_i$ なるときには N_i が有限であるという仮定を用いる方がよい。

ここで考察した抽出方法は、制限つき無作為抽出法 (*restricted random sampling*) とよばれるものである。この制限は、同じ大きさの抽出単位をまとめて群わけし、それらの幾つかの群を無作為に抽出してから、 N_i 個の群から無作為に m_i 単位を抽出することだけである。同じ大きさのストリップはフロック内で非常に近くにある場合が多い。そのようなとき、ここで考察した制限抽出は、標本内の要素がフロックの地域上に多少とも一様に分布することを保証するであろう。

10. 要 約

幾つかの森林標本調査法と標本の統計的処理方法を考察した。Blacks Mountain 実験林の全林毎木のデーターを用いて、実際の場合のこの方法の検討を行なった。

材積のストリップ長さに対する変型回帰が座標軸の原点を通らない限り、矩形でないフロックからとったストリップ標本を用いて推定を行なう通常のやり方では偏りのある推定値が得られることがわかった。そうしてこの条件を仮定することは危険であることがわかった。その結果、この制限を受けないような推定法を考察した。

最良変型不偏推定値に対する適切な公式が次の仮定の色々な組合せのもとに推論された。

- (1) 立木材積のストリップ長さに対する回帰は厳密に変型であるが、座標軸の原点を通ることもありまた通らないこともある。

(2) ストリップ上の立木材量の (S. D.) の値は、

- (a) 異なるストリップ長さに対しても一定である。
- (b) ストリップの長さに比例する。
- (c) ストリップの長さの平方根に比例する。

(3) 各プロット内の与えられた長さのストリップ数は、

- (a) 有限である
- (b) 無限である。

仮定 (b) は、それが誤りであることがわかっていても、他の誤った仮定、例えば回帰の厳密な直線性を補償する傾向があるという直観的な考慮にもとづくものである。

(2) の (b) の仮定は、(a) または (c) の何れよりも好ましい結果を与えることが、経験的にわかった。しかしこの利益は僅少であるから、着者の考えでは、計算の簡単な (b) の仮定を用いる方が賢明であると思われる。故に他のすべての計算はこの仮定にもとずいて行なった。

正規理論の正当性に影響を与える理論の仮定と現実との不一致を標本の小ささ、いということと相合せるとき、正規理論の正当性が影響を受けるかどうかを検討するため、広範な抽出実験を行なった。

与えられた長さのストリップが標本に蓋されなければ、いつでもこのようなストリップの母集団が有限であるという仮定でも無限であるという仮定でもともに満足な結果が得られ、またそれから導かれる分布も正規理論から定められるものと類似することがわかった。しかし同じ長さのストリップの母集団は有限であるという正しい仮定によれば、信頼区間がより狭くなることが証明された。結局、プロット内の任意の与えられた長さの全ストリップが標本内に蓋されない場合にはいつでもこのようなストリップの数に対する真の仮定を用いるべきである。従って有限母集団に対する重みを採用した公式 (19) および (34) が適切である。

標本が与えられた長さのストリップを蓋さない場合には、この

ようなストリップ数が有限であるとする取扱いと、立木材量のストリップ長さに対する回帰が線型であるという不正確な仮定とを結びつけば、統計量の実際の分布と正規理論のものとの間に著しい不一致が生ずる。この不一致は、与えられた長さのストリップ数が無限であるという仮定に従って、公式 (27)、(34) で計算した統計量には存在しないことがわかった。これは、与えられた長さのストリップを標本に蓋すべきでなくもしそれが不可能なら、与えられた長さのストリップ数は無限であるという仮定にもとづく公式を使用しなければならないという結論を示している。

得られた公式は、ストリップばかりでなく、ラインプロットに対してもよくあてはまるものである。標本の平均ストリップ長さが母集団平均に近いとき推論した公式に対する最も有効な標本調査が得られるが、その場合標本のストリップ長さ間の変動は最大となる。

参考文献

- [1] A. A. Hasel. *Jour. Agric. Res.* Vol. 57 (1938) P. 713
- [2] J. Neyman. *Lectures and Conferences on Mathematical Statistics*. Washington, D. C. (1937)
- [3] F. N. David and J. Neyman. *Stat. Res. Mem.* Vol. 2 (1938) P. 105
- [4] F. N. David. *Stat. Res. Mem.* Vol. 2 (1938), P. 69
- [5] J. Neyman. *Reg. Stat. Jour.* Vol. 97 (1934), P. 558
- [6] W. Kozakiewicz. *Ann. Soc. Polon. Math.* Vol. 13 (1934) P. 24
- [7] L. H. C. Tippett. *Random Sampling Numbers*. Tracts for computers. No. 15 Cambridge Univ. Press (1927)
- [8] J. Neyman. *Skand. Aktuar. Tidsskr.* (1937) P. 149
- [9] J. Neyman. *Ann. Math. Stat.* Vol. 11 (1940), P. 478

森林標本調査における周辺 効果にもとづく偏りの除去 について

The elimination of bias due to edge-effecte in forest
sampling.

By, D.J. Finney and H. Palca

(Forestry Vol.23 1949 より)

森林標本調査における週辺効果にもと づく偏りの除去について.

The elimination of bias due to edge-effect
in forest sampling (Forestry, vol. 23 (1949.5.11))

By D.J. Finney and
H. Palca

1. 緒 言

立木枚数推定、あるいは林の他の任意の計量的特性を推定するた
めの森林標本調査において、推定値に偏りの生ずる危険を冒さない
為には、個々の抽出単位の位置を定める規則を慎重に定式化するこ
とが最も必要である。基準となる原則は、各単位の層化あるいは層
化なしの独立な無作為抽出または、最初の単位の位置が無作為に選
ばれるとき他のすべての単位が直ちに定まるような系統的な単位の
配置形式を用いることであろう。⁽¹⁾ 適切な規則が厳密に守られ、
ば、これらの方法はどれも林の客観的標本を与えるから、結局平均
的にいって要求された測定値の推定値は真の値と同じものになるで
あろう。この推定値は不偏 (*unbiased*) である。一方もし調査者
が自分の個人的な好みや便宜のために抽出単位の位置を変更するこ
とを認める場合には、重大な偏りを生ずるおそれのある、主観的な
要素が導入される。

最も単純な客観的標本でさえ林縁でのとり扱いに多少の不便を生
ずることを免れない。無作為抽出でも系統的抽出でも一般には抽出
単位の中心を選ぶ規則が含まれるものである。また林のすべての部
分が十分代表されることを保証するには、単位はその中のいずれか
の部分か林内にあるようなすべての中心に対して測定しなければなら
ない。林縁に近い中心は林縁に重なっている単位と対応できなかった
林縁から僅か外側にある中心でさえ、その単位の一部が林内に含ま

れるかも知れない。これらの単位を除外することは、林縁に近い木が標本で代表され難くなる (*under-representation*) という結果を招来する。従つておそらく偏りのある推定値が導かれるであろう。例えばもし抽出単位が半径 R の円であれば、全標本は中心が林内または林をとりまく幅 R の *strip* 内にあるという規則に従つて定められるすべての円から導びかねばならない。勿論エーカー当りの立木本数または材積の推定値は林内にあるこれらの単位もしくは単位の一部からのみ求められる。

大面積の一つだけの林では、中心を林の外側にもつような抽出単位が現れるという不都合は時折しか起らないから、多数の完全な抽出単位とともに小数の一部分からなる単位が含まれているような標本の得られる場合はさう多くはない。しかし多数の小林分に対する大規模な調査 (例えば *England* における材積資源の見積りて要求されるような) では、周辺部分の面積 (*edge areas*) は抽出された全エーカー数の相当な部分を占めるであろう。もし最終的な推定値に甚だしい偏りを生ずることなく、標準の大きさの単位のみを完全に林内に含ませるように抽出規則を修正できれば、この進退も調査費用とともに相当減少させることができるであろう。

Forestry commission の主任研究員である Mr. M. V. Laurie は最近この種の巧妙な修正法を提案した。この論文の目的は、"Laurie 抽出 (*Laurie sampling*)" の偏りが最小となるような条件を吟味し、これらが実際においてどの林に満たされるかを示すことである。

林縁の樹木は光線および根をのびす空間が多くなりやすいためにより有利である。そうしてこの影響は幼令林よりも老令の林でより著しい。sec. 2 の方法の説明から明らかなるようには、偏りを生じないための正確な条件は林木成長についての "周辺効果" の特性に関連するに違いない。林縁から林内に到る傾向については如何なる数学的説明によつても正確に規定することはできない。何故なら、その傾向を評価できるようなデータを集めることは適当な標本調査と

行うよりも費用がかかるからである。しかし偏りを克服するための条件が林形の変動に対して、どうひどく敏感でなければ、大略の近似を用いてもあまり不都合は生じないであろう。勿論この問題を不規則な外形の林について理論的に研究することは全く實際的ではなく、またそれに伴う論議も必ず理想化された状況に関連するものとなる。

2. 抽出方法 (*Sampling procedure*)

こゝでは二種類の抽出単位を考えることにする。その一つは一辺の長さが $2R$ で、並の向きが林縁に平行な正方形単位と、もう一つは半径 R の円形単位である。正確に適用し得る結果を求めるためには、正方形単位の場合には林が矩形であると仮定しなければならない。しかし多少の不規則性はあつても殆んど支障がない。 R の大きさが普通林の大きさに比べて小さいものである。例えばこの研究のもとになつた調査での抽出単位は半径 37 フィート (約 11.3 m) のエーカーの円であつた。どちらの形の抽出単位もその中心に対する指示によつて完全に位置が定められる。従つて Laurie の抽出方法によつて導入される修正を別にすれば、標本抽出の規則に必要なものは、抽出単位を中心を定めるための規定だけである。

(A) 標準的な標本調査法 (*Standard Sampling*)

sec. 1 で述べた通り偏りを生じないためには、単位を中心のとり得る位置は林の全部とそのまわりを取りまく幅 R の帯状地帯でなければならない。この地域内には用いるべき抽出率に相当した中心の数が含まれることが必要である。この数は幾つかの単位が林縁と重なるかもしれないから、その林分で必要とされる標本の大きさに等しい総面積をもつ単位数より少し多くなければならない。

中心はこの許容された地域内で互いに独立にかつ全く無作為に選ばれる。一方それらを系統的な形で、例えばこの林分とそれを取りまく帯の上に重ねた正方形の格子の交点に配置することもできる。(中心を系統的に配置する場合には、一つの位置をきめると他のす

べてがきまる。偏りを避けるためには最初のものを選択的に選ばなければならぬ。①無作為標本と系統的標本の相対的な利益については既に他の場合で論じた (1,2)。林縁のどちらかの側で距離 R 以内にある中心はすべて林縁と重なるような単位を与える。このとき標本は林内に完全に含まれる単位と、林の内側に含まれている部分からなる単位の全部から成り立っている。例えばエーカー当りの材積の推定値は、単位と単位の一部の合計面積からできていると考えたときの標本の全立木材積から導かれるであろう。小林分の調査ではかなりの数の単位が林縁と重なる。林の内部の面積を測定しなければならないということは外業の量を増加させるものであり、また色々な林で違った標本調査を行うことによつてデータを分析する仕事が増加する。

(B) Laurie 抽出 (Laurie sampling)

Laurie によつて提案された方法は林の内部にある中心のみをとるという点を除けば、標準的な抽出法の場合と同じくまず中心を決定することが必要である。標準的な方法でも修正法でも各中心からは全く林内に含まれるような完全な単位のみが作られるから、この中心の数は林からとらるべき標本の丁度全面積に等しい単位数が得られるように選ぶことになる。林縁から R 以上の距離にある中心に対しては、普通の方法でその中心に対する円又は正方形として単位がとられる。林縁からの距離が R よりも小さく d よりも大きいような中心 (こゝで d はあとで定義する) に対してはもとの中心と新しい中心を結ぶ線が林縁と直角になるように中心が林縁から R の距離になるまで単位を動かす。中心が林縁から d 以内の距離にある単位は、もとの中心から林縁に下した垂線の足の両側で、 R の距離にある林縁上の点を中心とする二つの $1/2$ 単位をとる林に修正する。従つて抽出単位は長さ $4R$ 、幅 R の長方形かあるいは相接する二つの半円によつて構成される。この三つの可能な場合を Fig 1 に示す。こゝで林はその幅が $2R$ よりも大きくまた角度が無視し得るほどす

分大であると仮定する。即ち林縁は、中心の無作為抽出によつて二つの辺から R 以内の距離に落ちるような点が選ばれる機会を無視できる位に小さくするために、十分長い直線部分の系列から構成されていると考えるのである。

限界距離 (Critical distance) d は調査者の判断で選ぶものである。もし彼が周辺効果を生ずるような傾向の性質をよく知つていれば、Laurie 抽出が平均して標準的抽出と同じ結果を与えるような d の値を決定することが出来る。Sec. 3 においては色々な形式の傾向に対する d を求め、また Sec. 4 では誤った d を用いた場合に生ずる偏りの大きさについて論ずることにする。必要な公式は複雑であり、また研究した傾向は複雑な自然現象の極く単純な数学的模型だけであるからおそらくそれ自身はあまり重要なものではない。それにもかゝらず永久的に記録にとどめておくことが望ましいと思われる。グラフや表には論議に最も重要なものが全部含まれているのだから読者は公式でまどわされてはならない!

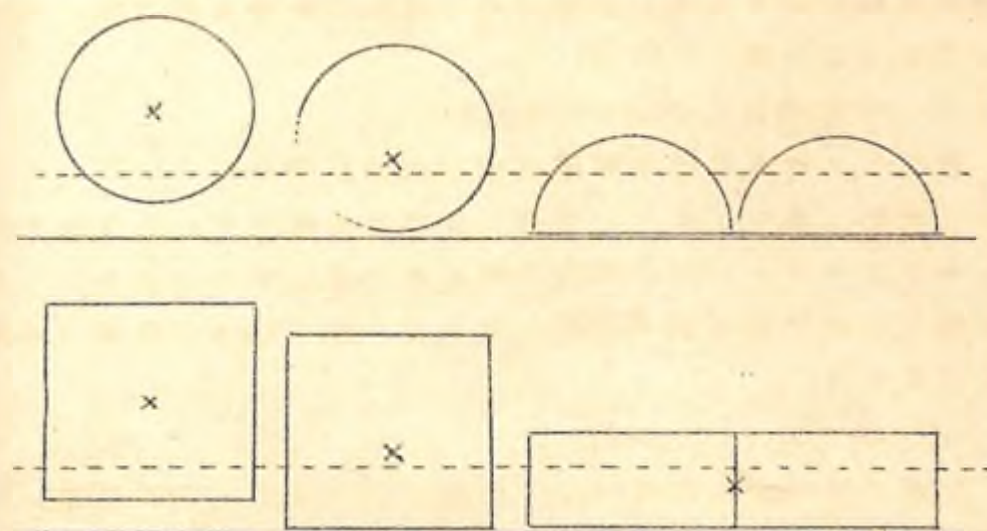


Fig 1. 正方形または円形抽出単位に対する Laurie 抽出法。
 x = 単位のはじめに選ばれた中心を示す。実線は林縁を表わし、
 点線は限界距離 d (Sec. 3 をみよ) で引かれている。単位は三
 つの異なる中心の位置に対して画かれている。

3. Laurie 抽出における限界距離 (The critical distance in Laurie sampling)

簡単のため杯分収穫量を推定するものと仮定しよう。この収穫は全樹種または特定樹種の立木材積、全本数あるいは全杯分における池の任意の量である。エーカー当りの収穫は林の中心部では林縁からの距離に影響されないが、例えば幅 b の周辺の帯の中をは周辺効果によって収穫が影響を受ける。

“林縁の外側の木は、樹冠や根を伸張する空間が多く、また林業家も林内より林縁の間伐を整くする傾向があるということのために林内の木より大きく、また本数が多くなる傾向がある。一方林縁の木は林内の木より枝張りが著しく、また形質の悪い木が多くなるから測定可能な立木材積は採用された測定基準に従って、多くもなりまた少なくもなる。主凡に露出した林縁又は老令林に隣接するところでは、可成りの量の周辺効果を生ずる” (Laurie の私信)

林縁から周辺の帯を横断する代表的傾向として三つの模型を考え、限界距離に対する傾向の形と b の値との影響を調べた。傾向の三つの模型は次の通りである。

(i) 不連続型 (Discontinuous)

推定すべき収穫の平均値は幅 b の周辺帯全面にわたって一定数量だけ増加 (減少) する。勿論この収穫は林の中心で変動するのと全く同じようにしてこの帯内の各点毎に変化するであろう。しかし平均的な周辺効果は幅 b の帯の上では一杯でそれから内側では現れないと仮定する。

(ii) 線型 (linear)

収穫の平均値は林縁からの距離が b となるところまで、周辺帯を横切って一杯に減少 (又は増加) すると仮定する。それから中では周辺効果は生じない。この場合も林縁から一定距離の場所には急激な変動性が存在するであろう。

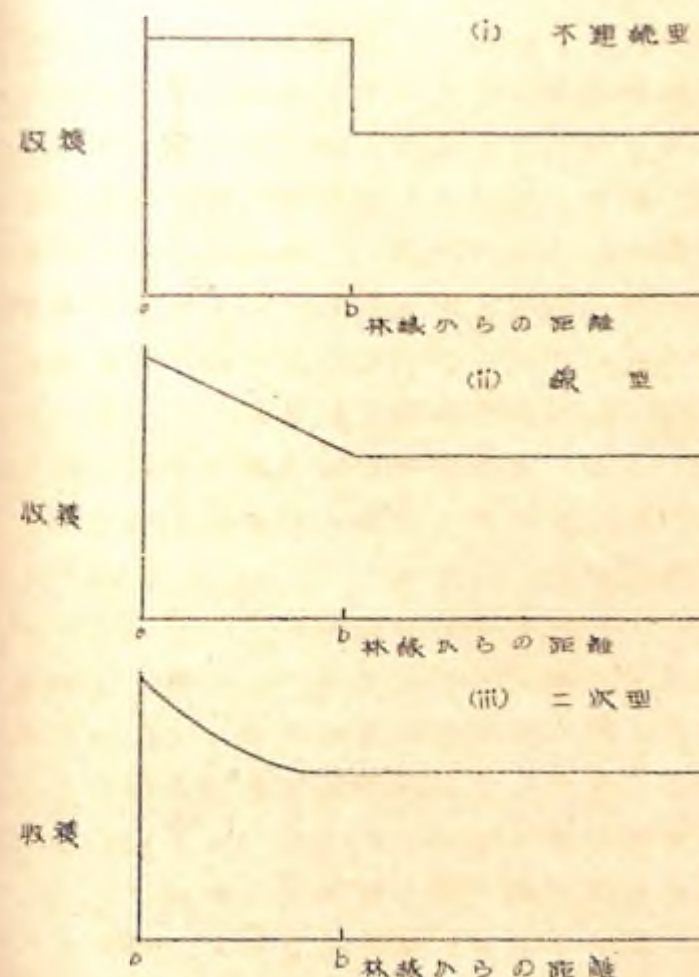


Fig 2. 周辺効果を表わすために用いた三つの傾向の形式
(b = 周辺効果を受ける林の周辺帯の幅.)

林縁からの距離が $\frac{1}{2}b$ のところの効果は全周辺帯に対する平均効果に等しい。

(iii) 二次型 (Quadratic)

収穫の平均値は、放物線 (parabolic curve) で表わし得る林なかにこの周辺帯を横切って減少 (あるいは増加) すると仮定する。この放物線は距離 b を水平となり以後は現れない。従って周辺効果は林縁の近くで急速に減少し、それから林内に入るに従ってゆるやかに減少する。平均の効果は林縁から $0.42b$ のところで現われ

る。

三つの形式の傾向をFig 2に示す。勿論現実には必ずしも傾向の形もともに林縁の部分毎に変化する訳で、では無視しなければならない。不連続な傾向が自然界で見出されることは少ない様に思われる。

しかしこれは極端な一例として、また数学的に最も簡単な形のものであるという理由で含めることにする。線型および二次型の傾向は、立木收穫の林分收穫に対する周辺効果のより妥当な表現である。

任意の一つの傾向および何れかの形式の抽出単位に対して、標準的な抽出法および Laurie 抽出で期待されるエーカー当りの平均收穫を記述することができる。標準的抽出は不偏である。従つて標準的標本から求められたエーカー当り收穫に林の全面積をかけると林分の総收穫の不偏推定値が与えられる。Laurie 抽出が不偏である為の条件を導くには二つの平均的收穫が等しいとおくことが必要である。その結果は d/R 函数で表わされる d/R に対する簡単な方程式となる。この公式(特に円形抽出単位に対して)にはかなり面倒な積分が含まれるが、しかしその原理は容易に理解することができる。こゝでは結果のみを述べることにする。林の幅が $2R$ より小さくない限りこれらの結果は林の幅と無関係である。

公式は比 θ によつて表わすのが一箇便利である。但し $\theta = \frac{d}{R}$ である。

三つの場合即ち

$$0 \leq \theta \leq 1$$

$$1 < \theta \leq 2$$

$$2 < \theta$$

を区別しなければならない。このとき正方形抽出単位に対する結果は次の通りである。

(i) 不連続型の傾向

$$\frac{d}{R} = 1 - \frac{1}{2}\theta \quad 0 \leq \theta \leq 1 \text{ のとき} \quad (1)$$

$$\frac{d}{R} = \frac{1}{2}\theta \quad 1 < \theta \leq 2 \text{ のとき} \quad (2)$$

および $2 < \theta$ のとき d/R は不足である(即ち任意の値はこの条件

を満足する。)

(ii) 線型の傾向

$$\frac{d}{R} = 1 - \frac{1}{3}\theta \quad 0 \leq \theta \leq 1 \text{ のとき} \quad (3)$$

$$\frac{d}{R} = \frac{\theta^2(3-\theta)}{-6+12\theta-3\theta^2} \quad 1 < \theta \leq 2 \text{ のとき} \quad (4)$$

$$\frac{d}{R} = \frac{2}{3} \quad 2 < \theta \text{ のとき} \quad (5)$$

(iii) 二次型の傾向

$$\frac{d}{R} = 1 - \frac{1}{4}\theta \quad 0 \leq \theta \leq 1 \text{ のとき} \quad (6)$$

$$\frac{d}{R} = \frac{\theta^3(4-\theta)}{8-24\theta+24\theta^2-4\theta^3} \quad 1 < \theta \leq 2 \text{ のとき} \quad (7)$$

$$\frac{d}{R} = \frac{2}{3} \quad 2 < \theta \text{ のとき} \quad (8)$$

円形抽出単位での対応する公式は更に複雑であるが次の通りである。

(i) 不連続型の傾向

$$\frac{d}{R} = \frac{3\pi\theta - 2\theta(1+\theta)(2\theta-\theta^2)^{\frac{1}{2}} + 6\theta\sin^{-1}(1-\theta)}{-3\pi + 12\theta(1-\theta^2)^{\frac{1}{2}} + 12\sin^{-1}\theta + 6(1-\theta)(2\theta-\theta^2)^{\frac{1}{2}} + 6\sin^{-1}(1-\theta)} \quad 0 \leq \theta \leq 1 \text{ のとき} \quad (9)$$

$$\frac{d}{R} = \frac{3\pi\theta - 2\theta(1+\theta)(2\theta-\theta^2)^{\frac{1}{2}} - 6\theta\sin^{-1}(\theta-1)}{3\pi - 6(\theta-1)(2\theta-\theta^2)^{\frac{1}{2}} - 6\sin^{-1}(\theta-1)} \quad 1 < \theta \leq 2 \text{ のとき} \quad (10)$$

こゝでも $2 < \theta$ のとき d/R は不足である。

(ii) 線型の傾向

$$\frac{d}{R} = \frac{3\pi(3+4\theta^2) - 2(9+3\theta+2\theta^2+2\theta^3)(2\theta-\theta^2)^{\frac{1}{2}} - 6(3-4\theta^2)\sin^{-1}(1-\theta)}{8\{-8+3\pi(1-\theta)+4(2+\theta^2)(1-\theta^2)^{\frac{1}{2}}+12\sin^{-1}\theta-2(3-2\theta+\theta^2)(2\theta-\theta^2)^{\frac{1}{2}}-6(1-\theta)\sin^{-1}(1-\theta)\}} \quad 0 \leq \theta \leq 1 \text{ のとき} \quad (11)$$

$$\frac{d}{R} = \frac{3\pi(3+4\theta^2) - 2(9+3\theta+2\theta^2+2\theta^3)(2\theta-\theta^2)^{\frac{1}{2}} - 6(4\theta^2-3)\sin^{-1}(\theta-1)}{8\{-8+3\pi(1+\theta)-2(3-2\theta+\theta^2)(2\theta-\theta^2)^{\frac{1}{2}}-6(\theta-1)\sin^{-1}(\theta-1)\}} \quad 1 < \theta \leq 2 \text{ のとき} \quad (12)$$

$$\frac{d}{R} = \frac{9\pi}{8(3\pi-4)} \quad 2 < \theta \text{ のとき} \quad (13)$$

(iii) 二次型の傾向

$$\frac{d}{R} = \frac{15\pi(8-9\theta-4\theta^2) - 2(120-95\theta-29\theta^2-6\theta^3-6\theta^4)(2\theta-\theta^2)^{\frac{1}{2}} - 15(64\theta+3\pi(5-8\theta+4\theta^2) - 4\theta(13+2\theta^2)(1-\theta^2)^{\frac{1}{2}} - 12(1+4\theta^2)\sin^{-1}\theta - 30(8-9\theta+4\theta^2)\sin^{-1}(1-\theta) - 2(15-19\theta+6\theta^2-2\theta^3)(2\theta-\theta^2)^{\frac{1}{2}} - 6(5-8\theta+4\theta^2)\sin^{-1}(1-\theta))}{-2(15-19\theta+6\theta^2-2\theta^3)(2\theta-\theta^2)^{\frac{1}{2}} - 6(5-8\theta+4\theta^2)\sin^{-1}(1-\theta)}$$

$0 \leq \theta \leq 1$ のとき (14)

$$\frac{d}{R} = \frac{15\pi(8-9\theta-4\theta^2) - 2(120-95\theta-29\theta^2-6\theta^3-6\theta^4)(2\theta-\theta^2)^{\frac{1}{2}} + 15(64\theta+3\pi(9-8\theta-4\theta^2) - 2(15-19\theta+6\theta^2-2\theta^3)(2\theta-\theta^2)^{\frac{1}{2}} + 30(8-9\theta+4\theta^2)\sin^{-1}(\theta-1) + 6(5-8\theta+4\theta^2)\sin^{-1}(\theta-1))}{+30(8-9\theta+4\theta^2)\sin^{-1}(\theta-1) + 6(5-8\theta+4\theta^2)\sin^{-1}(\theta-1)}$$

$1 < \theta \leq 2$ のとき (15)

$$\frac{d}{R} = \frac{\pi(9\theta-8)}{12\pi(2\theta-1)-32\theta} \quad 2 < \theta \text{ のとき} \quad (16)$$

これらの函数の値を選んでTable.1に示す。またこれらはFig.3と4にも表わしてある。線型および二次型の傾向が θ の任意の値に対してとる d/R の値は実際には同一だといふことがはっきりわかる。この一致は円形抽出単位で特に著しいが正方形単位でも $\theta=1$ の附近を除いてはそうひどくい違いはない。予期したように不連続型の場合には著しく異なっている。

θ が1より大きいとき正方形と円形抽出単位の対応する d/R の値は非常に良く似ている。

Table.1 R の比で表わした限界距離

θ	正 方 形 単 位			円 形 単 位		
	不連続型	線 型	二次型	不連続型	線 型	二次型
0.0	1.00	1.00	1.00	0.79	0.79	0.79
0.1	0.95	0.97	0.98	0.74	0.75	0.76
0.2	0.90	0.93	0.95	0.72	0.73	0.74
0.4	0.80	0.87	0.90	0.66	0.70	0.72
0.6	0.70	0.80	0.85	0.62	0.67	0.69
0.8	0.60	0.73	0.80	0.58	0.64	0.67
1.0	0.50	0.67	0.75	0.58	0.62	0.65

1.2	0.60	0.64	0.71	0.67	0.62	0.64
1.4	0.70	0.64	0.68	0.75	0.63	0.63
1.6	0.80	0.65	0.67	0.84	0.64	0.64
1.8	0.90	0.66	0.67	0.92	0.65	0.64
2.0	1.00	0.67	0.67	1.00	0.65	0.64
2.5	不 定	0.67	0.67	不 定	0.65	0.64
3.0	"	0.67	0.67	"	0.65	0.65
4.0	"	0.67	0.67	"	0.65	0.65

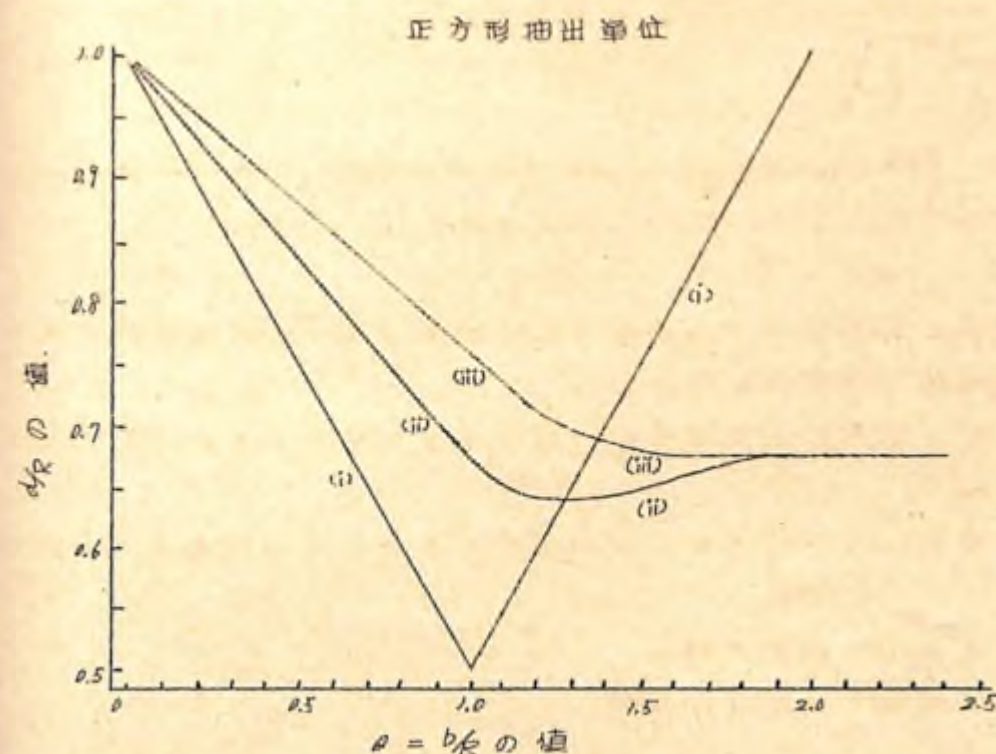


Fig.3

円形抽出単位

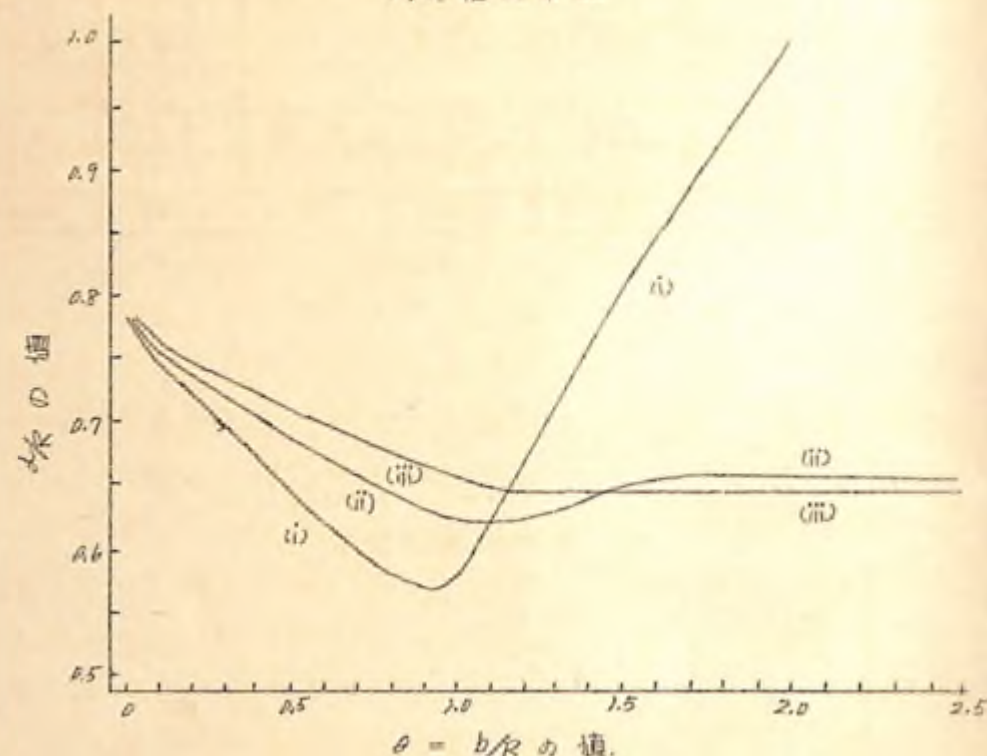


Fig. 4

Fig. 3 および 4. 二種類の抽出単位に対する R の分數で表わした
限界距離 (Sec. 3 をみよ)

(R = 正方形抽出単位の一辺の長さの半分あるいは円形抽出単位
の半径.)

曲線 (i): 不連続型の傾向 ($\theta > 2$ のときは任意の d/r の値を用
い得る.)

曲線 (ii): 線型の傾向.

曲線 (iii): 二次型の傾向.

4. 偏り (Bias)

実際においては μ は未知である。Laurie (私傳) においては、英
国の林では少くともそれは樹冠直径に略々等しいから従つて若い林
は 8-16 フィート、垂く老令の林は 40-60 フィートの範囲内にあるこ
とを指摘した。林を見れば大体の μ の値を求めることができた。周
辺効果は Sec. 3 で論じた三つの型の傾向のどれかで十分表現される
と仮定して適当な μ の値を定めることができる。 μ を選ぶ場合に誤
った判断を下したらどうなるであろうか?

このようにして全林の収穫の推定値に導入される偏りは、 μ の真
の値に關係するばかりでなく収穫の一般的水準にも依存するもので
ある。限界距離が変動しても影響されるのは過剰収穫 (excess yie-
ld) に対する推定のみであつて、幅 μ の周辺帯の収穫は周辺効果が
なく中心部の収穫の水準が林縁を統一しているときに与えられるもの
よりその量だけ多くなる。(林縁に近いために収穫が少なくなつた
林分は、用語の便宜のため、負の過剰収穫をもつものとする。) 大面積の林分や中央部の収穫が林縁部と殆んど変わらない林分では、
この過剰収穫は全体に対して比較的重要な部分を占めるから、
この過剰収穫の推定において少々の偏りがあつても林の最終的な数
値に対する影響は無視してよい。しかし小さい林分あるいは周辺効
果の極めて著しい林分では、この過剰収穫は全体の可成りの部分を占
めるであろうから、偏りを避けることが重要な問題となつてくる。

もし林の全面積に対する周辺帯の割合が P で、またそのエーカー
当りの過剰収穫が中央部のエーカー当り収穫の e なる割合であれば
(即ち周辺帯のエーカー当り平均収穫と中心部のそれとの比は $(1$
 $+ e) : 1$)、過剰収穫は全林のエーカー当り平均収穫に対して

$$\frac{eP}{1+eP}$$

なる寄与を与える。結局もし過剰収穫の推定値が B なる割合だけ
偏つていれば、推定された林の収穫はその真値の

$$\frac{ePB}{1+eP}$$

なる割合だけ偏る。林縁に近いところから林縁まで数値の増加す

る収穫の測定値については $e > 0$ だからこの比は ePB より小さい。
 また eP が小さい場合には、 e が正でも負でもこの比は ePB に非常に近い値となる。例えば 10 エーカーの正方形の林において周辺効果帯が林内の約 45 フィートにまで及んでいることがわかったとするとこの帯は全面積の約 25 % を占める。周辺帯の エーカー 当り 平均 収穫は中心部のそれと 50 % 以上は違っていない林に思われた。従って、この偏りはせいぜい 0.125 B となる。より正確には、もし 収穫が林縁で増加するものとするれば e は正となって偏りの上限は 0.11 B である。しかるにもし e が負であることがわかっていればこの上限は 0.14 B となる。もし B が殆んど確実に 7 % 以下となるように d を選ぶことができれば——あとを承すようにそれはどう難しいことではない——林の全収穫の推定に生ずる偏りは高々 1 % となり、またもし d を真の限界距離に近づければもっと小さくなる。

偏りについての函数は限界距離の公式を導くのに用いたのと事実上同じ方法で成ることが出来る。標準的抽出および Laurie 抽出で予期される過剰収穫の平均的な推定値を書き表わすことができ、またそれらの向の差違を不偏な標準抽出の値に対する比で表わせる。この結果は θ および u の函数 $B(\theta, u)$ である。

但し便宜上

$$u = \frac{d}{R}$$

とおく。 d はもはや sec. 3 の公式で与えられたような正しい限界距離でなく、調査者の利用できる d および傾向の情報を考慮して選ぶものである。函数 $B(\theta, u)$ は、 d の真値が $R\theta$ であるとき過剰収穫の推定値に生ずる偏りに比例するものとして定義される。sec. 3 の公式を導くのに用いた方法を若干整理すると $B(\theta, u)$ について対応する公式が得られる。

正方形抽出単位に対する公式は次の通りである。

(i) 不連続型の傾向

$$B(\theta, u) = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}(\theta - 2) \quad 0 \leq \theta \leq 1 \text{ のとき} \quad (17)$$

$$B(\theta, u) = u \times \left(\frac{2-\theta}{2\theta} \right) + \frac{1}{4}(\theta - 2) \quad 1 < \theta \leq 2 \text{ のとき} \quad (18)$$

$$B(\theta, u) = 0 \quad 2 < \theta \text{ のとき} \quad (19)$$

(ii) 線型の傾向

$$B(\theta, u) = \frac{1}{2}u + \frac{\theta - 3}{6} \quad 0 \leq \theta \leq 1 \text{ のとき} \quad (20)$$

$$B(\theta, u) = u \times \left(\frac{-2 + 4\theta - \theta^2}{2\theta^2} \right) + \frac{\theta - 3}{6} \quad 1 < \theta \leq 2 \text{ のとき} \quad (21)$$

$$B(\theta, u) = \frac{u}{\theta^2} - \frac{2}{3\theta^2} \quad 2 < \theta \text{ のとき} \quad (22)$$

(iii) 二次型の傾向

$$B(\theta, u) = \frac{1}{2}u + \frac{\theta - 4}{8} \quad 0 \leq \theta \leq 1 \text{ のとき} \quad (23)$$

$$B(\theta, u) = u \times \left(\frac{2 - 6\theta + 6\theta^2 - \theta^3}{2\theta^3} \right) + \frac{\theta - 4}{8} \quad 1 < \theta \leq 2 \text{ のとき} \quad (24)$$

$$B(\theta, u) = u \times \frac{3(\theta - 1)}{\theta^3} - \frac{2(\theta - 1)}{\theta^3}, 2 < \theta \text{ のとき} \quad (25)$$

例えば傾向が線型で

$$\frac{d}{R} = \theta = 0.6$$

と想えられるなら (9) 式によつて $u = 0.8$ を選ぶことになる。もしこの u の値を用いれば、実際にはそれ程周辺効果が及んでいないから、 θ は僅かに 0.4 で、(20) 式から予想される偏りは -0.033 であることがわかる。故に過剰収穫は 3.3 % だけ過少推定される。一方もし真の θ が 1.1 であれば (21) 式は過剰収穫を 0.77 即ち 7.7 % 過大推定する偏りの生ずることを示す。もし θ が 0.6 と正しくとられているにもかかわらず、傾向が線型であるというよりはむしろ二次型に近いものに対応している場合には、(23) 式は過剰収穫を 5 % 過少推定させる偏りのあることを示す。(17) から (25) までの式

をみると、 θ が正しいときには u が (1) から (3) までの式の適当な一つで与えられ、ばこの偏りは 0 になることがわかる。Fig 5, 6, 7 は θ の函数で表わした偏りを色々の u の値に対して示す。

円形抽出単位に対する公式とは当然 (9) から (16) までの dR の公式の分子分母にでてくる式が含まれる。繰返しを避けるため“分子”“分母”で適当した公式の分子 (Num) 分母 (Denom) を表わすこととする。

- (1) 偏りの符号は通則推定が正であるという仮定から与えられた。もし仮定が間違初限で減少するなら“過少推定”と“過大推定”という用語を入れかえねばならない。

このとき偏りの公式は次の通りである。

- (i) 不連続型の傾向

$$B(\theta, u) = (u \times \text{分母} - \text{分子}) \div 6\pi\theta \quad 0 \leq \theta \leq 1 \text{ のとき} \quad (26)$$

$$B(\theta, u) = (u \times \text{分母} - \text{分子}) \div 6\pi\theta \quad 1 < \theta \leq 2 \text{ のとき} \quad (27)$$

$$B(\theta, u) = 0 \quad 2 < \theta \text{ のとき} \quad (28)$$

正方形抽出単位

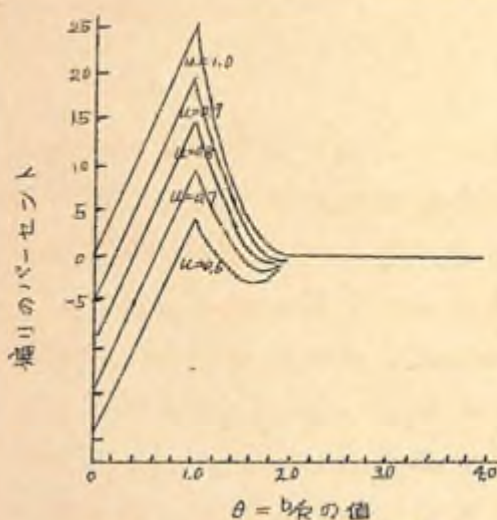


Fig. 5. 不連続型の傾向

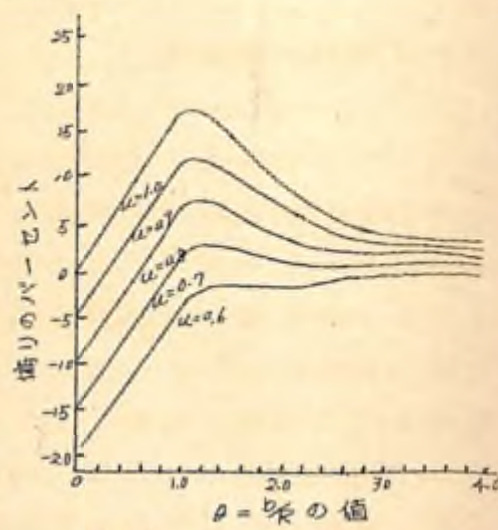


Fig. 6. 線型の傾向

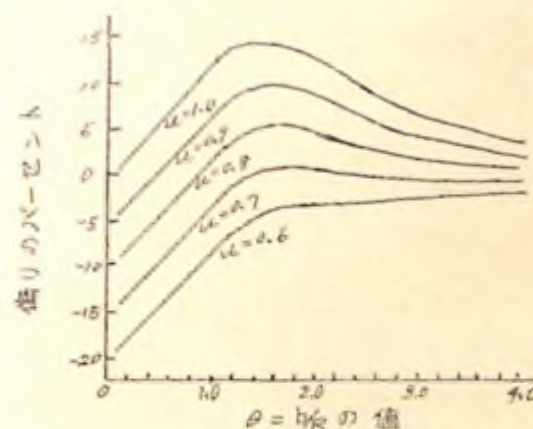


Fig. 7. 二次型の傾向

Fig. 5 ~ 7 種々の u の値について計算した三つの傾向の型に対する偏りのパーセント。

円形抽出単位

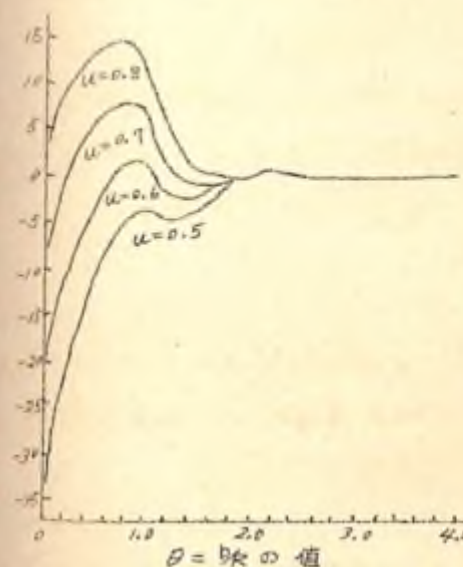


Fig. 8. 不連続型の傾向

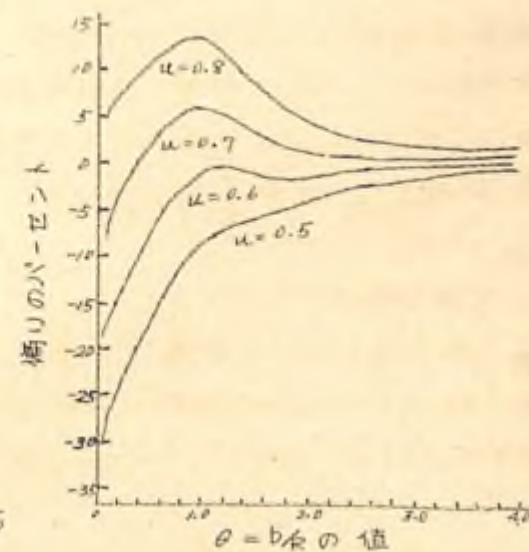


Fig. 9. 線型の傾向

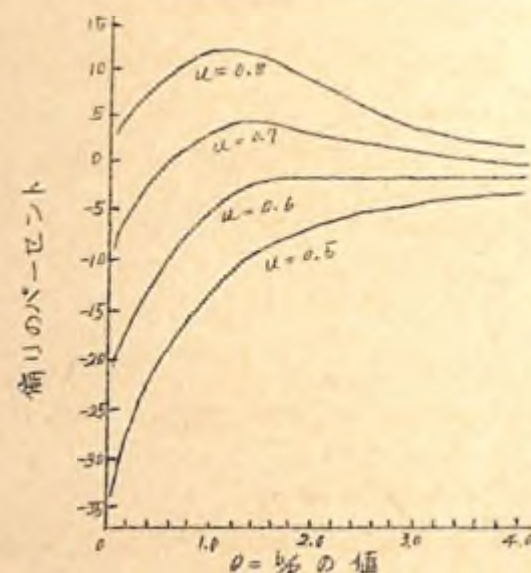


Fig.10. 二次型の傾向

Fig 8 ~ 10 種々の u の値について計算した三つの傾向の型に対する偏差のパーセント。

(ii) 線型の傾向

$$B(\theta, u) = (u \times \text{分母} - \text{分子}) \div 24\pi\theta^2 \quad 0 \leq \theta \leq 1 \text{ のとき} \quad (29)$$

$$B(\theta, u) = (u \times \text{分母} - \text{分子}) \div 24\pi\theta^2 \quad 1 < \theta \leq 2 \text{ のとき} \quad (30)$$

$$B(\theta, u) = u \times \left(\frac{6\pi - 8}{3\pi\theta^2} \right) - \frac{3}{4\theta^2} \quad 2 < \theta \text{ のとき} \quad (31)$$

(iii) 二次型の傾向

$$B(\theta, u) = (u \times \text{分母} - \text{分子}) \div 120\pi\theta^3 \quad 0 \leq \theta \leq 1 \text{ のとき} \quad (32)$$

$$B(\theta, u) = (u \times \text{分母} - \text{分子}) \div 120\pi\theta^3 \quad 1 < \theta \leq 2 \text{ のとき} \quad (33)$$

$$B(\theta, u) = u \times \left\{ \frac{3\pi(2\theta - 1) - 8\theta}{\pi\theta^3} \right\} - \frac{9\theta - 8}{4\theta^3} \quad 2 < \theta \text{ のとき} \quad (34)$$

従つて円形抽出単位で傾向が $\theta = 0.6$ なる線型であると思われる場合には、(11) 式によつて u の値は 0.668 と選ぶことになる。 θ の正しい値が 0.4 であれば、この場合も (29) 式から過剰収獲の過少推定は 9.3% であることがわかるであろう。もし真の θ が 1.1 なら (30)

式は 9.3% の過大推定が予想されることを示す。 θ が 0.6 で傾向が線型よりはむしろ二次型なら、(32) 式は $u = 0.668$ を用いると真の過剰収獲の 2.5% の過少推定値が導びかれることを示している。

(26) から (24) までの式の形から、 u が (9) から (16) までの式の適当な一つで与えられるときには、この偏差が 0 になることがわかる。 Fig 8. 9. 10 は色々な u の値に対する θ の函数としての偏差を示す。

Table II 過剰収獲の推定における偏差のパーセント

θ	$u = 2/3$ なる正方形単位			$u = 0.65$ なる円形単位		
	不連続型	線型	二次型	不連続型	線型	二次型
0	-16.7	-16.7	-16.7	-17.2	-17.2	-17.2
0.1	-14.2	-15.0	-15.4	-10.1	-11.6	-12.5
0.2	-11.7	-13.3	-14.2	-6.6	-9.0	-10.3
0.4	-6.7	-10.0	-11.7	-1.2	-4.9	-6.9
0.6	-1.7	-6.7	-9.2	2.6	-1.6	-4.1
0.8	3.3	-3.3	-6.7	4.7	0.8	-1.9
1.0	8.3	0.0	-4.2	3.7	2.2	-0.2
1.2	2.2	1.5	-2.0	-0.5	1.9	0.8
1.4	-0.7	1.2	-0.7	-1.8	1.0	1.0
1.6	-1.7	0.6	-0.2	-1.7	0.4	0.9
1.8	-1.3	0.2	0.0	-0.8	0.0	0.7
2.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5
2.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.2
3.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1
4.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Table I は θ が小で、おそらく不連続型の傾向でない限り大体 $2/3$ 位の u の値が偏差をなくする上で間違いなく好結果をもたらすことを示している。もつと正確には正方形単位で $u = 2/3$ 、円形単位で $u = 0.65$ の値を更に詳しく調べる価値がありそうに思える。

Table II はこれらの色々な選んだ u の値について、 θ の種々の水準で計算した偏差の函数を示す。 θ が 0.5 をこえる場合のどちらか

の抽出単位に対する偏りは、三つの傾向の型の何れにおいても10%以下であり、またそれは殆んど常に5%より少ない。

5. 収穫推定の精度 (Precision of the estimate of yield)

これまでの節においては標本抽出の際の偏りを最小にすることあるいは除去について考えてきた。1%の偏りをもつ方法を繰返し適用すれば、平均的に真値と1%だけ異なるような結果が得られる。しかし収穫推定値の任意の一つには対象における偶然変動のいつもの危険がつきまとうものである。もし変動性のある林を小標本で推定すれば、おそらく20%の過大もしくは25%の過小推定値が得られるかもしれない。標準的抽出方法のLaurieの修正は標本調査の實際を簡略化するという唯一の目的をもつものであるから、限界距離の選択はこの偏りを無視できるような方法で行うべきである。この修正によつて推定値の精度が多少とも変ると考える理由は何もない。勿論また、偏りを無視できる大きさにまで減少させることについてこの論文で強調したことも、Laurie抽出が標準的抽出より精度が高いことを意味すると考えてはならないのである。

偏りと精度の両の區別については既に別の論文で詳細に論じた¹⁾。林の隣接する木または地域間の収穫の相関について何等の理論的説明が与えられていない場合のLaurie抽出の精度の研究は実験的証拠にまたねばならない。林縁に近いところでは収穫がより大きくなるばかりでなくその変動も大きくなりやすいという傾向は、Laurie抽出の精度を標準的抽出よりも低下させるものである。どの様な場合でも小標本による林分収穫推定の精度はそう大きくないことがよく知られているから、精度に関してLaurie抽出に特別な利益があると考えてはならない。

6. 勧告 (Recommendation)

Laurie抽出法を上記のSec.2で述べた。Sec.3および4の研究からこのようにとられた標本が必ずしも特に精度の良い推定値を与

えることを意味するものではないが、限界距離を注意深く選んだとき、この方法には重大な偏りの生ずる危険性の低いことがわかった。

過剰収穫の推定の偏りは、周辺効果作用している周辺帯の幅が抽出単位のおおきさに比べて狭い場合に最大となるように思われる。何故なら最良の限界距離を判定する場合に僅かの誤差が生じても偏りには最も大きい影響が現れるからである (Fig 5 から10 および Table II)。もし周辺帯の幅が $\frac{1}{2}R$ 以上で、傾向が少なくともSec.3で述べた直線型又は二次型あるいは中間型の模型で表し得るなら、正方形単位で $2R/3$ 、円形単位で $0.65R$ の限界距離を選べば過剰収穫の推定における偏りは殆んど確実に5%以下となるであろう。

従つて林が非常に小さいか、あるいは周辺効果が特に大きい場合の外は、全収穫の推定値が1%以上偏ることはないであろう。例えばもし周辺帯の幅が40~60フィートと考えられる老令林から半径37フィート・3インチの円形単位を抽出するものとすれば、 $0.65R$ の比は1.1と1.6の間にあるから、Table IIは24フィート・3インチ (= $0.65R$) の限界距離をとれば過剰収穫の推定値には2%以上の偏りが生じないことを示している。しかし周辺効果が僅か8~16フィートまでしか及んでいないような若い林では $0.65R$ は0.2~0.4のオーダーとなるであろう。Table I および Fig 4 は限界距離を $0.7R$ あるいは $0.75R$ (26フィート・1インチ~27フィート・11インチ) のあたりまで増加させるべきことを示した。Fig 7~10は限界距離を選ぶ際の誤差によつてより大きい偏りの生ずることを示している。

限界距離の選択を誤つたために過剰収穫の推定に大きい偏りの生ずる危険性は、若い林および周辺効果が林縁からあまり奥まで及んでいないような林で抽出単位のおおきさをへらすことによつて避けることができる。抽出単位は $0.65R$ が確実に0.5をこす称に常に十分小さくするという勧告は、それが実行出来る限りにおいては多数の小単位の方が小数の大単位よりも優れている。(精度との関係において) という標本調査の一般的方針と一致するばかりでなく偏りを少なくするためにも望ましい称に思われる。しかし現実には事情はそう簡単

ではない。調査者の関心は周辺効果にもとづく周辺帯間の過剰収穫にあるのではなく、林分の全収穫に対するものである。Sec 4 で示したように全収穫に対する偏りは

$$\frac{epB}{1+ep}$$

よりも小さい。こゝで e は周辺帯上の収穫の平均的な増加(%)で P は全体に対する比で表わした周辺帯の面積、また B はこの過剰収穫推定における偏り(%)である。

もし周辺効果が狭い周辺帯上にのみ作用するものとすれば、 P は小となるであろうから、 B の中位の値でさえ全収穫の推定値に重大な偏りを生ずることなく許容し得るものとなる。実際 P が近似的に θ に比例すれば θ にも比例する。色々な林に対する e が θ と相関をもっていない限り、 P が小さいときの全収穫における偏りは大体 θB に比例するであろう。一定の θ では θB は B の変動よりも θ のそれによって影響されることが少いから、 θ が小さい場合でさえ θ の知識の不正確さが全収穫の推定にそう大きい不利益をもたらさないであろう。 θ が大きい場合の主な利益はおそらく、傾向の型を線型又は二次型と区別する必要がなく、また林に適當した正確な θ を推定しなくても限界距離として R の一定比率を用い得るという単純性であろう。

従ってこの論文のものと近似した条件の下では、周辺効果が $\frac{1}{2}R$ 以上の距離まで林内に影響を及ぼしている限り、正方形単位で $2R/3$ 円形単位では $0.65R$ の限界距離を推奨することが当を得ているように思われる。周辺効果がもっと狭い場合には限界距離は (3)、(6)

(11) および (14) 式の最も適當なものに従って修正すべきである。

有一でない林では限界距離は林縁の部分毎に変化させる必要がある。単位を中心が落ちる林の部分に対して定められる限界距離を使って Laurie の規則が何れの抽出単位に対しても用いられる限り、この論文の結果の妥当性は周辺効果の広がりにおける変動によって損なわれるものではない。

7 要 約

立木材積または他の収穫の大きさを推定するための森林標本調査においては、林縁に近いことで成長空間に余裕のある周辺地域上のそれらを誤述することによって生ずる偏りを避ける様に用心しなければならない。普通これによって抽出単位が林縁と重なるようなことが起る。従って単位の一部を正しく扱うための特別な測定や計算が必要となる。もう一つのやり方として、別の具合で林縁と重なる単位を三つの方法のどれかで修正することが出来る。即ちそれらは除いてしまうか、丁度林内に含まれるものと半分の大きさの二単位でおきかえるかあるいは林内に丁度含まれるまで移動させることが出来る。この論文で述べた Laurie 抽出法は、これらの何れかの修正法を採用するときの正しい選択によって、収穫推定の偏りを避けることを企てている。

この選択をどの様に行うかという問題の正確な解答は、周辺効果の種々の性質の数値に關係するものであるがこの効果は実際には調査者が知ることはできないものである。しかしながら起り得る効果の種類について簡単な数学的模型を研究し、偏りを生じないための条件が述べられた。また周辺効果の不正確な表現にもとづく偏りについても考察された。この結果は周辺効果の型とそれらが林内に影響を及ぼす距離に依存するものであるが、しかしこれらは林の全体の幅とは無關係である。もし林の収穫の傾向がこゝで論じた模型のどれかに近似しているなら、限界距離を慎重に選ぶことによって小面積の林を除いて全収穫の推定値における偏りを 1% 以下におさえることができ、また大面積の林ではもっと小さくできる筈である。抽出率が非常に大きくない限り、特に偏りの方向は必ずしも同じではないということから多数の林で平均すればそれに比例してもっと小さくなるのでこの様な偏りは推定値のもつ抽出誤差に比べて無視できるはずである。

参考文献

- (1) Finney, D. J (1947): 'Volume Estimation of Standing Timber by Sampling' *Forestry* 21 17P-203
- (2) ————— (1948): 'Random and Systematic Sampling in Timber Surveys' *Forestry* 22 64-99

大規模収量調査における プロットサイズの問題

The Problem of Plot Size in Large-scale Yield Surveys

By P. V. Sukhatme P. H. D. Sc.

(Jour. Amer. Statist. Assoc. Vol.42, 1947 より)

大規模収量調査におけるプロットサイズの問題
The Problem of Plot Size in large-Scale
Yield Surveys.

P. V. Sukhatme P.H. D.Sc.,

(Journ. Amer. Statist. Assoc, Vol. 42, 1947より)

この論文はインドの公的な調査で用いられる $\frac{1}{8}$ エーカー程度のプロットと、小プロットの効率を比較するために実行された、地方的一規模 (district-wide scale) の三つの研究の結果を述べる。第一の研究は United Province における小麦の調査に対するもので、あとの二つは Bihar および Madras 州の水稲(米)に対するものである。実験は、二つの州の税務および農務担当官によって指導された。彼等は普段公的な命令によって坪刈調査を実行している。これらの三つの研究の結果から、小プロットを用いると平均収量の過大推定値が得られるという危険がはつきりした。これに反して、 $\frac{1}{8}$ エーカー程度のプロットでは偏りの生じないことがわかった。この結果はまた真の分散の色々な成分の不偏推定値を小プロットから求められないことを示している。インドの各地で行われている坪刈りの公的な調査では、大きい抽出単位(以下プロットという)が用いられている。例えば Madras で用いられているプロットサイズは $\frac{1}{100}$ エーカー(50リンク $\times$ 20リンク)、Bombay で用いられているのは $\frac{1}{40}$ エーカー(33フィート $\times$ 33フィート)中央州では $\frac{1}{10}$ エーカー(66フィート $\times$ 66フィート)、Onissa は $\frac{1}{60}$ エーカー(25リンク $\times$ 25リンク)等々である。プロットは中心杭と測錐で位置づけられる。

Imperial Council of Agricultural Researchが過去三年間インドの各州で行なった主要作物、即ち小麦および水稲に対する実験的収量調査では $\frac{1}{16}$ から $\frac{1}{40}$ エーカーの大プロットにも用いられ、また Madras 州の水稲実験では全圃場が刈取られた。

(1.2). Indian Cotton Committee (インド綿花委員会)が行なった綿の実験的調査で用いられたプロットサイズも大きく例えば $\frac{1}{10}$ エ

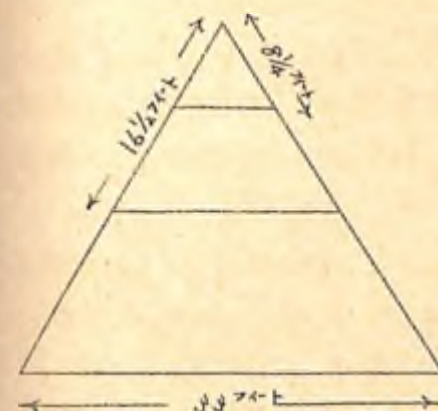
ーカーであった〔3, 4, 5〕。これに反して英国や米国の研究者、またインドでもある研究者は非常に小さいプロットを用いている。即ち英国の Cochran は 6 列巾でそれぞれ $\frac{1}{4}$ メーターのプロットを用いており〔6〕。King と Mcpeek は $\frac{1}{4000}$ から $\frac{1}{5000}$ エーカーのプロットを用いている〔7〕。インドでも 19.6 平方フィート ($\frac{1}{5000}$ エーカー) の小プロットを Hubback〔8〕が初めて用い、最近では Mahalanobis〔9〕が用いている。これらのプロットはすべて固定枠か、または半固定枠を用いて位置づけられる。

Imperial Council of Agricultural Research が行なった調査において大プロットを採用した理由は次の通りである。坪刈試験に対する公的な方法の主な改正点は、圃場の個人的な選択を無作為抽出法による客観的な手続におきかえることであると考えられ、また既往の Hubback や他の人々の試みが、圃場の抽出方法についての系統性のある考え方を与え得なかったとしたら、それはこれらの試験が、政府の出先機関の採用する無作為抽出法としては、実用性のないことを示したものと考えられたからである。従って、収量統計を改善するどのような方式においても、初期の段階で収量推定値の不偏性を保証するような最低限の変更が行なわれることのみが望ましいと考えられたのである。プロットの大きさは無作為化の問題とは関係がないとして変更されなかった。これらの調査の進行とともに、直ちに坪刈調査に対して標本調査法を用いることは実用的であり、またあまり費用を追加しなくても、官庁の調査手続の永続的な基礎とでまることがわかった。しかし、上記のような小プロットが他の研究者によって使用されたという事実を考えて、極く小さいプロットを用いる余地があるかどうかを研究すべきであると考えられた。要約には既に Nature〔10, 11〕に発表したこれらの研究の結果が含まれている。この論文の目的は詳細な結果を例示することである。

Moradabad における小麦の調査

最初の調査は、1944—45 年にわたって連合州 (United Pro-

vinces) の Moradabad 地方において実行された。この地方の面積は 2268 平方マイルである。これを Tehsil とよばれる 6 つの地域に分割したが、Thakurdwara を除くこれらのすべての地域において灌漑および非灌漑の小麦の両方が栽培されていた。しかし Thakurdwara においては、小麦の作付面積の殆んどが、非灌漑のものであった。抽出計画はこれらの各 Tehsil から 8 つの部落を選ぶもので、8 部落全部を非灌漑試験のために選んだ Thakurdwara を除くと、これらの 4 つは灌漑小麦で他の 4 つは非灌漑小麦の試験のためのものであった。最初の 5 つの Tehsil についてそれぞれ、Tehsil 内の全部落間から灌漑小麦と非灌漑小麦についての抽出が別々に行われた。抽出された部落から小麦だけが生育している畑を二つ選び、選ばれたそれぞれの圃場に 8 つのプロットを無作為に配置した。(a) 頂点から辺に沿って $8\frac{1}{2}$ および $16\frac{1}{2}$ の位置で底辺に平行線を引いて、三つの帯状区域に分割した一辺が 33 フィートの正三角形プロット 2 つ (図に示す)。(b) 半径 2 フィートの 3 つの円形プロット。(c) 半径 3 フィートの 3 つの円形プロット。それぞれの部落で選ばれる二つの圃場は、その部落が灌漑小麦の試験に選ばれたか非灌漑小麦の試験のために選ばれたかによって、灌漑小麦か非灌漑小麦かであり、また選ばれた部落の灌漑あるいは非灌漑小麦のすべての圃場内から無作為に抽出された。一辺が 33 フィートの正三角形プロットは、巻尺と杭で位置づけをし、一辺に沿って頂点から $8\frac{1}{2}$ フィートと $16\frac{1}{2}$ フィートの位置で、底辺に向つて三つの部分の刈取りを進めた。円形プロットは頭の部分が回転できる杭と鋼巻尺および錘糸からなる特別に考案した器具で位置づけた。この杭は木でできていて、一方の端には鉄の輪が、また他の端には鉄のとりがりがついている。杭は一対の乱数によって位置づけられた圃場



の正三角形プロットは、巻尺と杭で位置づけをし、一辺に沿って頂点から $8\frac{1}{2}$ フィートと $16\frac{1}{2}$ フィートの位置で、底辺に向つて三つの部分の刈取りを進めた。円形プロットは頭の部分が回転できる杭と鋼巻尺および錘糸からなる特別に考案した器具で位置づけた。この杭は木でできていて、一方の端には鉄の輪が、また他の端には鉄のとりがりがついている。杭は一対の乱数によって位置づけられた圃場

プロットの大 きさと形	プロット面積 平方フィート	灌 漑 小 麥				非 灌 漑 小 麥			
		プロ ット 数	平 均 収 量 (ポンド)	標 準 誤 差	過 大 推 定 率	プロ ット 数	平 均 収 量 (ポンド)	標 準 誤 差	過 大 推 定 率
471.55 三角	471.55	78	831.1	77.3	—	107	539.0	62.9	—
117.39 三角	117.39	78	870.6	81.5	4.3	107	598.2	62.5	11.0
29.47 三角	29.47	78	961.9	101.2	15.7	107	664.9	68.3	23.4
28.29 三角	28.29	117	954.5	90.5	14.9	161	618.3	64.2	14.8
12.57 三角	12.57	117	1280.3	93.8	42.4	161	767.1	84.7	42.4

この特別な研究において、小プロットで過大推定値が得られた理由は、当然調査員に境界線上の植物をプロット内に含める傾向があったためである。現場員にはプロット内に入る植物のみを収穫すべきことが指示されていたけれども、彼らが境界線上の植物をプロット内に含むべきか否かを決定するのに困難を感じたことは確かである。小プロットではこの境界の植物は、収穫される作物に対して相当な寄与を与える。従って、小数の植物であつても、それを含むか否かは小プロットを用いる場合には、大プロットの場合に比べて結果に重大な影響を与える。

偏りの検定

偏りを検定するのに適當な方法は、色々な大きさのプロットの結果を、全圃場を収穫して得られたものと比較することである。従つて、全圃場は収穫することが必要であるが、しかしこの考えは大い費用と労力が必要のために放棄しなければならなかつた。しかし著者が以前行なつた試験においては、 $\frac{1}{100}$ エーカープロットから推定された平均収量と、全圃場を収穫して得られた値とを比較した。これらは〔2〕に報告してある。二つの推定値間に見られる差は、標準誤差の1.8ポンドに対して僅か3.0ポンドであつた。Yatesも同様な結果を得ている。従つて471.55フィートの三角形プロットから得

られる収量は、エーカー当り平均収量の不偏推定値を与えると仮定してもよいことがわかる。

表2に色々な大きさのプロットから得られた、平均収量の推定値の統計的な比較の結果を示す。この検定は次のようにして行なつた。全プロット収量をエーカー当りに換算した。比較Iと比較IIの推定された平均収量の差は、灌漑小麥の場合は78対、また非灌漑小麥については108対のすべてにわたる対応するプロット間の差の平均値を計算したものである。しかし比較IIIおよびIVの場合には、プロット間にそのような対応がないので、換算したプロット収量を各圃場について、各プロットの大さごとく平均し、各圃場に対するこれらの平均収量間の差を、灌漑小麥の場合には9圃場について、また非灌漑小麥の場合には4圃場について、平均したものである。3および7列に示された差の標準誤差は、平均値を求めた部落間、および圃場間の（それらをtehsil間で分析せずに）個々の差から直接計算したものである。

表2

種々な大きさのプロットに対する小麥の平均収量(エーカー当りポンド)

Tehsil名	Manadabad	Sambhal	Thakundwara	Bilari	Hasapur	Amnaha	
プロットの大さ (平方フィート)	ポ ン ド 数 平均収量	ポ ン ド 数 平均収量	ポ ン ド 数 平均収量	ポ ン ド 数 平均収量	ポ ン ド 数 平均収量	ポ ン ド 数 平均収量	
灌漑	471.55	16 1138.8	16 639.6	— —	14 672.1	16 896.9	16 1112.9
	117.39	16 1176.7	16 779.2	— —	14 625.2	16 942.2	16 1105.1
	29.47	16 1229.3	16 915.8	— —	14 678.0	16 1105.1	16 1162.3
	28.29	24 1204.7	24 925.6	— —	21 666.5	24 1025.5	24 1167.6
	12.57	24 1457.3	24 1064.8	— —	21 385.7	24 1229.7	24 1224.7
非灌漑	471.55	16 599.0	16 287.2	31 527.4	16 581.8	16 562.0	12 710.1
	117.39	16 694.5	16 301.2	31 530.1	16 642.5	16 622.1	12 782.5
	29.47	16 774.3	16 346.4	31 643.4	16 742.2	16 660.7	12 877.2
	28.29	24 811.3	24 377.7	48 568.6	23 623.3	24 612.2	13 799.7
	12.57	24 841.0	24 400.7	47 725.9	24 327.0	24 526.0	13 925.9

表

種々の大きさのプロットに対する平均収量の推定値を比較した結果

比較したプロット	灌 漑				非 灌 漑			
	平均収量の推定値 (ポンド/アール)	差の標準誤差	自由度	t	平均収量の推定値 (ポンド/アール)	差の標準誤差	自由度	t
I. $3\frac{1}{2}$ 対 $16\frac{1}{2}$	42.3	20.6	77	1.95	62.1	15.6	104	3.38*
II. $16\frac{1}{2}$ 対 $8\frac{1}{4}$	92.3	28.6	77	3.25*	69.9	15.6	104	4.52*
III. $8\frac{1}{4}$ 対 $5\frac{1}{8}$	22.2	54.3	38	0.42	43.5	26.4	52	0.13
IV. $5\frac{1}{8}$ 対 $2\frac{1}{4}$	251.0	42.8	38	5.85*	149.3	32.1	52	4.63*

非灌漑小考の場合 $16\frac{1}{2}$ フィートの三角形プロットは、 $3\frac{1}{2}$ フィートの三角形プロットのものより有意に高いエーカー当り平均収量の推定値を与えることがわかる。灌漑小考の場合でも、差は5%の有意水準に達している。 $8\frac{1}{4}$ フィートの三角形プロットでは、非灌漑、および灌漑のどちらについても $16\frac{1}{2}$ フィート三角形プロットより有意に高い収量推定値を与えている。

これらの比較はプロットの大きさが減少するとともに生ずる過大推定は、偶然誤差によっては説明できないものであり、境界の植物をプロット内に含める傾向のために生ずるということを明確に示している。同じ大きさを、形の違う二つのプロットから得られた結果を比較している比較IIは特に興味がある。同じ大きさの三角プロットと円形プロットから得られる平均収量間の差は有意でない。この結果は、過去において大きさが同一の場合には、周囲の最少な円形プロットが優れているということがいわれているにもかかわらず、主として形よりも大きさが収量推定値を決定することを示しているようである。

分散分析

* 1%水準で有意

表は色々な大きさのプロットに対するプロット収量の分散分析の結果を与えている。これは、部落間、部落内圃場間、および圃場内プロット間の平均平方の推定値と、平均平方から普通の公式(6)によって導かれる。これらに対する分散成分の推定値を示している。

この結果は種々の大きさのプロットの比較を容易にするためエーカー当りのポンドで表わしてある。圃場内プロット間の成分は、予想したようにプロットが大きくなると大きくなるが、それぞれ部落毎、圃場毎の変動の測度と考えられ、プロットの大きさと独立な部落間および部落内圃場間成分の値も、プロットの大きさとともに変化することがわかる。このように灌漑小考の場合圃場間の成分は $3\frac{1}{2}$ フィート三角形から、 $8\frac{1}{4}$ フィート三角形まで著実に増加し、そのあとにははっきり一定であることを示している。非灌漑の小考についてのFは、プロットの大きさの変化につれて幾分不規則な様子を示すが、全体としてはプロットの大きさが小さくなるにつれて増加する。部落間の分散成分は、比較的より一様であるが、非灌漑の場合 $2\frac{1}{4}$ フィートの円形プロットでは異例に大きい値を示している。部落間および圃場間の分散成分およびFの変動は抽出誤差のためと考えられる以上の大きさである。従って小プロットの場合には、一定の圃場だけでなく、部落間および圃場内の分散成分およびFの値を大きくする。圃場毎に変化する偏りが生ずる*。このように小プロットでは平均収量および部落間と圃場間の分散成分の不偏推定値を得ることは出来ない。

Gayaにおける稲の調査

上で得た結論は全然予想しなかったもので、偏りは現地調査を改善することによって除去できただろうといういつでも成つ立つ考えから、更に他の作物および他の地方についての調査が行なわれた。これらの一つはBiharのGaya地方の稲について実行された。この地方はHubbackが最初の一連の実験を無作為抽出法で行なったと

* この説明はW.G. Cochranが著者に指摘されたものである。

ころである。

表4 表 (10ボンドE-0-)² のプロット収量の分散分析

	33フィート△		16½フィート△		8½フィート△		9フィート○		27フィート○	
	d.f		d.f		d.f		d.f		d.f	
灌漑 村落間平均平方	15	3722	15	4170	15	6469	15	7840	15	2077
・ 分散成分V		642		575		924		620		624
圃場間平均平方	19	1288	19	2208	19	2878	19	3744	19	4388
・ 分散成分F		405		636		984		920		931
プロット間平均平方	39	479	39	834	39	909	78	766	78	1445
・ 分散成分P		479		834		909		766		1445
非灌漑 村落間平均平方	21	3276	21	4031	21	4176	21	5422	21	9638
・ 分散成分V		520		744		780		529		1158
圃場間平均平方	27	931	27	1130	27	1086	27	2824	27	2306
・ 分散成分F		388		390		182		531		610
プロット間平均平方	50	321	50	360	50	227	103	640	107	1021
・ 分散成分P		321		360		227		640		1021

Gaya 地方は地理的には4766 平方マイルの面積をもち、稲作面積はその約55%であって4つのSub-divisionに分割されている。抽出計画はGayaのSub-divisionから36、また他の3つのSub-divisionからそれぞれ24宛の合計108村を無作為に選ぶものであった。選ばれたそれぞれの村から2つの稲を作付けた圃場を選び、それぞれ選ばれた圃場の中から5つのプロットを無作為に位置づけ(marked)た。

(a) 33フィート×16½フィートの一つの矩形(面積: 544.5 平方フィート) ;

(b) それぞれ5フィートの二辺をもつ二つの二等辺三角形(面積 12.5平方フィート) ;

(c) 一辺が15リンクの正三角形(面積: 42.5平方フィート)

更に圃場全体を収穫することが計画されたが、しかし全圃場を収穫することは進行中の課税計画の面から、耕作者の誤解を招きやすく、また彼等の側の非協力のものとなるという州政府の助言をとり入れてこの計画は放棄された。(a)および(c)のプロットは巻尺と杭で位置づけたが(c)のプロットは、以前この地方でMahalanobis [9] が考案し、使用した携帯用の器具を用いて位置づけられた。圃場内のプロットはすべて乱数の対で位置づけたが、これらの位置づけと収穫は圃場の南西の隅から開始された。この実験は作付面積の圃場毎の全数調査のために、この地方に配置された巡回調査官によって実行された。調査を始める前に巡回調査官をすべて地方政府に集め、外乗実行の訓練を行なった。この外乗は地方の監督官Biharによって監督された。著者らGaya Sub-divisionの一つの村において作業を視察した。後者のSub-divisionの二つの村での試験は、他の圃場の作物が、この目的のために定められた日付以前に耕作者が収穫してしまつたので、二つでなく一つの圃場のみについて実行された。結局この計画に従って収穫することが定められた全部で1080個のプロットの中、1030個が収穫された。表5表は種々の大きさのプロットから得られた平均収量の推定値をエーカー当りのボンドで示している。この結果は各Sub-divisionおよび全体としての州毎に示してある。後者はSub-divisionの推定値を色々のSub-divisionの稲の作付面積に比例して組合せることによって計算されたものである。収量推定値はプロットが大きくなるにつれて減少する。この表から12.5平方フィートのプロットから導かれる推定値は25%の過大推定値を与えることがわかる。42.4平方フィートのプロットで25%に近い過大推定値を与える。両方の場合とも収量推定値は矩形プロットで与えるものより有意に高い収量を与えることがわかる。12.5平方フィートのプロットでの過大推定の傾向はすべてのSub-divisionについて一致していることがわかる。この結果からMoradabadの試験での結果、即ち普通これらの試験の実行を要求されている官庁職員が、携帯用器具を用い

て設定した小プロットを用いることには危険を伴うということが確認された。この結果は、7人を下らない調査官が互に独立に調査をしたものとしては著しいものと考えねばならない。

表5 種々の大きさのプロットに対する稲のエーカー当り平均収量(ボンド)

Sub-division名		Gaya		Aurangabad		Jahanabad		Nawadah		地 方			
プロットの大きさと形	面積 (平方フィート)	プロット数	平均収量 (ボンド)	プロット数	平均収量 (ボンド)	プロット数	平均収量 (ボンド)	プロット数	平均収量 (ボンド)	プロット数	重さ平均収量 (ボンド)	標準誤差	過大推定率 (%)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
30フィート x 16フィートの矩形	544.5	70	391.98	48	1074.65	48	1096.05	48	963.47	206	991.54	49.37	-
一辺9.9フィートの正三角形	42.4	140	941.35	96	1037.32	96	1459.75	80	924.39	42	1078.77	40.07	3.6
一辺5フィートの直角二等辺三角形	12.5	140	1178.35	96	1182.62	96	1472.08	80	1092.75	42	1221.42	65.01	23.1

表6 (10xボンド/エーカー)²で表わしたプロット収量の分散分析

Taluk 名		Bander		Bezawada		Divi		Gannavaram		Gudivada	
プロットの大きさと形	面積 (平方フィート)	プロット数	平均収量 (ボンド/エーカー)	プロット数	平均収量 (ボンド/エーカー)	プロット数	平均収量 (ボンド/エーカー)	プロット数	平均収量 (ボンド/エーカー)	プロット数	平均収量 (ボンド/エーカー)
全圃場		18	1314.3	18	2665.0	18	2147.7	18	2404.7	18	1855.2
50x20(107) ²	424.60	18	2225.7	18	2677.4	18	2222.8	18	2427.8	18	1890.3
30フィート ①	28.29	36	1179.8	36	2784.6	36	2156.5	36	2632.3	36	1686.8
20フィート ②	12.57	36	1274.6	36	2967.6	36	2230.1	36	2961.4	36	1941.6
5フィート Δ	11.12	36	1145.3	36	3016.0	36	2191.6	36	4271.1	36	1806.4

Kaikalur		地 方			
プロット数	平均収量 (ボンド/エーカー)	プロット数	平均収量 (ボンド/エーカー)	平均収量の標準誤差 (ボンド/エーカー)	過大推定率 (%)
18	1533.1	108	1939.2	107.3	
18	1637.5	108	1954.1	105.3	.8
36	1636.8	216	2025.9	125.8	4.5
36	1601.3	216	2113.2	129.1	9.9
36	2506.3	216	2433.4	161.7	25.5

表7 (10xボンド/エーカー)²で表わしたプロット収量の分散分析

プロットの形と大きさ	村落内平均平方	V	圃場間平均平方	F	プロット間平均平方	P
I. 30フィート x 16フィートの矩形プロット	4922 (100)	1706	1544 (12)	1544	-	-
II. 一辺9.9フィートの正三角形プロット	14529 (100)	2496	4641 (12)	2173	294 (206)	294
III. 一辺5フィートの直角二等辺三角形	17378 (100)	3076	5194 (12)	2211	772 (206)	772

表8は第5節、村落内圃場間、圃場内プロット間の平均平方の推定値とこれから導かれる村間V、村内圃場間F、圃場内プロット間Pの分散成分を与える。こゝでもV、F、Pは何れもMonadabadの試験でみられたように、プロットが小さくなるに従って増加する。

Kistnaに於ける稲の調査

こゝで、現在までに実行されたすべての調査結果を述べるつもりはないが、上に述べたGaya地方の調査と同時に実行されたMadras州のKistna地方で実行した一つの調査の結果は特に興味をひくであろう。それはKistnaにおいては圃場全部を収穫したからである。

Kistnaの調査でもう一つ違っている点は調査員が農務省から派遣された人々で、すべて農業大学の卒業生であったことである。統計計画は調査の

* () 内の数字は自由度を表す。

ために選ばれた6つの Talukas 間に均等に配分された全部で36の村を抽出するものであった。選ばれたそれぞれの村において、稲を植付けたすべての圃物の中から無作為に3つの圃物を抽出し、この各々の圃物の中に次のようなプロットを位置づけた。

(a) $\frac{1}{100}$ エーカーの矩形プロット1つ(50リンク×50リンク)これは Madras 州で公式に採用されたいる大きさのプロットである。

(b) それぞれ半径が3フィートの円形プロット二つ

(c) それぞれ半径が5フィートの円形プロット二つ

(d) それぞれ一辺が5フィートの正三角形プロット二つ

そうして更に、圃場の残りの全部が収穫された。一般的な方法は前の計画と同じである。調査員は前もって訓練され、境界の植物についてのすべての可能な警戒策を演習することが要求された。

オ7表はこの結果を示す。すべての Talukas において標準の $\frac{1}{100}$ エーカープロットから得られた収量推定値と全圃場の収穫で得られるものとはよく一致していた。何れの Talukas においてもまた地方全体についても抽出誤差で説明できる以上の差がみられなかったが、これは $\frac{1}{100}$ エーカープロットがエーカー当りの不偏推定値を与えることを示すものである。これはこの州の Tanjore 地方の稲について以前行なわれた調査の結果を裏づけするものである(2)。しかし大部分の Talukas においては小プロットから得られる収量推定値は全圃場を収穫して得られるものと相当違っている。観測された偏りは常に正(過大推定)であったわけではなく、少数の負の場合があった(過少推定)。注意しなければならないことは、この偏りは、多数の調査員の結果を地方全体でプールしても取除けないということである。オ8表は平均収量の地方の推定値の統計分析の結果を示している。 $\frac{1}{100}$ エーカーの矩形プロットから得られた収量推定値は全圃場から得られたものと統計的に一致しているが、小プロットから得られた収量推定値は後者と有意に異なっている。従ってこれらの結果は Moradabad および Gaya の調査でみられたものと一致している。

オ9表に圃場間(V)、圃場内圃場間(F)、圃場内プロット間(P)の平均平方の推定値および分散のV、F、P成分を与える。これによればV、F、Pはすべてプロットが小さくなるにつれて増加するこゝとがわかる。従ってこの結果は Moradabad および Gaya の調査でみられたものと同じで、小プロットでは圃場間および圃場内圃場間の真の分散の不偏推定値が得られないことを示している。

結局この調査は携帯可能な桿で位置づけられ、労務者を備え入れず調査者だけで収穫し得るような小プロットでは収量の不偏推定値を簡便に入手できると考えられない。この危険はインドのような作物が不均等に耕作されていて、試験を税務および農務保官の正規の業務として行わねばならないところでは特に重大である。これに反して $\frac{1}{100}$ エーカー程度の大プロットではこの偏りが生じないことが明らかとなった。

作物収量の変異性を説明する 実験的法則について

An Experimental Law Describing Heterogeneity the Yield
of Agricultural Crops.

By Fairfield Smith "

(Jour. Agric. Sci. Vol.28, 1938 より)

作物収量の変異性を説明する実験的法則について

An Experimental Law Describing Heterogeneity The Yields
of Agricultural Crops

H. Fairfield Smith

(Jour. Agric. Sci. Vol. 28, 1938より)

／ 緒 言

圃場試験の効率増進のために最良のプロットサイズを求めるとい
う問題は、これまで数多く議論されている。これを定めるために多
くの研究所で blank experiment (ときに uniformity trial とよ
ばれることもある) が行なわれているが、これは圃場の生産物を多
数の小プロットについて収穫するものである。隣接する単位のデー
ターを組合せることによって色々な大きさ及び形のプロットに対す
る収量をきめることができ、またそれらの変異性が比較される。こ
れらの実験で得られるデーターはある点では十分に一貫性をもつも
のであったが、しかし何か特定の目的のために最良のプロットサイ
ズをこれらの試験から決定する方法については何の提案もなされて
いない。実際 blank experiment の結果を導びくのに普通に用いら
れている方法は、この点についても、また他の点についても屢々誤
解を導びきやすい。

与えられた条件の組に対して最良のプロットサイズを求めるのに
よく用いられる方法は Fig. 2A のような図を調べるものである。こ
れは小麦の blank experiment のデーターで 1/4 平方フィートの単位プ
ロットを用いている。その要旨をのべると単位面積の 1 倍から約 4
倍の間ではプロットサイズが増加することによる変異性の減少が大
であるということである。プロットサイズが単位面積の 6 倍以上に
なると変異性の減少度は僅かである。結局最適なサイズは単位面積
の 4 ～ 6 倍の間にあるというものである。

この論法は最大曲率の範囲は観測値をプロットした座標のスケ
ールによって定まるといふ条件を見落している。Fig. 2B では横座標
の目盛を 2 倍に、また縦座標を 1/2 になおしてある。普通ならこの曲

線は、単位プロットが1平方フィートでなく、3平方フィート($x=6$)のときに画かれるものである。この場合の結論は、最適なサイズは24~36単位の間ということになるであろう。変異性減少の相対的な割合は、調べているプロットサイズの全範囲について同一であり、従って上記の論述の誤まりであることがわかるであろう。

更にプロットサイズの増大による変異性の減少を、隣接する地域間の肥沃度が無相関であると仮定した場合、あるいは、単位プロットを無作為に反復した場合に生ずるような減少と比較するというような非科学的な取扱い方がよく行なわれる。後者の条件はFig 8および3の実線で表わされる。この曲線は比較には便利だが、隣接地域間の相関が0という仮定が成立するとも思えない(Harris 1915 1920 が示したように)から、それを理論的に期待される¹とよぶことは誤解を招く。このようにして生じた混乱は最近の研究者 Wiebe (1935) をこれと反対な、即ち、観測された曲線といわゆる理論的曲線の不一致は相関によるものであるとして各プロットサイズに対する相関係数を計算し、これから通ってトキロの場合の理論的変動係数を計算するという誤まりに誘い込んだように思われる。しかし彼はある法則に適合する実の軌跡という代数的な意味においての理論的曲線は何も計算していないから、観測値と計算値との一致も、計算が正しかったという以外には意味をもたない。

土地の異質性を表わすのによく用いられる方法は、Fig 1 にならって、等地位曲線を画くことである。この特殊な地図は、中心を1フィート間隔にとった8×8フィートの方形プロット(すなわち移動平均)を示すために隣接の16平方フィートの単位を一緒にしたもの²の収量から作ってある。しかしこれまでの大多数のblank experimentで用いられてきた単位プロットは細長いもので、異質性を表わす地図はそのように単位から作られてきた。これらと比較するためFig 5において述べる圃場で、圃場を横断する二方向に沿って長方形プロットを作り、その収量からもう一つの地図を作った。このようにして得た等地位線は、プロットの長辺の方向がどんな方向であるにして

もこの方向に沿うものが圧倒的に多いことがわかった。これは細長いプロットは、等地位線がプロットの長辺を横切っているような場所では、それを表わすのに十分な数の実を与え得ないためである。そのためプロットを直角方向の変動は一見プロットと平行な方向の変動よりも大きいように見えるが、屢々生ずるそのような外見もこの例と同じく全く架空のものである。

これまで土壌の異質性を見るための満足すべき計量的尺度は考えられていない。Harris (1915) は、異質性の係数(coefficient of heterogeneity)として連続した地域に対する収量の級内相関係数を用いることを提案した。しかし多くの研究者がそのデータについて労を惜しまずこのような係数を計算したにもかかわらず、隣り合った地域の肥沃度に相関があることを示す以外の目的に役立ちそうには思えない。このことは殊に優れているとはいえないまでも、はるかに手数のかゝらないFig 8のような図を用いても同様によく表わすことができる。

幾つかの圃場ではある方向の肥沃度の変動が他の方向よりも大きいということが多数のblank experimentで示されている。そのような圃場では長辺を土壌の変動性の大きい方向にとったプロットの方が変動性の少ない方向にとったものより変化が少いから、プロットの形状に注意しなければならない。このような圃場でブロックを作るのに色々な形のプロットを配列することは危険であって、文献に報告されている明らかに変則的な結果の幾つかはデータを勝手に配列されたブロックに群わししたことに原因するものである。変異性に影響を与える独立な因子としてのプロットの形状については最も包括的な議論がChristidie (1931) によって与えられている。かなりの観測データによって裏づけされた理論的検討によってChristidieは如何なる場合においても正方形プロットが細長いプロットよりも一様(斉一)となることはあり得ない³と結んでいる。

残念なことにこの推論の前提にはブロック内のプロットの配置に関し実際と一致しないような制限が含まれているが、これは今迄見

落されてきたように思われる。例えば Day (1920)、Wood & Stratten (1909) などの発表している細長いプロットはそれらの向きによっては幾分正方形プロットよりも変動が大きくなることがあるというデータからも示すことができる。それにもかゝらず細長いプロットの変動が平均して正方形のプロットよりも少ないという傾向は、実際ありそうである。これは隣接した地塊では離れたところよりも相関が高くなり易いという観察と一致している。

2 小プロットによる小麦の Blank experiment

既往におけるすべての Blank experiment の結果は、与えられた地域についての最大精度が他の要求と両立する最少のプロットによって得られることを示している。統計分析を主とする収量試験では仕事の大部分が「試験地面積」に直接比例するからこれは必要なら、プロットを1本の植物が占める面積にまで小さくしてもよからう。そのような極端な状況では試験地の保護帯の割合が不都合になるが、試験地を効果的に利用するという面での利益が十分大きければ、相殺されるであろう。それでもプロットに対して1本の植物というのは効率約とは考えられないから、上記の原則のあてはまるプロットサイズの最小限界についての知識を得る目的で、1934年に Canberra において小規模な Blank experiment を行った。

試験の概要

Woodfield dibber⁽¹⁾を用いて Waratah 種の小麦を6インチおきの畝 (Yow) に間隔2インチ、深さ2インチで一様に播きつけた。収穫の際(1934年12月)には同級効果を避けるために両側の4つの畝と各畝の両端1/4フィートを収穫した。残りの——15フィート(30畝)×36フィート——を1080個の1/4平方フィート(畝の長さ1/4フィート)のプロットとして収穫した⁽²⁾。プロット当りの植物の数の平均は(6粒播きつけた中)5.02であった。穀粒の収量と稈長あたりの穂の数についての全データはサ

(1) Woodfield dibber は Christ Church にあるニュージーランド小麦研究所の C. E. Woodfield 氏が考案製作したものである。これは研究所年報の1(1930) p. 6 に記述されている。

クスケンジントンの Natural History Museum の書庫とキャンベラの Division of Plant Industry に保管される。

この地域の土壌の変異は断片的で、すべての方向について同様な変動がみられた。これは2ft平方のプロット収量の移動平均から作った導地位曲線 (Fig. 1) および列間 (Between column) と畝の間 (Between pairs of rows) (幅が1ftとなるように対にしたから、列と比較できる) の平均平方が4739と4560のように類似していることによって確かめられる。

単位プロットから得られた収量の分布は対称で、ごく僅か偏が扁平¹⁰になっているところだけが正規分布と違っている——すなわち μ は真であるがその値が小さい (Fisher, 1932, 514)。

種々の大きさおよび形状のプロットに対する分散を次の表に示す。
プロットの形状

第1表はプロットの形状が変わっても変動性には一貫した違いの生じないことを示している。任意の、特定のプロットサイズに対する差はどの場合でも統計的に有意でなかった。

プロットの大きさ

Fig. 2 はこれまでに報告されたすべての Blank experiment において観察されたのと同じく、プロットが大きくなるにつれて変動性が減少するが、このような減少は同等な確率的反復 (Random replication) で得られるものより小さいことを示している。

プロットの大きさに対する変動性の回帰は、観測値を両対数方眼紙にプロットすると一層よく理解できる (Fig. 3)。それはこれらの条件のもとでは直線になる。このことは、プロットサイズの相対増大に対する変動性の相対的減少が、観測値の範囲を通じて同様

(2) この配置は理想的なものではなかった。単位プロットが正方形であつたなら、プロットの型に対する結果の分析は非常に単純になつたと思われる。更に同じ地面積を濃密かつ種々の大きさのプロットを容易に組立てるためには、各方向の単位プロットの数は1/2の倍数でなければならぬ。これらのことは Blank experiment を分析したこのある研究者であれば誰でも気付くものであつた。しかしこの実験上の知見は最初の設計において殆んど見逃されている。

(3) これは K. G. Kanster の述べた確率紙を用いて、グラフ上から求めた。

である。いゝ換えれば同一の割合で変動性が減少することを意味している。

この関係は

$$\log V_x = \log V_1 - \delta \log x$$

なる方程式で表わすことができる。但し V_x は面積 x 単位のプロットに対する単位面積当り収量の分散である。分散は様々なプロット個数から推定したから、回帰をあてはめる場合には、各点にその分散の逆数の重みをつけなければならない⁽⁴⁾。これらのデータに直線回帰をあてはめる際の従属変数の観測値は分散の対数である。分散の対数の分散の $1/n$ 近似としては

$$\left\{ \delta (\log_e \delta^2) \right\}^2 = \left\{ \frac{2.4 \delta \delta}{\delta^2} \right\}^2 = \frac{2}{n}$$

をとることができる。ここで $\delta \delta = \delta / \sqrt{(2n)}$ は δ の標準偏差で、これは δ の平均値に比して小さいと考えられる。また $\delta^2 = V$ で、 n は分散の推定に用いられた自由度である。そうすると、回帰は n に逆比例する重みをつけて

$$\log_{10} V_x = 3.3298 - 0.7486 \log_{10} x$$

すなわち

$$V_x = \frac{2137}{x^{0.7486}}$$

なることがわかる。ここで V_x すなわち $\sqrt{V_x}$ は $1/4$ 平方フィートあたりの $1/16$ グラム数であり、 x は $1/4$ 平方フィートの単位数である。係数 δ (0.7486) の見せかけの標準誤差は ± 0.0132 である。

3 これまでに報告されている Blank experiment の概要

キャンベラ Blank experiment で観察されたようなプロットサイズと変動性との関係の方程式が、公刊された他のデータにも一般的にあてはまるかどうかをきめるための検討が行なわれた。オス表

(4) 曲線あてはめの統計的方法は、各観測値が独立であるという仮定のもとになり立っている。

いまの場合、この条件は完全には満たされないが、しかし我々に必要なことは経験的な関係を表わす標準を求めることであつて、有意性検定は二義的な意味にすぎないのである。

と Fig 4 は 39 個の Blank experiment の結果である。信頼し得る結果を与えるにはあまりにもプロットの数が少ないとか、あるいは我々の目的に都合の悪い形で発表されている小数の試験を除けば、

Fig 4 にはキャンベラ図書館において利用することのできたすべての公表された研究の結果が含まれている。最良の直線を計算によってあてはめることのできた WA および P を除いて、直線回帰はフリーハンドで引いたものである。

一般にプロットサイズに対する標準偏差の対数の回帰は大体において直線であることが明らかである。圃場 P、WA および WB では上に反る傾向が見られる。甘藷についての 4 つの試験 (FA から FH まで) では、その各々について二つの回帰が示されている。その一つは単一畝 (Single row) (被線) のプロットのもので、一つは畝を幾つかまとめて作ったプロット (Multiple row plot) のものである。しかし着着 (Thompson P 395) は、単一畝のプロットの方が変動が犬になり、また甘藷の耕作方法の特性によって同じ畝の中では相関が高くなると予想される理由をあげているから、このことは土壌の変異性とは多分無関係である。圃場 HB、L、U、X および Y ではプロットの形状によって結果が変わっているが、これは土壌の変動がある方向では他よりも大きいことを示している。

観測された回帰係数の値については、幾つかの理論的な問題に注意してから後節において論ずることにする。作物、土壌、または時期の違いによって生じた係数の変動の大きさは、いまのデータからは十分に定めることができない。観測値の誤差によって相関は低くなる傾向があり、しかも回帰係数は隣接地域の相関の函数であるから、耕作技術、すなわち耕耘、収獲、脱穀、秤量の誤差および植物の遺伝的な変動性によって、 δ の観測値は土壌のみに固有な値に比べて大きくなる傾向がある。土壌のみに固有な係数を求めることは理論的に興味あることであろうが、しかし、目下のところこれらの随時的変量の効果を分離することは不可能と思われる。しかしこれは、実際上は殆んど問題にならない。何故なら実験を計画する目的

からいえばそれらは当然試験に含まれるべきなのであるから、それらはおそらく作物の異なるに従って変るであろう。

適当な常数が与えられれば

$$\log V_x = \log V_1 - b' \log x$$

なる回帰は、観測された圃場の土壌および植物の異質性を表わすものと考えられよう。異なる作物および土壌に対するプロット収量の変動性を比較するため、Fig. 4にみられる回帰を変換して、平方フィートで表わしたプロットサイズに対する変動性の係数の回帰を示した。この結果をFig. 5に示す。標準のプロットサイズ(400エーカー)に対する対応する変動性の係数および平均収量は表に与えられている。

作物は大雑把に3群に分けられる。小麦、トウモロコシ(Mangolds)、甜菜、大豆、モロコシ(馬糧)は最も変動が少ないように思われる。トウモロコシ、馬鈴薯、甘藷、綿、および牧草は中間で、果樹は最も変動が大きい。

4 ブロック内の分散

Blank experimentから導かれた結果を近代的な試験業務と調和させるためにはブロック内における色々な大きさのプロットの変動性を考えなければならない。一見このことは問題を複雑化するように思われる。というのは色々な大きさおよび形状のプロットと色々な大きさ形状のブロックとを組合せる可能な場合の数は非常に多いからである。しかしもし形状が無視できれば、種々の大きさのプロットの変動性を与える一般的法則が得られるから、ブロック間、ひいてはブロック内の分散を表わす式をも導びくことができる。

第2および3において、我々は単に試験に用いられた圃場の全地域にわたるプロットの分散を考えた。しかし圃場の大きさは全く任意であって、与えられた如何なる圃場も更に大きい圃場の1つのブロックと考えることができる。したがって、分散を測定した地域を指示するようにこの用語をもっと正確に定義することが賢明である。

m 個のプロットからなるブロック上での x 単位の面積のプロットの単位面積あたり収量の分散を $(V_x)_m$ とおく。そうすると n 個のプロットの圃場に対して実験的に観測された回帰は

$$\log (V_x)_n = \log (V_1)_n - b' \log x$$

である。しかし圃場の大きさ n が任意に固定され、またこの回帰が理論的に妥当であるとすれば、この回帰は我々が分散を求めなければならぬ地域と考えるかもしれない任意の他の大きさの圃場についても成立する。しかしもし n が変れば、上述の回帰ははじめに定められた以外の任意の値については弯曲してくる。従ってこの回帰は、実験的法則は圃場の大きさが変わっても変わらないという要求と相反する。

この難点は、観測された圃場が単一ブロックとして表わされるような無限に大きい圃場を想定し、この法則が、

$$\log (V_x)_\infty = \log (V_1)_\infty - b \log x \quad (1)$$

すなわち

$$(V_x)_\infty = \frac{(V_1)_\infty}{x^b} \quad (2)$$

であると仮定すれば克服される。

$b=1$ の場合、これは x 個の独立な単位の平均値の分散に対する普通の公式を与える。

ブロックは単にサイズの大きいプロットにすぎないから、ブロック間の分散は同じ方程式から推定できる。したがって m 個のプロットからなるブロック内の x 単位のプロットの分散は次のような分散分析によって与えられる。

ただし n は ∞ に近づく。

	D.F.	平均平方
ブロック間	$(\lambda - 1)$	$m (V_{im})_\lambda$
ブロック内	$\lambda (m - 1)$	$(V_x)_m$
計	$(\lambda m - 1)$	$(V_x)_{\lambda m}$

このとき、極限においては

$$(V_x)_m = \frac{m (V_x)_\infty - m (V_{xm})_\infty}{m - 1} = \frac{m (1 - m^{-b}) (V_x)_\infty}{m - 1} \quad (3)$$

となる。

m および n の値が与えられれば、 $(Vx)_m / (Vx)_\infty$ は x に無関係に常数である。よって隣接するプロットどうしは m 個のプロットからなる一つのブロック内のプロット当り分散が、プロットの大きさにかかわらず無限に大きい圃場内におけるプロット当り全分散に対し同一比率を示すというような形で関連している。換言すれば m プロットの群間の級内相関はプロットの大きさがどうでも同一であるということである。

この仮説のもとにおいて y および z に記録された分散は

$$\log(Vx)_{n/x} = \log(Vx)_\infty - b \log x + \log \frac{n(n^b - x^b)}{n^b(n-x)} \quad (3)$$

なる形の回帰と一致しなければならない。これは僅かに下に凹な曲線であるが、曲線的傾向がはっきりするのは z/n が $1/10$ に近くなるときだけであって分散はこの範囲ではうまく定まらないから、曲線的傾向はこれまでの節で用いた方法では検出できない。

しかしながら、有限な圃場に対する回帰から推定された b の値は無限圃場に対する同等な b とは事実上異なるであろう⁽⁵⁾。観測された b を同等な b に変換するのに最もてっとり早い方法は、与えられた z/n の範囲にわたって b の値の系列の修正量を求めることである。これは図上で行なわれた。得られた修正量を次表に表わす。

b	1.0	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4
z/n の 0.001 から 0.01 までの範囲での b	1.0	0.804	0.710	0.617	0.528	0.443
z/n の 0.01 から 0.1 までの範囲での b	1.0	0.822	0.738	0.656	0.578	0.504
b	0.35	0.3	0.25	0.2	0.15	0.1
z/n の 0.001 から 0.01 までの範囲での b	0.403	0.364	0.326	0.291	0.257	0.226
z/n の 0.01 から 0.1 までの範囲での b	0.469	0.434	0.402	0.371	0.343	0.312

(5) 観測された b の値は幾分かは観測された単位フロントの個数に依存することに注意しなければならない。この条件は実際のデータから示すこともできるし、また理論的な無限圃場に対する法則のみならず対象の直線回帰が与えられた大きさの有限圃場に適用できるという仮説からも推論することができる。

方程式 (2) はブロック当り m プロットを有する乱塊法試験のブロック当り n プロットの試験に対する相対的効率が

$$\frac{(Vx)_n}{(Vx)_m} = \frac{n(m-1)(1-n^{-b})}{m(n-1)(1-m^{-b})} \quad (4)$$

であることを示している。

ブロックの大きさを変えるときの実験誤差に対する影響を示すものとして、色々な m および n に対する $(Vx)_m$ の曲線を $(Vx)_\infty$ を 1 にとって画いたものが Fig 6 である。これらの用法の一側として、40 個の処理をもつ試験を行うものとし、40 個のプロットのブロックを用いる一元配置 (Simple Lay-out) と比べてブロックの大きさを第 1 少できる複雑な試験 (例えば、交互作用を交絡したり、あるいは "Pseudo-factor" を用いる (Yates, 1935, 1936) ことによつて) を採用するのが得策かどうかを知りたいものとする。この圃場の変異性の係数 b が 0.2 になることが予想されれば、5、10、20、40 プロットブロックの相対的効率の期待値は

$$\frac{0.535}{0.344} : \frac{0.535}{0.410} : \frac{0.535}{0.475} : \frac{0.535}{0.535} = 1.56 : 1.30 : 1.13 : 1$$

であるから、小ブロックを用いる努力をするだけの価値が大いにあることになる。しかしもし b の係数が大体 0.7 であれば相対的効率は

$$1.12 : 1.06 : 1.03 : 1$$

にしかならないから、簡単なデザインでの大ブロックの単純性を保持するのが最良であろう。

上記の (2) の誘導と同様な方法で、特定の方向的変異性が存在しない (したがってブロックの形状は重要でない) ような場所では、 $m \times m$ ラテン方格の誤差分散が

$$(Vx)_{m_2} = \left\{ \frac{m(1-m^{-b})}{m-1} \right\}^2 (Vx)_\infty$$

で表わされることを証明できる。

y および z で与えられる調整された b の係数の度数分布は

調整された $\bar{x}$ 0.05- 0.15- 0.25- 0.35- 0.45- 0.55- 0.65- 0.75- 計
0.15 0.25 0.35 0.45 0.55 0.65 0.75 0.85

度 数 4 4 8 6 7 4 3 1 37

である。この平均値は 0.4 であるが、 $\bar{x}$ の極限値は 0 と 1 で、この範囲の $3/4$ には観測値があるから、条件の多様性は非常に大きい。

5. プロットの最適な大きさ

1 方程式 (14) および (2) から m プロットのブロック内の大きさ x のプロット当りの情報は

$$\frac{1}{(V_x)_m} = \frac{(m-1)}{m(1-m^{-b})(V_1)_\infty} \frac{x^b}{(V_1)_\infty}$$

である。プロット当りの費用は直線回帰

$$K_1 + K_2 x$$

で与えることができる。このとき情報量の単位当り費用は

$$\frac{m(1-m^{-b})(K_1 + K_2 x)(V_1)_\infty}{(m-1)x^b} \quad (4)$$

である。これは

$$x = \frac{b K_1}{(1-b) K_2} \quad (5)$$

のとき最小である。これは任意の与えられた試験に対する最も効率的な大きさを推定するための公式を与えるものである。これは利用可能な面積とか、処理の誤差分散を任意のきめられた値にまで縮小するのに要すると思われる個数から定まるプロットの個数によっては影響を受けない。

6 保護プロット (Guarded plots)

重要試験においては、全プロットの間接の保護地域を取除くのが普通である。この条件の影響はこれまでの節では無視してきた。

ある地域を相隣る n 個のプロットに分割し、一つおきのプロットを保護地域にとるものとする。そうすると n がもし偶数なら、次の

ような分散分析が得られる。

	D, F
実験プロット間, E	$\frac{1}{2}n - 1$
保護プロット間, G	$\frac{1}{2}n - 1$
$\bar{E} - \bar{G}$	/
計	$n - 1$

$\bar{E} - \bar{G}$ の平均平方は他の二つの成分より小さいように思われる。というのは隣接プロット間の比較に依存するものであるが、 n が大きければ E 間と G 間の平均平方は全体の平均平方より僅かしか大きくならないから、実際目的には、近似的に両者が等しいと考えてよいからである。

この論法をおし進めれば、それぞれ x なる "試験地域" をもつ m 個の保護プロットの総面積が、同じ面積 x の保護帯をもないプロットの m 個のと同じであれば、 m 個の保護プロットのブロック内分散は $(V_x)_m$ に等しいことになる。したがって §5 の手続は簡単な修正で保護プロットにも適用できる。

故にブロックが相隣る単一の試みのプロットから構成されるなら、端末の保護地域 (面積 A) はブロックの外側にあると考えることができる。側面の保護地域の占める面積は "試験面積" x に対して

$$B = (W - w) / w$$

なる比率を占める。ここで w は試験地域の幅で W は試験地域 + 保護地域の幅である。単位面積の保護地域を取り扱うための費用を K_g とするとプロット当りの費用は

$$K_1 + K_2 x + K_g (A + Bx)$$

で与えられる。したがって前と同様にして、単位情報あたりの費用は

$$x = \frac{b(K_1 + K_g A)}{(1-b)(K_2 + K_g B)} \quad (6)$$

のとき最小であることがわかる。

7 効率が最高でないプロットサイズを用いるときの費用

方程式 (4) によって単位情報あたりの費用は

$$\text{Const.} (K_1 + K_2 x) x^{-b}$$

と与えられ、その最小値は

$$x = \frac{bK_1}{(1-b)K_2} = x_0$$

なるときである。効率の最高でないプロットサイズの場合の相対的費用は

$$y = \frac{\text{費用}}{\text{最小費用}} = \frac{bZ^{(1-b)} + (1-b)Z^{-b}}{bZ^{(1-b)} + (1-b)Z^{-b}} \quad (7)$$

$$= \frac{b e^{(1-b) \ln Z} + (1-b) e^{-b \ln Z}}{b e^{(1-b) \ln Z} + (1-b) e^{-b \ln Z}} \quad (8)$$

ただし Z は x/x_0 で、最も効率の高いプロットサイズに対する用いられたプロットサイズの比である。

オス式 (8) の方が計算にもまた対称な相対的プロットサイズの尺度を与えるにも都合がよい。興味あることは $b=0.5$ とすると (8) が双曲線の方程式となることである。Fig 7 は $b=0.3, 0.5$ および 0.7 の曲線を示したものである。 $b=0.5$ のときの効率は

最適サイズの2倍または1/2のプロットの場合	96%
4倍または1/4	80%
8倍または1/8	63%
16倍または1/16	47%

である。最適サイズの1/4から4倍の範囲では、 b の値はこれらの推定値にあまり関係しない、この範囲の外では b が 0.5 より小さくなると、小さすぎるプロットを用いるときの方が非常に費用が大となる。また b が 0.5 より大きくなればこれと逆の傾向が生ずる。

与えられた試験について最も効率のよいプロットサイズを推定する計算例

研究的な収量試験では植物の本数とか芽や穂の数を数えたり、麦わらや穀粒の重さをはかり穀粒あたりの重さを推定することが必要である。キャンベラ実験圃場での係数 b は約 0.75 と推定されている。Woodfield dipper による播種では畝 (row) を4フィート (プロットの幅) に区切る。この畝の間隔は6インチである。よって $A = 4$ 平方フィート、 $B = 0.33$ である。^(註) 労力以外の費用は無視で

き。またははじめから終りまで同一種類の労力を用いるものとする。

それは過去の経験によれば平均して

(1) 種子の準備	平方フィート当り	0.005 人・時間
(2) 播種	"	0.017 "
(3) 発芽本数調査	"	0.002 "
(4) 作柄本数調査	"	0.062 "
(5) 出穂および開花期目の観測	プロット当り	0.033 "
(6) 収穫前の本数調査	"	0.01 "
(7) 保護帯の刈取り	"	0.001 "
(8) } 収穫と麦束の秤量	"	{ 0.030 "
(9a) }	"	{ 0.025 "
(9) 穂数の数えあげ	平方フィート当り	0.033 "
(10) }	"	{ 0.016 "
(10a) }	プロット当り	{ 0.016 "
(11) 穀粒の秤量	"	0.016 "
(12) 穀粒あたり平均の重量の推定	"	0.06 "
(13) 統計分析		

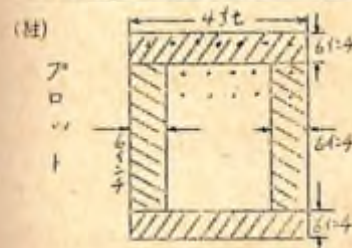
このとき

$$K_1 = (5) + (8a) + (10a) + (11) + (12) + (13) = \text{プロット当り } 0.25 \text{ 人・時間}$$

$$K_2 = (1) + (2) + (3) + (4) + (6) + (8) + (9) + (10) = \text{平方フィート当り } 0.18 \text{ 人・時間}$$

$$K_3 = (1) + (2) + (7) = \text{平方フィート当り } 0.023 \text{ 人・時間}$$

$$x = \frac{b(K_1 + K_3 A)}{(1-b)(K_2 + K_3 B)} = \frac{0.75(0.25 + 0.023 \times 4)}{0.25(0.18 + 0.023 \times 0.33)} = 5 \text{ 平方フィート}$$



$$A = \text{図の面積} = 6 \text{ft} \times 2 \times 4 \text{ft} = 4 \text{ 平方フィート}$$

$$\text{また } W = 4 \text{ft}, \quad W = 4 \text{ft} - 2 \times 6 \text{ft} = 3 \text{ft}$$

$$B = \text{図の面積の割合} = (4-3)/3 = 1/3 \approx 0.33$$

9 考 察

大きさに対するプロット分散の回帰というものは、試験研究において普通に考えられている大きさの圃場での経験的な関係である。それは隣接する地域の相関がそれらの大きさにかかわらず同等であることを意味しており、この条件は早晚なり立たなくなるのであるから、この関係を無限に延長することはできない。それにもかゝらず、これによって色々な大きさのプロットまたはブロックの平均の相対的効率を近似的に評価する方法が得られる。係数 b の値は広い範囲にわたって、土壌の変異様式に対する変動の一つの尺度となる。Yates (1935) によって同程度の変動が色々な乱地法およびラテン方格試験の効率の推定値から示されている。変異性が僅かしかわからないとかまたは全然わからないような圃場について、異なる配置の相対的効率を正確に予測することは結局不可能である。おそらく異質的であることがわかっているような圃場での係数 b は低く、また明らかに肥沃度が一律な圃場での b は高いことが予想されようが、しかし b とオミスの変動係数との間に相関のないことは、実際はそのような想定が妥当でないことを示している。現在までに明らかになった限りでは全変動と、色々な肥沃度の分布している様相とは土壌異質性の計量的尺度では別々に考えなければならないような二つの異なる特性であると思われる。しかしながら、最適プロットサイズおよびブロック当りのプロット個数の減少によって生ずる情報量の増加は、 b の値にのみ依存することに注意すべきである。頻繁に試験研究に用うべき圃場について、適切な係数を定めることがどれ位の価値をもつかを述べるとは、与えられた圃場での b が数回にわたって、また色々な作物について同様な値を推定するかどうかについて答えねばならない。この点についてはもし変動様式が一律であったなら、引続く年々のプロットの共分散が、これまでみてきたものよりおそらく一層有用であろうことが期待されるという以外には今のところ何の証拠も与えられていない。⁽⁶⁾

プロットサイズに対する分散の回帰は隣接する地域間の相関の函

数であるから、プロットの形状によってある程度の影響を受けることは理論的にも避けられないものと思われる。それは細長い帯状地域の両端の相関は普通同じ面積の正方形地域の対辺間の相関より低くなるはずだからである。したがって考えられたプロットの形状は回帰にある程度の影響をおよぼすことが予想されよう。プロットの形状の重要性はもちろん特定方向について変異性があらわれるような圃場で著しい(例えば $\bar{y}$ および $\bar{x}$)。変動性の方向が既知で、当然系統性をもつような圃場においては、明らかに特定方向の細長いプロットが要求されるであろう。そのような実情のもとでは、指定された方向に対する二つの係数 b を用いて変異性を記述することがよいと思われる。その一つは考えているプロットサイズを推定するのに適用でき、もう一つはブロックの大きさを考えるのに適用できる。Parker & Batchelor のデータを使用した Yates (1936) が、泉著者の与えた4つの分散のみを用いて導いた Fig 4 の回帰 M の示すより小さいブロックで最高の効率を得たという事實は、プロットまたはブロックの形状が変化したことによるものと思われる。

10 要 約

小麦の Blank experiment のデータから、種々の面積のプロットの面積の対数に対する分散の対数の回帰が近似的に一次であることがわかった。他の39種の Blank experiment の文献に報告された分散等の図上での検討から、それらの実験結果の大部分が同じ法則に従うことが示される。

この回帰係数 b にある種の補正をほどこして、無限に適用できる修正された係数 b を求めれば、上記の法則を(任意の大きさの圃場に適用できるように)拡張し得ることが示された。

(6) この問題に対して用いられるであろうと思われるデータが Summerby (1934) によって、カラスムギムサキウマゴヤシ (Alfalfa) およびトウモロコシの3-5年間の試験についてまた Garber 等 (J. agric. Res. (1926) 33, 255-68) によってのカラスムギの栽培および小麦の2年間の試験について、また (J. Amer. Soc. Agron. (1931) 23, 266-98) 3年間のトウモロコシおよび小麦の試験について与えられている。しかし著者にはこの問題の解決に要する時間的な余裕がない。

この一般化された関係から、係数 α が既知の圃場について、プロット当りのプロット数を変えた場合の乱塊法試験で期待される平均的な相対的効率を示す式(4)が導びかれた。

更に任意の与えられた試験について、最も効率のよいプロットサイズを推定するのに用いることのできる公式(5)も導びかれた。最も効率の高い大きさ以外のプロットを用いたときの費用が Fig 7 のグラフで示された。

謝 辞

上記論文の理論的部分に対して一方ならぬ寄与を賜りまた最終原稿の作成について助力を頂いた F. Yates 氏に対して深甚な謝意を表す。氏の助力ならびに思考の明晰さへの感銘から生れた刺激についてお礼を申し上げるのは私の喜びである。私はまた批判と討論を与えられた W. G. Cochran 氏および M. Barnard 氏およびキャンベラの Division of Plant Industry の所員にお礼を申し上げる。キャンベラの試験に関する計算は E. Bailey, B.Sc. の助力を受けその圃場での作業は D. Meyer および R. Hobson によって行なわれた。

参考文献 (オI表にあげたもの、外に)

- Christidis, B. G. (1931) J. Agric. Sci. 21, 14-37
 Cochran, W. G. (1937) J. R. S. S. Suppl. 4, 233-253
 Engledow, F. L. & Yule, G. U. (1926) The principles and Practice of Yield Trials. Cott. Gr. Corp. London P. 22
 Fisher, R. A. (1925) Statistical Methods for Research Workers, Edinburgh
 Harris, J. A. (1915) Amer. Nat. 49, 430-54
 — (1920) J. Agric. Res. 19, 279-314
 Wood, F. (1935) J. R. S. S. Suppl. 2, 181-223
 — (1936) J. Agric. Sci. 26, 424-55
 — (1937) Ann. Eugen., Camb., 7, 319-32
 — (1937) Tech. commun. Bur. Soil. Sci. Harpenden, No 35



Fig 1 等地位曲線(面積スフィート平方の穀物収量の移動平均による)

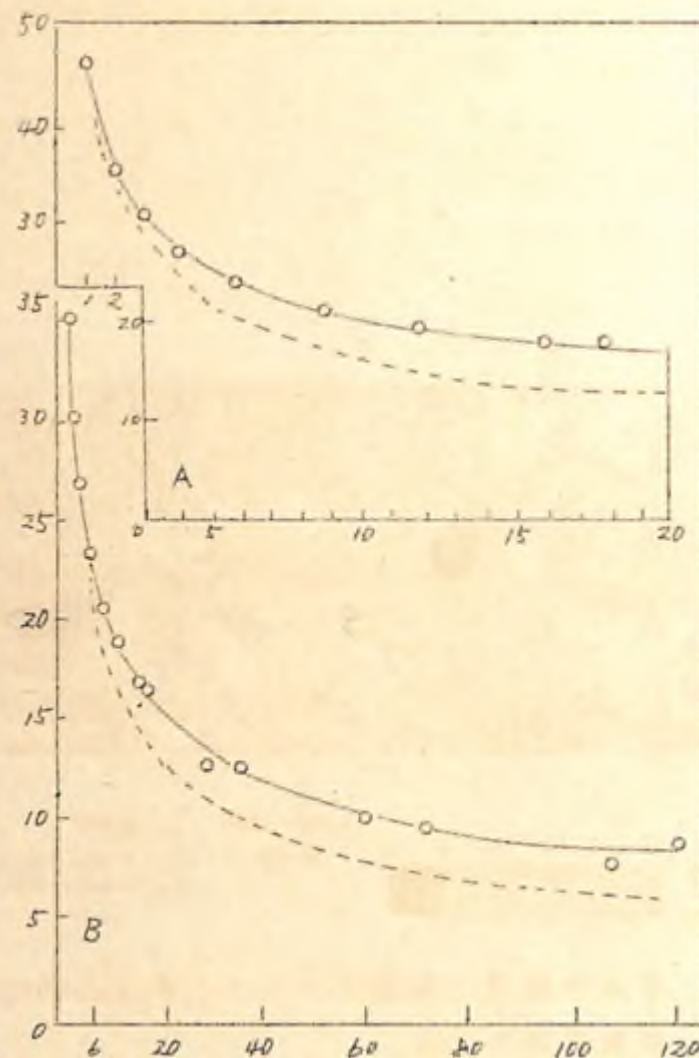


Fig 2 プロットサイズとプロット当り標準偏差、縦軸
1/2平方フィート当り100グラム数で表わしたプロ
ット当り標準偏差(Δx) 横軸: 1/2平方フィート
の単位数で表わしたプロットサイズ(x)
実験は相関のない単位(即ち6単位の2B群で)
を組合せた場合に得られる標準偏差の減少を表
す、実験は方程式

$$\Delta x = \sqrt{(2137/x^{0.746})}$$

を表わす。各点は総面積(表I)にあてはめるこ
とのできる各サイズのすべての形状の平均的分散を表わす。

表I 種々のサイズおよび形状のプロットに分散
(キャンベラ, 1934)

1/2平方フィートの単 位数で表わした プロットサイズ (x)	プロットの形状、 フィートで表わした長さ 畝に直角に 畝に沿って		平方フィート当 り収量の分 散 (Vx) % グラム	自 由 度	用いた面積 畝のフィート数 (全面積=30.36)
1	1/2	1	2201	1079	全体
2	1/2	2	1220	539	+
	1	1	1272	539	+
3	1/2	3	863	359	+
	1 1/2	1	976	359	+
4	1	2	721	269	+
6	1/2	6	524	179	+
	1	3	523	179	+
	1 1/2	2	582	179	+
	3	1	562	179	+
9	1/2	9	413	119	+
	1 1/2	3	426	119	+
	4 1/2	1	450	29	27.10
12	1/2	12	334	89	全体
	1	6	383	89	+
	1 1/2	4	386	89	+
	2	3	326	83	28.36
	3	2	310	89	全体
	6	1	376	71	24.36
15	1/2	15	404	29	30.15
16	2	4	281	62	28.36
18	1/2	18	276	59	全体
	1	9	272	59	+
	1 1/2	6	282	59	+
	3	3	241	59	+

	$4\frac{1}{2}$	2	214	53	27.36
	9	1	275	35	18.36
30	15	1	158	35	全体
36	$\frac{1}{2}$	36	102	29	"
	1	18	178	29	"
	$1\frac{1}{2}$	12	181	29	"
	2	9	171	27	28.36
	3	6	155	29	全体
	$4\frac{1}{2}$	4	159	26	27.36
	6	3	146	23	24.36
	9	2	167	17	18.36
60	$2\frac{1}{2}$	12	98	17	全体
	5	6	77	17	"
	15	2	102	17	"
72	1	36	63	14	"
	3	12	102	14	"
	6	6	96	14	24.36
108	$1\frac{1}{2}$	36	52	9	全体
120	5	12	32*	8	"
	15	4	98*	8	"

* 差は有意でない。 $\bar{x} = 0.550 \pm 0.353$

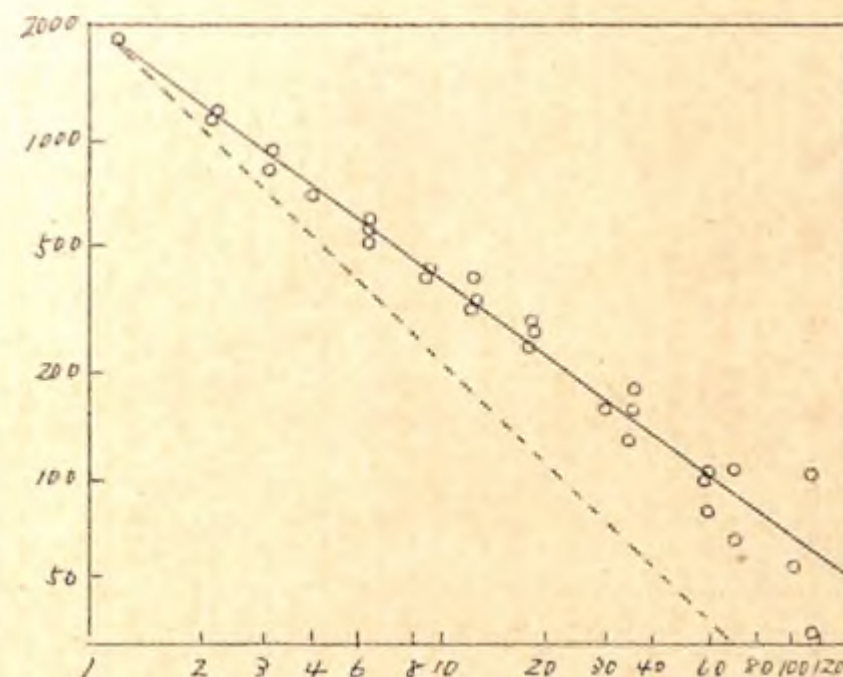


Fig 3 プロット当り分散とプロットサイズとの間の対数関係。

縦軸：プロット当り分散の対数 ($\log s^2 x$)

横軸：プロットサイズの対数 ($\log x$)

実線は Fig 2 と同様 (しかし観測された値でなく回帰から推定された δ^2 の値を通る)。(正確に全面積にあてはめるプロットサイズについてのみ表わした)

表II 変異性の係数の推定値を与えている Blank experiment の一覽表

(Fig 4 をみよ)

作物	場所	単位プロット トリス平方 フィート	実験に おける単位 プロット数	140エーカー プロットの C.V.	平均収量 cwt/エーカー	心	心	著者掲載誌	Fig 4 の記号	Cochran の1覽表 での番号
小麦	Victoria	272	160	5.9	12.2	0.44	0.33	Forster & Vasey Rec Roy Soc Viet (1928) 40, 70	A	119
	Rothamsted	87	500	6.3	17.7	0.46	0.37	Mercer & Hall J. Agric Sci (1911) 4, 107	B	124
	"	082	1092	4.4	19.7	0.54	0.51	Kalamker J Agric Sci (1932) 22, 783	-	123
	Nebraska	30	224	4.9	19.4	0.54	0.49	Montgomery Bull U.S. Dept. Agric (1913) 249	C	126
	Missouri	3.3	3100	{ 3.7 6.9	{ 11.5 11.5	{ 0.80 0.88	{ 0.80 0.47	Day J. Amer Soc Agron (1920) 12, 100		
									U	118
	Australia	0.5	1080	1.7	25.9	0.94	0.72	Smith 二の論文 Fig 3	-	130
	"	2.3	54	3.1	21.5	0.54	0.44	" 未発表 Ab, Fig 5	-	-
灌漑小麦	Idaho	15	1440	10.5	32.6	0.22	0.68	Waibe J. Agric Res (1935) 50, 331	Z	132
トモロシ	Arkansas	242	432	14.2	—	0.21	0.05	McClelland J. Amer Soc Agron (1926) 18, 819	V	23
和シシト	Texas	55	1920	7.9	80.5	0.42	0.35	Stephens & Vinall J. Agric Res (1933) 37, 629	S	91
トシシ(飼料)	Rothamsted	218	200	4.1	58.6	0.48	0.39	Mercer & Hall J. Agric Sci (1911) 4, 107	D	43
甜菜	Minnesota	61	600	5.7	32.6	—	0.50	Immer J. Agric Res (1932) 44, 649	WA	98
	"	61	600	3.8	32.3	—	0.74	Immer & Releigh J. Agric Res (1933) 47, 541	WA	99
馬鈴薯	W. Virginia	35	290	18.9	84.0	0.29	0.18	Westover Bull. W. Va. Dep. Agric (1924) 189	EA	76
	"	35	186	10.5	116.7	0.45	0.37	"	EB	76

	W. Virginia	35	192	16.8	58.3	0.46	0.39	"	EC	76
	"	35	258	16.4	91.4	0.46	0.40	"	ED	76
	"	35	3309	25.1	56.4	0.32	0.26	"	EE	76
	Saskatchewan	66	576	—	—	—	0.71	Kalamkar J. Agric. Sci (1932) 22, 373	X	72
	Ormskirk	73	618	—	—	—	0.59	Justensen (1932) 22, 366	Y	71
甘薯	Maryland 1929	45	1000	8.6	41.6	0.78	0.77	Thompson (1934) 48, 379	FA	75
	" 1930	45	2000	7.0	102.7	0.66	0.65	"	FB	75
	South Carolina 1929	45	1560	11.1	69.6	0.58	0.56	"	FC	75
	" 1930	45	1035	10.7	72.3	0.74	0.73	"	FD	75
綿(海産)	Sakha 1921	1131	160	10.5	—	0.32	0.19	Bailey & Troughton Bull. Minist. Agric Egypt Tech. Sci. Serv. (1926) 63	GA	25
	Grenierize 1921	1131	160	12.6	—	0.16	?	"	GB	25
	" 1922	1131	160	7.1	—	0.58	0.53	"	GC	25
	Giza 1921	452	154	25.2	—	0.34	0.21	"	GD	25
	" 1923	452	160	15.0	—	0.47	0.40	"	GE	25
綿	Texas (Col. St.)	144	288	28.9	—	—	0.53	Reynolds et al J. Amer Soc Agron (1934) 26, 765	HA	32
	" (chill)	157	288	—	—	—	0.56	"	HB	32
大豆 (for)	W. Virginia 1925	20	1008	9.6	30.3	0.24	0.11	Odland & Garber J. Amer Soc Agron (1928) 20, 93	IA	95
" (Seed)	" 1926	20	1540	6.0	10.7	0.40	0.34	"	IB	95
パナマブル	Hawaii (K19)	—	24	—	—	0.42	0.20	Maystad & Fardon J. Amer Soc Agron (1914) 26, 631	KA	69

	Hawaii (KI)	—	64	—	—	—	0.47	0.36	"	KB	69
天然生牧草	Australia	22	720	{ 9.5 15.8	8.7	8.7	0.63 0.37	0.60 0.29	Davies Bull Coun sci Induster Res Aust (1931) 48	L	67
オレシジ (灌漑)	Riverside	3840	195	11.0	102	102	0.41	0.31	Parker & Batchelor Hilgardia (1932) 7, 81	M	65
	Arlington	484	1000	34.3	110	110	0.24	0.10	Batchelor & Reed J Agric Res (1940) 12, 245	NA	64
	Antelope H	484	495	25.6	150	150	0.36	0.25	"	NB	64
	Villa park	484	240	79.8	198	198	0.44	0.32	"	NC	64
リモシ (灌漑)	Upland	576	364	26.2	183	183	0.43	0.34	"	O	36
クニシ (灌漑)	Whittier	2500	280	57.5	135	135	0.52	0.47	"	P	115
リンゴ (灌漑)	Utah	484	224	32.1	244	244	0.54	0.47	"	Q	4
種々の作物	Quebec	174	175	—	—	—	0.34	0.20	Summary by Tech. Bull. Mac Donald Agric coll 1934	—	41

隣接地域の相関が0の場合の理論的曲線。即ち無作為反復 (random replication) で得られる誤差の減少 ($k=1$)

は Fig 4 から図上で推定した各回帰の傾斜

は本文で述べたような無限に大きい圃場に対して適切のように推定された値。この論文で定義したようにこの係数はプロットサイズに対する分散の回帰を指す。Fig 4 調製のために両対数方眼紙にプロットした公表されたデータはすべて標準偏差または変動係数である。よって Fig 4 および 5 に示したような回帰の傾斜は表の値の 1/2 である。

C はこみにした 2 年間 (1909-0, 1910-X) のデータを示す。

U、S で表わした 5 フォート幅のプロットでの値は 0.80 で他のすべての形のプロットでは 0.58 である。単一畝のプロットを O で中間の形のものを □ で表わした。

WA と WB では誤差分散は 5 プロットのブロック内で推定した。

EA から ED は隣接地域における同一馬鈴薯品種の異なる変種に対するものである。

X は 6 プロットのブロック内における単一畝のみに対するもの

Y は 5

FA から FD は幾つかの畝を合せたプロット、単一畝のプロットは FE から FH の破線で示される (本文を見よ)

HA、ノズプロットのプロット内

HB、ノズプロットのプロット内の単一畝のプロットのみ

L、S で表わしたのは 5 リングの幅のプロットで、 $k=0.63$; 他の形は O で表わす。 $k=0.37$

M. 保護プロット、6 年間の平均値

N から Q まで、単位プロット = 単木の占有面積。N から P は California で、正確な場所は関係の文献に与えられている。

Irr. = Irrigated (灌漑の) For = Forage (飼料)

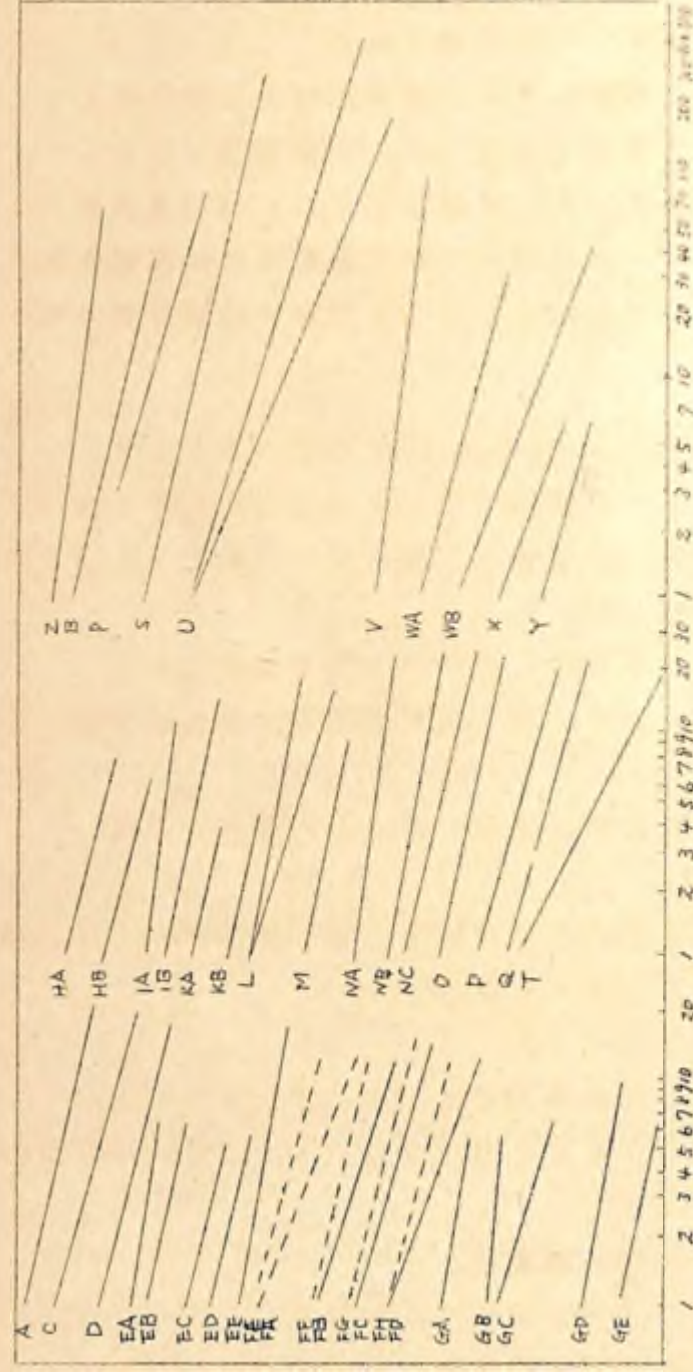


Fig 4 文獻に報告された Blank experiment のデータから求めたプロットサイズのプロット

あたり標準偏差の間の対数関係

縦軸: プロット当り標準偏差の対数 ($\log \Delta x$)

横軸: プロットサイズの対数 ($\log x$)

記号はオII表をみよ

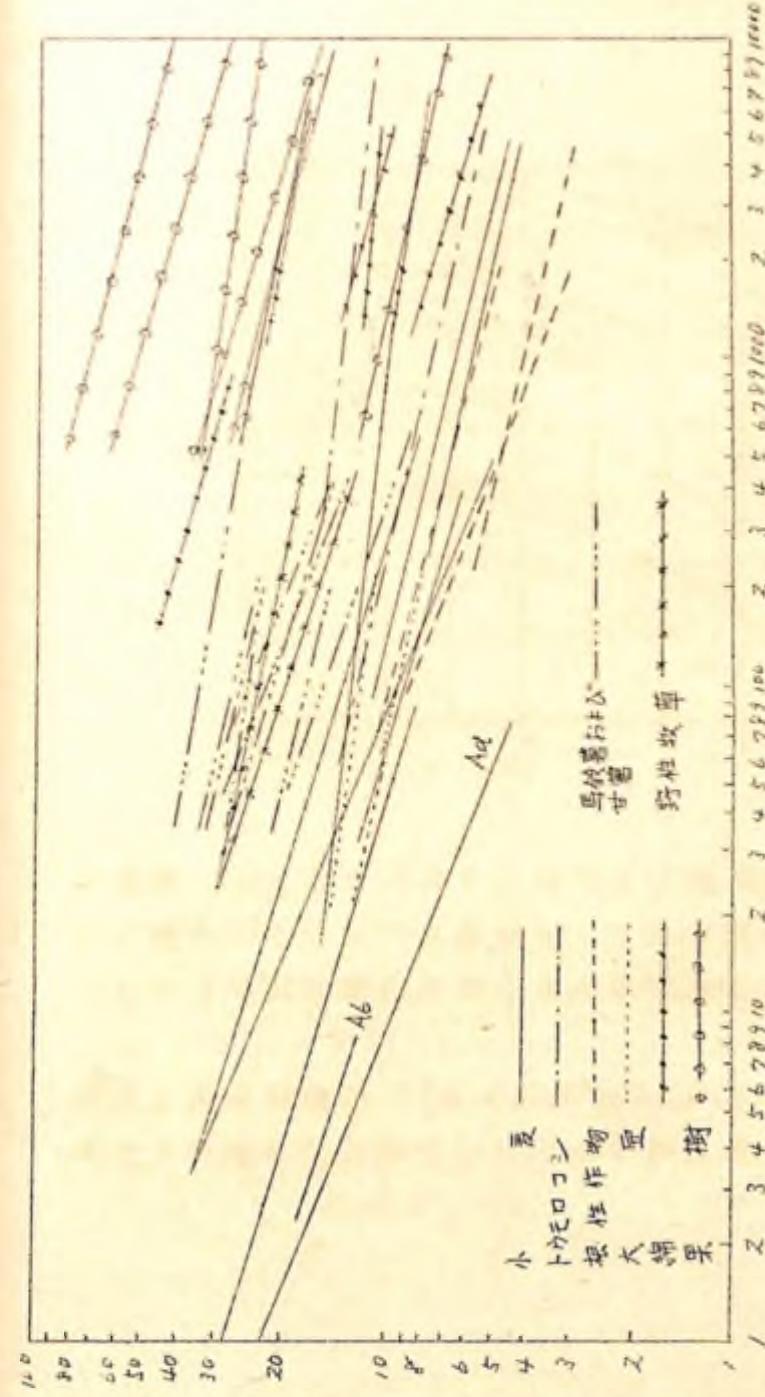


Fig 5 平方フィートで表わしたプロットサイズに対する変動係数の回帰 (データはオII表)

(43, 560 平方フィート = 1 エーカー)

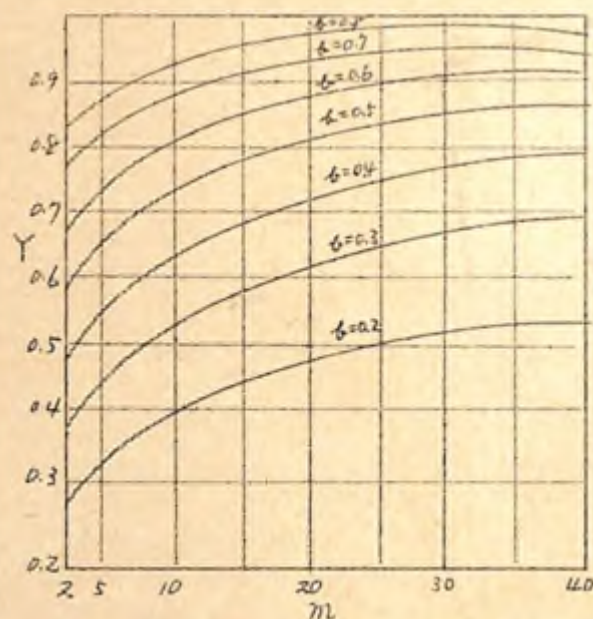


Fig 6 異質性係数 σ とブロックあたりのplot 個数の色々な値に対し、1地畝をブロックに分割することによって得られる誤差分散の減少を示すグラフ
縦軸： $Y = (1 - m^{-2}) / (1 - m^{-1})$ は無限地域上で分散に対するブロック内誤差分散の比を示す。

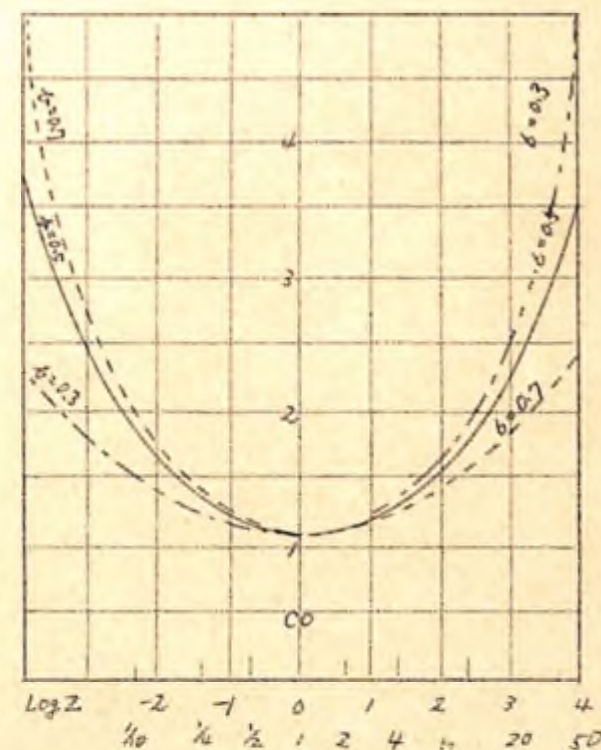


Fig 7 最適プロットサイズを用いなかった場合の費用（即ち誤差分散）の増加を示すグラフ。
縦軸：最適プロットサイズを用いたときの費用に対する費用の比
横軸：最適サイズに対するプロットサイズの比の対数

老令モミ林の調査に用いる プロットの最も有効な大きさと形状

The Most Efficient Size and Shape of Plot to Use for
Cruising Old-Growth Douglas-Fir Timber

By Floyd A. Johnson and Homer J. Hison¹⁾

(Jour. Forestry 50 1952 より)

老令ミミ林の調査に用いるプロットの最も効な大きさや形状

*The Most Efficient Size and Shape of Plot to use
for Cruising Old-Growth Douglas-Fir Timber*

Floyd A. Johnson and Homer J. Hosen⁽¹⁾

(Forest Forestry, 50, 1952より)

オレゴン州の老令米楸林分の試験から老令米楸林の集約な調査に
対して、最も効率のよい標本プロットの大きさや形状はノチエーン
×ノチエーン(ノチエーカー)の矩形プロットであることがわかった。
この結果はノス種のプロットを試験して導かれたものである。

一般に矩形プロットは円形プロットよりも効率であり、またノチエ
ーカーへノチエーカーのプロットの方が、それ以上のプロットあるい
は以下のプロットよりも効率であった。円形プロットのうち、ノチエ
ーカーだけが最も効率であった。

このような種々のプロットに対する相対的な効率の情報は、理論
的証明としてではなくた経験にもとづく証拠としてのみ見らるべき
ものである。こゝで見られた事柄は、エーカー当りの立木本数、木
の大きさ、下層植生あるいはその他の因子において異なっている別
の林分では、相当違つてくるであろう。同様に、もしこゝで用いら
れたものと異なる他の調査技術が採用されたならば、色々のプロッ
トの相対的な効率の順位は違つていたであろうということも注意しな
ければならない。それにもかゝらず、この調査に対する条件は、

OregonおよびWashington州の米楸の地域においては典型的なも
のであり、調査の技術も国有林で用いられているやり方の標準的な
ものである。

この研究の一般的な目的は、老令米楸林の集約的調査作業の効率
を向上させることであつた。更に特別な目的で、この論文の取扱つ
た問題は、米楸老令林の調査に用いる幾つかの最も効率のよいプロ
ットの種類を決定することであつた。

(1) 現地調査は Otto Manil および Ray A. Silver による。

試験地域

この試験のためオレゴン州レーン郡にあるヴィラメット国営林内のブルーリーバー実験林米旗老合林の40エーカーの地域が選ばれた。この地域はエーデンの東約50マイル、マツケンジー河の東北にある。40エーカーの地勢は平坦から急峻まで変化しており、実験地には比較的進木類は少ない。全樹種のエーカー当りの平均材積は、71,000ボードフィートである。少量のツガ、サトウカエデ、米杉を除けば、これは殆んどすべて、平均直径約4.5インチの米杉である。

基礎データ

この研究から二種のデータが得られた。

1 調査時間のデータ

40エーカーの実験地に対して、二つの時間分析が行われた。その一つは、プロット間を移動するに要するノチエーン当りの時間を定める目的で行われた。この研究は、*Staff Compass* を用い、また *trailer tape* を使う二人からなるノ組の調査員が、色々な傾斜度にあたって40ノチエーンを歩いて行ったものである。このような移動に要したノチエーン当りの平均時間は1.84分であった。

もう一つの時間分析は、10種のプロットをとるに要する時間を平均して得られるものである。(Table 1) このオヌの時間分析には、10本のプロット、ラインがあり、このラインは Table 1 に記載されているプロットのすべてを含んでいる。

Table 1 種々のプロットの調査に必要な平均時間

プロットの種類	ノプロットの調査に必要な平均時間
円形 100エーカー	5413
225	9163
400	16083

プロットの種類	ノプロットの調査に必要な平均時間
矩形 1/2チエーン×1/2チエーン	2360
1/2チエーン×2チエーン	5369
1/2チエーン×4チエーン	10224
1/2チエーン×6チエーン	15837
1チエーン×2チエーン	8202
1チエーン×3チエーン	11582
1チエーン×4チエーン	16840

違う種類のプロットが各ライン内に無作為に配置された。二つの追加プロット即ち、1/2エーカーと1/4エーカーの円型プロットに要する平均時間が、他の円型プロットのデータから、プロット面積に対するプロット調査時間の曲線をかき求められた。これらの平均値は1/2エーカーの円型プロットで、1.64分、1/4エーカーの円型プロットで.88分であった。両方ともその面積は同じであるが、1/2チエーン×2チエーン、1/4チエーン×4チエーンの矩形プロットを調査するに要する時間は、1/2チエーン×4チエーン、1/4チエーン×6チエーンのそれよりも少ないのである。1/2エーカーに密集した (compact) 矩形プロットは、調査時間の安からみて、明らかに細長い矩形プロットよりも有効である。同様に、1/2チエーン×3チエーン、1/4チエーン×6チエーンのプロット調査の所要時間は、1/2チエーン×4チエーン、1/4チエーン×6チエーンのプロットよりも小である。

2 変動係数

40エーカーの試験地を、林の測量基線にそって1600個の1/4エーカーの正方形単位 (1/2チエーン×1/2チエーン) に分割した。(Fig 1) 1600個の単位の各々の *total net saw timber volume* ⁽²⁾ を求めるため、100パーセント調査を実施した。後に内業によって、10種類のプロットからなる調査対象

(2) これは正味の 'wood' とよばれるものである。それには枯損していない *cull tree* および取引可能木の *cull log* を含む。それには又、腐敗過程はインチおよびそれ以上の取引可能木のすべての木の材積を含む。

をつくるため、10通りの方法で $\frac{1}{2}$ エーカー単位の材積を組合せた。(Fig. 2)例えば、その二つを結合して、400個の $\frac{1}{2}$ エーカーの矩形プロット *universes* を作り(各 $\frac{1}{2}$ エーカー $\times$ 1 $\frac{1}{2}$ エーカー)、4つを結合して、400個の $\frac{1}{4}$ エーカープロットの *universes* を作った。そうして10ヶのプロット *universes* の各々について、1ヶの変動係数 (coefficient of variation) が計算された。(Table 2)

Table 2 12種のプロットに対する抽出誤差

プロットの種別	C _(%)	M	N	E _(%)
1 矩形 1フェーン $\times$ 3フェーン	50.07	13.13	133	13.10
2 " 1 " $\times$ 2 "	58.40	16.50	200	13.77
3 円形 $\frac{1}{4}$ エーカー	56.00 ⁽¹⁾	14.21 ⁽¹⁾	160	14.15
4 矩形 $\frac{1}{2}$ フェーン $\times$ 6フェーン	42.75	10.23	133	14.26
5 " 6 " $\times$ 4 "	57.56	14.27	200	14.36
6 円形 $\frac{1}{2}$ エーカー	52.05	14.93	174	14.38
7 " $\frac{1}{2}$ エーカー	49.00	10.25	100	14.50
8 " $\frac{1}{4}$ エーカー	40.00 ⁽¹⁾	15.63 ⁽¹⁾	200	14.55
9 矩形 1フェーン $\times$ 4フェーン	48.34	9.87	100	14.74
10 円形 $\frac{1}{4}$ エーカー	71.07	21.16	400	15.04
11 矩形 $\frac{1}{2}$ フェーン $\times$ 2フェーン	74.58	21.62	400	15.60
12 " 2 " $\times$ 1 "	76.08	31.77	800	16.64

(1) もとのデータから直接計算したものでなく、他のプロットの数値に対する曲線から求めたもの。

C—母集団変動係数のパーセント

M—40 エーカーの4時間調査でとりうる系統的配置のプロット数

N—40 エーカー内の可能総プロット個数

E—4時間の調査で生ずる抽出誤差

(2) 平均プロット材積で測った標準偏差。

変動係数は矩形プロットのみについて計算されているが Table 2 の変動係数は、矩形、円形両プロットに対するものであることに注意せよ。円形プロットによる100パーセント調査は不可能であるし、矩形プロットおよび円形プロットの間に相違があると考えられたから、与えられた面積の円形プロット同の変動は、等面積の正方形プロット同の変動と同じであるという仮定が必要であった。同様に、Table 2 には 12種のプロットが表示されているにもかかわらず、*universes* は10組しか作られず、このため変動係数も10ヶより計算されなかったということに注意せよ。二つの追加プロットは、 $\frac{1}{2}$ エーカーと各エーカーの円形プロットである。調査で非常によく用いられるという理由から含められたものである。それらの変動係数は、プロット地域工の変動係数曲線からとられた。この曲線は他の三つの円形プロットのデータから作られたものである。Table 2 に記載された変動係数は、面積の増加につれて小さくなる傾向を示しており、また等面積の矩形プロットの間では相違いものがあるが、変動係数が小さくなるという傾向を示す。

最も有効なプロットのとり方

推定を要する全地域中の一部の木を測定するか、又は他の方式で観測して得た *total net saw timber volume* の推定値は、主要な二つのタイプの誤差、抽出誤差および測定技術上の誤差をふくむ。この地域の100パーセント調査を行ってえられる総材積と標本から推定されたこの地域の総材積との差が抽出誤差である。測定技術の誤差は100パーセント調査から得られる総材積とこの地域の真の総材積との差である。測定誤差の大きさは、調査時の測定および観測の正確さおよび材積表の現実との適合性に左右されるものである。普通総材積の推定値に対して、測定誤差の大きさを客観的に明らかにすることは不可能である。一方、抽出誤差の大きさは、適当な統計的方法を用い、かつある種の副次的な仮定を設けることによつて推定できる。その大きさは標本に含まれるプロット数の平

方根に反比例し、標本中には含まれ得ない可能なプロット数全体の全体のプロット数に対する比の平方根に比例して変動する。またこれは種々なるプロットについて記録された材積の間の変動指数 (*index of variation*) に正比例するものである。これらの関係を記号によって示せば、次の通りである。

$$E = C \sqrt{1/n} \sqrt{(N-x)/N}$$

こゝで

E = 与えられた地域の材材積の推定値の抽出誤差を標準偏差と材材積のパーセントで表わしたものである。

C = 特定の種類のプロットに対して、適切に変動係数である。

N = 材材積の推定をしなければならぬ森林地域の 与えられた種類のプロットのとりうるすべての個数。

n = 標本内の、与えられた種類のプロット個数。

プロット間の変動が極めて大きいようなプロットは、明らかに効率が悪くないと考えられる。しかし、必ずしも変動の大きさの一種小さいプロットが、最も有効だということではない。例えば、ある種類のプロットは、変動係数が最小ではあつても、与えられた仕事の量では、非常に設定が難しいため、標本としてとりうるプロットの数が極く種かになることもありうる。

上にあげた公式から抽出誤差の大きさは、標本が大きくなるにつれて、小さくなることは明らかである。従つて、最大の効率をうるためには、変動と時間との調和がもつともよくとれたプロットであることが必要である。最も有効な種類のプロットは、与えられた量の仕事に対して、抽出誤差が最も小さくなるようなものとして定義される。この研究で、最も有効な種類のプロットを定めるために、各種のプロットに対する抽出誤差を計算することが必要であつた。時間分析の知識は、 ϕ エーカーの林地内に各プロットを組織的及間隔で配置した場合、 ϕ 時間の調査をとりうるプロットの個数を計算するために用いられた。これは *Table 2* に記載されている ϕ の

値である。 ϕ の計算には、プロット調査の時間と、プロット間の移動時間の両方を考慮した。面積を ϕ エーカーと指定した理由は、それが調査の *unit* の標準だからであり、また ϕ 時間は、それが ϕ エーカー米穀命令林の調査時間の平均として、妥当な値だからである。

上に与えた抽出誤差の公式に、 ϕ 、 ϕ 、および ϕ を代入し、各種類のプロットに対してノット全部で N の抽出誤差が計算された。(*Table 2*) *Table 2* のプロットは、それらの効率の順に記載されている。3種類のプロットは、最も有効なノチエーン×ヨチエーンの矩形プロットよりも、変動係数が小さいことに注意すべきである。これらの3つの場合、変動の減少によつてえられる利益は、標本中に小数のプロットしかとりえないという事実によつて生ずる不利益を補いえないのである。8種類のプロットは、与えられた仕事の量に対して、より多くの単位をとることのできるノチエーン×ヨチエーンの矩形プロットよりも優れている。これらの場合、標本サイズによる利益は、変動によつて生ずる不利益で覆うことはできないのである。変動と時間との釣合は、ノチエーン×ヨチエーンの矩形プロットが一番よくとれている。

ϕ エーカーの3時間および5時間の調査について、新しい ϕ 、 ϕ 、 ϕ が決定された。これらを代入して、抽出誤差が計算される。何れの場合にも、(*Table 3*) 依然としてノチエーン×ヨチエーンが優れているが、残りのプロットの効率の順位には多少の変化が見られた。勿論この変化は、系統的に間隔をおいたプロット間の移動時間から生ずる。全調査時間の増加によつて直接生ずるものである。どのようにして最も有効なプロットを定めるかという上に述べた論議によつて、更に限定を加える必要がある。それは *Table 2* および3に記載する抽出誤差を計算するための公式に入れる ϕ は、系統的に間隔をおいたプロットの標本から決定しなければならないという事実によるものである。この公式は無作為標本に対してのみ適用できるものである。というのは、系統的標本は変動係数

Table 3

ノチエーカ-の5時間および5時間

調査についての抽出誤差

	プロットの種類	40エーカ-の 5時間調査	プロットの種類	40エーカ-の 5時間調査
1	矩形 1チエーン×3チエーン	16.31	矩形 1チエーン×3チエーン	11.03
2	・ 1・×2・	17.30	・ 1・×2・	11.54
3	・ 1/2・×1/2・	17.46	円形 各 エーカ-	11.93
4	円形 各 エーカ-	17.70	・ 225 エーカ-	12.10
5	矩形 各チエーン×4チエーン	17.86	矩形 各チエーン×4チエーン	12.16
6	円形 3/4 エーカ-	17.93	・ 1/2チエーン×1/2チエーン	12.17
7	・ 225 エーカ-	17.98	円形 1/2 エーカ-	12.23
8	矩形 1チエーン×4チエーン	18.17	・ 1/2	12.29
9	円形 各 エーカ-	18.26	・ 1/10	12.53
10	・ 1/10 エーカ-	19.05	矩形 1チエーン×4チエーン	12.53
11	矩形 1/2チエーン×2チエーン	19.77	・ 1/2・×2・	13.43
12	・ 1/2・×1・	21.70	・ 1/2・×1・	13.57

偏って推定する傾向があるからである。従つてノチエーン×3チエーン
の矩形プロットの優越性を示めるには、この研究で試験された
ノ2種のプロットの偏りの傾向は、同程度であるという仮定が必要
である。これは妥当な仮定と考えられる。

この研究は、同様な研究によつて、他の地域および他のタイプの
森林における異なる条件下での、調査商用の解釈を拡張する方途の
可能性を示している。木賦量森林については、ノチエーン×3チエ
ーン矩形プロットを用いるのがよいことが証拠づけられた。

(2) Hasel, A. A. 1938. Sampling errors in timber surveys
Jour. Agric. Research 57: 713-726.

170	0	201	0	20	117	39	428	0	7	0	0	670	0	22	582
10	62	120	9	430	0	226	12	600	553	32	322	916	111	110	48
12	40	170	0	0	405	663	8	16	608	268	224	23	277	28	0
7	37	95	26	58	8	0	10	10	0	0	63	379	280	291	277
332	0	531	206	126	20	0	617	688	167	27	7	65	77	67	120
6	0	105	228	313	59	915	0	0	10	9	123	126	600	37	58
41	77	187	0	68	0	7	1377	210	0	32	12	133	35	30	587
167	270	257	191	41	11	160	184	47	33	12	56	191	609	0	97
275	0	401	37	0	202	240	105	300	0	28	41	0	26	507	156
10	38	0	0	306	171	262	0	708	10	387	576	1171	361	22	387
170	220	0	666	0	17	128	38	545	10	366	40	19	0	161	575
108	0	27	128	0	607	18	21	0	476	90	25	19	652	12	277
379	37	51	168	56	107	656	34	170	41	21	0	70	195	50	41
106	72	706	0	18	0	13	28	10	21	27	327	26	46	33	8
130	0	70	711	0	705	1005	34	37	36	28	61	40	20	30	25
126	625	0	355	24	50	111	22	306	0	85	70	75	258	1312	230
138	600	13	0	0	18	34	45	45	22	42	0	503	35	10	12
86	112	0	0	215	0	0	46	0	0	0	220	42	104	21	777
10	0	366	7	0	25	16	14	711	14	172	680	403	7	182	11
0	112	0	0	0	0	574	137	688	737	738	0	0	13	16	16
392	7	514	0	307	0	265	120	0	7	7	0	125	60	22	41
30	457	577	509	0	17	10	0	65	21	22	431	984	0	0	766
707	270	0	322	0	665	0	400	406	0	197	62	0	27	0	80
313	476	304	11	557	0	861	1267	412	708	3	30	23	521	22	467
26	0	0	0	0	63	114	655	651	0	727	23	0	413	472	7
0	0	0	58	0	0	507	1371	0	7	0	0	19	517	420	0
24	105	74	0	0	16	7	6	0	138	565	472	19	0	12	35
37	26	26	60	10	0	209	588	10	17	0	131	732	0	251	538
87	42	22	30	417	172	0	317	725	0	1215	775	503	0	150	0
0	0	40	680	34	22	323	575	0	0	10	0	606	58	360	0
1012	8	743	212	158	0	0	251	87	622	611	13	680	991	0	0
339	524	707	16	787	718	1555	177	533	11	418	10	66	175	32	33
273	384	200	687	467	160	838	540	1017	26	66	28	139	58	110	201
275	0	0	160	336	1257	503	610	0	34	60	19	587	103	66	67
401	603	686	76	465	0	1977	20	324	235	260	71	76	22	717	0
23	19	0	565	197	124	272	0	565	139	0	65	0	156	20	8
458	0	373	706	7	615	0	377	0	6	32	141	0	187	82	7
682	734	615	354	1032	0	1762	323	430	124	130	92	178	26	680	102
507	0	96	0	0	622	303	662	0	12	16	0	33	0	139	57
0	8	107	14	78	0	0	40	107	153	42	22	0	17	131	100

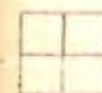
Fig 1. Old-growth Dong (Scribner Decidua) C. C. B. b.

組 合 せ

プロットの型式



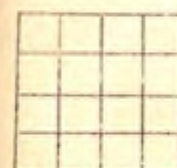
基本の $\frac{1}{100}$ エーカープロット



$\frac{1}{25}$ エーカーの円形プロットに対応する



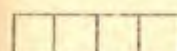
$\frac{1}{9}$ エーカーの円形プロットに対応する



$\frac{1}{16}$ エーカーの円形プロットに対応する



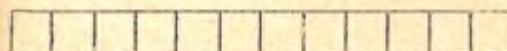
$\frac{1}{50}$ チェーンx $\frac{1}{2}$ チェーンの矩形プロット



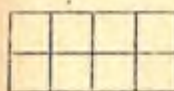
$\frac{1}{30}$ チェーンx $\frac{1}{3}$ チェーンの矩形プロット



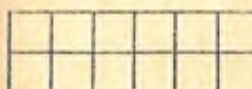
$\frac{1}{25}$ チェーンx $\frac{2}{5}$ チェーンの矩形プロット



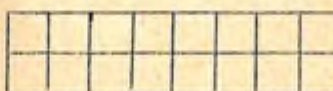
$\frac{1}{20}$ チェーンx $\frac{3}{5}$ チェーンの矩形プロット



$\frac{1}{10}$ チェーンx $\frac{2}{3}$ チェーンの矩形プロット



$\frac{1}{8}$ チェーンx $\frac{3}{4}$ チェーンの矩形プロット



$\frac{1}{6}$ チェーンx $\frac{5}{6}$ チェーンの矩形プロット

Fig. 2. — 基本の $\frac{1}{100}$ エーカープロットと種々な組合せ

プロットサイズと作物収量
変動間の関係の有効な推定
法について

Efficient Estimation of the Relationship between Plot
Size and the Variability of Crop Yields

By W. H. Hatheway and E. J. Williams

(Biometrics 1958 より)

プロットサイズと作物収量変動間の関係の有効な推定法について
*Efficient Estimation of the Relationship between
 Plot Size and the Variability of Crop Yields**

By W.H. Hathaway and E.J. Williams

(*Biometrics* 1958 より)

1 緒言 (Introduction)

圃場実験のプロットの最適な大きさは、一定費用、単位の数によって変動する費用および土壌の変異性に関係する。おそらくこれまでに案出された土壌の変異性の尺度として最も有用なものは、*Smith* (1938) のそれであろう。彼は与えられた大きさのプロット間分散の対数が、プロットサイズの対数と一次の関係にあることを実験的に示した。この論文において我々は、大きさと変異性の間の関係のみを考察することにする。

この論文の目的はまず、この関係における推定量の有効 (*efficient*) な推定量を如何に決定すべきか、第ニに上の例において、データに相関があり、また変異が等しくない場合の有効な線型推定量 (*linear estimates*) を決定する一般的方法を考えることにする。

Koch および *Rigney* (1951) は、プロットサイズの対数に対する分散の対数の回帰係数が、一様試験 (*uniformity trial*) の場合と同じく、処理効果の存在する場合のデータからも推定し得ることを示した。彼等は回帰係数 β の推定においては、異なる大きさのプロットの分散は、それぞれの自由度で重みづけらるべきだという *Smith* の主張に注意した。実際、異なるプロットサイズに対する分散の推定量は、一様試験および実験データの何れの場合にも、共通な成分 (*common component*) から作られるもので、これらは屢々非常に大きい相関を有しているから、ただ自由

度で重みづける式では正確ではない。Koch と Rigney は実験データについてこの難点を指摘したが、彼等は一杯試験のデータに対しても同様な論法があてはまるということをはっきりさせていない。この論文は近似的に最小の分散をもつ β の不偏推定値を導く、いろいろな大きさのプロットについて観測された分散の重みづけの方法を提出するものである。

この方法は一杯試験のデータおよび実験データの何れにも適用できるもので、後者の場合 Koch および Rigney によつて指摘されたやり方で、一杯試験から直接に導かれたのと同じもの (simulate) とするため、實際上分散分析が再構成される。

2 誤差に相関がありその分散が等しくないときの回帰分析

(Regression Analysis with Correlated Unequal Errors)

回帰分析のよく知られた応用において、屢々仮定されるのは、従属変量の値は無相関で等分散、そして独立変量の値には誤差がないということである。

そうでなく、もし独立変量の値に誤差がある場合には、仮説的な回帰函数からの従属変量の偏差が、無相関で等分散をもつということが仮定される。

第一の場合は実際、第二のものゝ特別な場合である。どちらの場合も、回帰係数推定のためには最小自乗法がそのまま適用でき、最小とすべき値は、この偏差の平方和となつてゐる。従つてもし、 X , y が独立変量と従属変量ならば、最小とすべき平方和は

$$\sum_j (y_j - \alpha - \beta x_j)^2$$

で、これからよく知られた推定量

$$b = \sum_j y_j (x_j - \bar{x}) / \sum_j (x_j - \bar{x})^2$$

$$a = \bar{y} - b \bar{x}$$

が、 β と a に対してそれぞれ導かれる。

そう多くはないが、 y の値に相関があり、分散が等しくない場

合がある。このときでも最小自乗法によつて、回帰函数の不偏推定値が求められるけれども、一般にはこの方法は有効 (efficient) でないから、 b および a の推定量はデータから得ることのできる最も正確なものではない。 y の値に対する分散、共分散が既知であれば、有効な常数の推定量を決定することができ、また分散、共分散がデータからしか推定できない場合でも、これらを用いることによつて、決定すべき分散が近似的に最小となるような、推定が可能となる。

この一般の場合において、 y の値が n 個 (但し y_j の分散は σ_{jj}) あり、 y_j と y_k の共分散が σ_{jk} であると仮定する。このとき (例えば Rao (1952) ch.3 をみよ)、通常の正規性の仮定のもとでは、二次形式 $\sum_j \sum_k \sigma_{jk} (y_j - \alpha - \beta x_j)(y_k - \alpha - \beta x_k)$ は、自由度 n の χ^2 分布をすることが知られてゐる。こゝで σ_{jk} なる項は、 y_j の共分散行列の逆行列の要素である。

この二次形式 (これは普通の分析の場合の平方和にあたる) を、 β に関して最小とすると、次の様に常数の有効な推定量を与える。

$$b = \sum_j \sum_k \sigma_{jk} y_j (x_k - \bar{x}) / \sum_j \sum_k \sigma_{jk} (x_j - \bar{x})(x_k - \bar{x})$$

および

$$a = \bar{y} - b \bar{x}$$

こゝで、 $\bar{x}$ および $\bar{y}$ は荷重平均であるから

$$\bar{x} = \sum_j \sum_k \sigma_{jk} x_k / \sum_j \sum_k \sigma_{jk}$$

である。 b を y_j の線型函数 (linear function) と考えると、その分散は實際上

$$1 / \sum_j \sum_k \sigma_{jk} (x_j - \bar{x})(x_k - \bar{x})$$

の様に簡単に表わせることが直ちに証明できる。

このとき、二次形式は自由度 $n-2$ の χ^2 分布をする。何故なら、これは二つのパラメータについて最小にされたからである。かくして我々は常数を推定する一方、線型回帰からのかけ離れ (departure) を示す残差の二次形式の有意性検定をすることが

可能である。

分散、共分散を推定したときにも、こゝに与えられた結果が近似的に成立する。次の論議において我々は、分散、共分散推定の誤差を無視できると仮定して、これらの一般的結果を用いることにする。

3 一様試験のデータからの推定

(Estimation from Uniformity Trial Data)

Koch および Rigney は分割法 (split plot) または格子計画 (lattice design) 類似に細分された一様試験の誤差は、下記に示す様に分析できることを示した。同様に乱塊法の配置も、この試験 (trial) の上に重ねる (ダブルさせる super impose) ことができる。しかし乱塊法ではプロットサイズに対する変異性の簡原については、そう多くの知識は得られない。

変動因	d, f	平均平方	平均平方の期待値
反復	d-1	V_1	$S + aP + abQ + abcR$
反復内ブロック	d(c-1)	V_2	$S + aP + abQ$
ブロック内プロット	cd(b-1)	V_3	$S + aP$
プロット内副次プロット	bcd(a-1)	V_4	S

副次プロット (sub plot) の基準に直した (reduced) いろいろな大きさのプロットの分散を V' で表わす。従って、完全な反復を大プロット (large plot) と考えれば、その分散 V'_1 は分散分析において現われるときの反復の平均平方に等しい。即ち

$$V'_1 = V_1$$

こゝでブロックを次の大きさのプロットと考えれば、ブロック間の分散には、反復内ブロックにもとづく変動に加えて、分散分析の際反復へのブロックの群の層化のために除去された変動が含まれる。

故にブロックに対する全平方和は

$$d(c-1)V_2 + (d-1)V_1$$

で、cd 個のブロックがあるから、平均平方は

$$V'_2 = \{d(c-1)V_2 + (d-1)V_1\} / (cd-1)$$

となる。

同様に、全地域にわたるプロット間の分散は

$$V'_3 = \{cd(b-1)V_3 + d(c-1)V_2 + (d-1)V_1\} / (bcd-1)$$

であり、全地域にわたる副次プロット間の分散は

$$V'_4 = \{bcd(a-1)V_4 + cd(b-1)V_3 + d(c-1)V_2 + (d-1)V_1\} / (abcd-1)$$

である。

これらの公式は、Koch および Rigney によって与えられたものと形式的には同じであるが、彼等の結果は分散成分の形で与えられている。

Smith の回帰係数 β は、公式

$$E(\log V_x) = E(\log V_1) - \beta \log x$$

によって与えられる。こゝで x はプロット当りの単位の数であり、 V_1 は大きさ 1 単位のプロット間の分散で、 V_x は大きさ x 単位のプロットに対する単位地域当りの平均収量の分散である。ブロックの大きさが、プロットの大きさに比べて小さいときには、この公式には「有限母集団」修正が必要である。この修正は Smith のもとの論文で論じられている。分散の推定量で、有限母集団修正の影響を最も大きく受けるのは、一番低い精度で推定されたものだから、我々はこれを無視することにする。プロットの最盛の大きさを推定する目的には、係数 β のみが重要である。Koch および Rigney の提示した計算においては、 V_x の値は各 V' の値を反復、ブロック、プロットあるいは副次プロット当りの単位の数で割って、それを単位基準におきかえて得られている。それらに従って、 β は重みをつけない回帰係数によって推定される。

$$b_1 = - \frac{\sum y_i (x'_i - \bar{x}')}{\sum (x'_i - \bar{x}')^2}$$

こゝで $y = \log(V'/x)$, $x' = \log x$ で、 $\bar{x}' = \sum x'_j / n$

N. C. State College の Dept. Experimental Stat の D. D. Mason によって、著者の 1 人に b_i に対するこの公式を適用すると、屢々ノより大という結果のえられることが指摘されたが実際、この公式は形而下的な理由から受け入れることはできない。上記の推定量 (1) は異なる変異性をもつ y_i の値を同じ重さで考えているために、屢々不正確であるということがはっきりした。それで、回帰係数を定める積和、平方和のいろいろな項に、最小の分散をもつ様な推定値に算く重みを適用することが定められた。適切な重みは、 y_i の値の共分散行列の逆行列 (即ち *information matrix*) の要素である。これらの要素を w_{jkl} と表わすと、推定値は

$$b_2 = - \frac{\sum_j \sum_k w_{jkl} y_j (x'_k - \bar{x}')}{\sum_j \sum_k w_{jkl} x'_j (x'_k - \bar{x}')} = - \frac{U}{T}$$

但し
$$\bar{x}' = \sum_j \sum_k w_{jkl} x'_j / \sum_j \sum_k w_{jkl}$$

となる。

重み w_{jkl} は、データから推定されねばならず、従って、データに応じて、それなりに不正確でもあろう。

この誤差源 (我々はその影響は考えない) とは別に、この分散の推定値は最小となるであらう。実際この分散は

$$\frac{1}{\sum_j \sum_k w_{jkl} x'_j (x'_k - \bar{x}')} = \frac{1}{T}$$

である。

よくあることだが、回帰を計算するための分散の推定値が二つ以上あるときには、我々は回帰からのかけ離れ (*departure*) の有意性をも検定することができる。 y_j の重みをつけた全平方和は

$$V = \sum_j \sum_k w_{jkl} y_j (y_k - \bar{y})$$

但し
$$\bar{y} = \sum_j \sum_k w_{jkl} y_j / \sum_j \sum_k w_{jkl}$$

で、その自由度は $n-1$ である。 n は分散の推定値の数である。

x'_j への回帰に帰因する平方和は

$$U^2 / T$$

である。故に回帰からのかけ離れに対する平方和は

$$V - U^2 / T$$

で、これは近似的に自由度 $n-2$ の χ^2 として分布するから、検定が可能である。

こゝで、重みを推定することが残されている。 V_1, V_2, V_3 および V_4 は独立であり、これらの分散はそれぞれ $2V_1^2/(d-1)$, $2V_2^2/d(c-1)$, $2V_3^2/cd(b-1)$ および $2V_4^2/abcd(a-1)$ であるから、 V_1', V_2', V_3' および V_4' の分散、共分散を決定することは容易である。これらは前者の一次函数である。実際、 V_1' の分散ばかりでなく、それと他の V_i' の共分散も V_1^2 に比例するのである。

更に V_2' の分散は

$$2 \{ d(c-1)V_2^2 + (d-1)V_1^2 \} / (cd-1)^2$$

の様に推定され、 V_2' と V_3' および V_4' との共分散はこれに比例する。故に V_i' の共分散行列は

D	D	D	D
$(d-1)^2$	$(d-1)(cd-1)$	$(d-1)(bcd-1)$	$(d-1)(abcd-1)$
D	$C+D$	$C+D$	$C+D$
$(d-1)(cd-1)$	$(cd-1)^2$	$(cd-1)(bcd-1)$	$(cd-1)(abcd-1)$
D	$C+D$	$B+C+D$	$B+C+D$
$(d-1)(bcd-1)$	$(cd-1)(bcd-1)$	$(bcd-1)^2$	$(bcd-1)(abcd-1)$
D	$C+D$	$B+C+D$	$A+B+C+D$
$(d-1)(abcd-1)$	$(cd-1)(abcd-1)$	$(bcd-1)(abcd-1)$	$(abcd-1)^2$

こゝで

$$\begin{aligned} A &= 2bcd(a-1)V_4^2 & B &= 2cd(b-1)V_3^2 \\ C &= 2d(c-1)V_2^2 & D &= 2(d-1)V_1^2 \end{aligned}$$

である。

この逆行列はむしろ簡単な形であることがわかる。即ち

$$\begin{bmatrix} (d-1)^2\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) & -\frac{(d-1)(cd-1)}{c} & 0 & 0 \\ -\frac{(d-1)(cd-1)}{c} & (d-1)^2\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) & -\frac{(cd-1)(bcd-1)}{b} & 0 \\ 0 & -\frac{(cd-1)(bcd-1)}{b} & (bcd-1)^2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) & -\frac{(bcd-1)(abcd-1)}{a} \\ 0 & 0 & -\frac{(bcd-1)(abcd-1)}{a} & \frac{(abcd-1)^2}{a} \end{bmatrix}$$

なることが証明できる。

$y_i (= \log V_i')$ に対する重みは、この逆行列の各行各列に対応する V_i' をかけてえられる。

この結果は近似公式

$$\text{Cov}(\log V_i', \log V_k') \sim \text{Cov}(V_i', V_k') / V_i' V_k'$$

から出てくるが、これにはまた誤差伝播 (propagation of error) の方法を普通の通り適用してえられた結果である。

もし、実際計算でよく行なうように、自然対数でなく常用対数を用いる場合には、この重みには

$$M^2 = (\log_{10} e)^{-2} \\ = 5.302$$

をかけねばならない。

こゝで我々は自然対数への変換を取り扱い、下に常用対数に必要な補正を示すであらう。

かくして逆行列から

$$W_{ik}(y_i, y_k) = W_{ijk} \sim V_i' V_k' W_{ik}(V_i', V_k')$$

がえられる。

このように重みはそう多くの困難なしに逆行列から決定することができ。

重みの行列の要素の和は、分散の推定値を導びいた平方和の全自由度の半分に等しいことがわかる。これは次のようにして示すことが出来る。もし分散がプロットの大きさにかわりなく一定

なら、利用しうるすべての平方和が、同じ基礎的 (basic) な分散の推定値である。分散分析の種々の標から導びかれた分散の対数の種々なる推定値は独立で、その分散は対応する自由度の逆数の2倍に等しい。結局、その各々からの情報 (information) は、その自由度の半分で、このとき全情報は、この全自由度の半分に等しくなる。

よって、一様試験からえられたデータに対する重みの和は

$$\frac{1}{2} (abcd-1) \text{ である}$$

一方、分割試験のデータに対しては、重みの和は、 $\frac{1}{2} bc(ad-1)$ である。

同様な結果は、格子および他の型の実験計画についても導くことができる。これらは重みの計算の便利な換算となるものである。

回帰係数を決定し、回帰からのかけ離れを検定するためには、計算は次のような順序で行なうのが最もよい。

$$X_k = \sum_j W_{jk} x_j'$$

$$\text{および } Y_k = \sum_j W_{jk} y_j$$

とおく。このとき x_j' の平方和は

$$T = \sum_j x_j x_j' - \left(\sum_j x_j \right)^2 / \sum_j \sum_k W_{jk}$$

である。

同様に、 y と x' の積和は

$$U = \sum_j x_j y_j - \left(\sum_j x_j \right) \left(\sum_j y_j \right) / \sum_j \sum_k W_{jk}$$

$$= \sum_j y_j x_j' - \left(\sum_j x_j \right) \left(\sum_j y_j \right) / \sum_j \sum_k W_{jk}$$

で、 y の平方和は

$$V = \sum_j y_j y_j - \left(\sum_j y_j \right)^2 / \sum_j \sum_k W_{jk}$$

そうすると

$$b_2 = - U/T$$

で、推定値 b_2 の分散は分析の近似度に対して

(to the degree of approximations of analysis)

$$T^{-1}$$

である。母集団回帰係数 β_2 に対する近似的信頼限界は

$$\beta_2 \pm t T^{-\frac{1}{2}}$$

である。但し t は、要求された確率水準でのノーマルデビエートである。

上に示したように

$$V = U^2/T$$

によって、線型回帰からのかけ離れが検定される。これは自由度 $n-2$ の χ^2 と考えられる。常用対数 (Common logarithms) を用いたとき、 β_2 の値は上記の様に決定されるが、この場合その分散は

$$T^{-1}/5.302 = 0.1886 T^{-1}$$

で、対応する信頼限界は

$$\beta_2 \pm 0.4343 t T^{-\frac{1}{2}}$$

である。

回帰からのかけ離れに対する平方和も同様に

$$5.302 (V - U^2/T)$$

と変更される。

これらの計算の要点は、異なる大きさのプロットの分散 V_i の共分散行列の計算にあることに注意しなければならない。これらの分散は、互に相関をもつ分散成分に因してでなく、独立なもとの平均平方の一次結合として表わされるから、結果の共分散行列およびその逆行列も比較的簡単な形となる。

4 実験データからの推定

(Estimation from Experimental Data)

分散成分を実験データから推定すべき場合でも、推定値は一株試験のデータの場合と同様な方法で計算される。しかし若干の対比 (contrast) が処理効果の推定のため断念されるから、異なるプロットおよびブロック分散は、一株試験より少ない自由度で推定される。その精度は一株試験でえられるものより低下する。こ

れについては種々の成分に対する重みを決定する際に考慮しなければならないが、これを除けば、近似的に最小分散をもつ線型不偏推定値の決定は、前節で与えられたと同様な方針に従うものである。

この方法を Kack および Rigney によって与えられた形の分割 (Split plot) 実験に対する分析で示す。この模型 (model) においては、ブロック処理交互作用が存在しないという仮定のあることに注意しなければならない。

	d, f	平均平方	平均平方の期待値
反 復	d-1	V_1	$S + ap + abd + abcdR$
処 理 (1)	C-1		$S + ap + abd + \text{処理効果}$
誤 差 (1)	(C-1)(d-1)	V_2	$S + ap + abd$
全プロット間合計 Cd-1			
(2)	C(d-1)		$S + ap + \text{処理効果}$
誤 差 (2)	C(d-1)(d-1)	V_3	$S + ap$
分割プロット	Cd(d-1)		
抽出、誤差	dcd(a-1)	V_4	S

一株試験に対する場合と同じく、完全反復 (complete replication) の大きさをもつプロットの推定された分散は V_1 である。これは全自由度 $d-1$ で推定されているから、その分散は前節で与えられたものと同じである。

ブロック (即ち whole plot) に対する平均平方を推定する場合に我々は、反復内のブロック間の $d(C-1)$ 個の対比のうち、分散推定に利用できるのは、 $(C-1)(d-1)$ のみで、残りの $C-1$ には処理効果が含まれているという事実を考慮しなければならな

い。よって、前と同じくプロット間の推定された分散は

$$V_2' = \{ d(c-1)V_2 + (d-1)V_2 \} / (cd-1)$$

であるが、その推定された分散は、この場合

$$2 \{ d^2(c-1)V_2' / (d-1) + (d-1)V_1'^2 \} / (cd-1)^2$$

に増加する。

同様に V_1 の分散は係数 (factor) $d/(d-1)$ だけ補正されねばならない。

こゝで分析は、一様試験に対すると同じように続けられる。逆行列は

$$A = 2bcd(a-1)V_4^2, \quad B = 2cd^2(b-1)V_3^2 / (d-1)$$

$$C = 2d^2(c-1)V_2^2 / (d-1), \quad D = 2(d-1)V_1'^2$$

と再定義すると、上で与えたものと同じになる。

5 数値例

(Numerical Example)

提出された方法に必要な計算を数値例で説明する。そのデータを Table 1 に掲げるが、これは D.D. Mason の好意によって、提供されたものである。

Table 1

C.A. Brim によって行われた大豆の収量試験
(U.S. Dept. of Agric. At Willard, North Carolina, 1956)

変 動 因	d, f	平均平方
反 復	$2 = d - 1$	$452 = V_1$
品 種 間	$11 = C - 1$	30401
実験誤差	$22 = (d-1)(C-1)$	$10589 = V_2$
プロットの行	$36 = Cd(b-1)$	$5938 = V_3$
プロットの列	$72 = bcd(a-1)$	$2862 = V_4$

こゝで $a = 2, b = 2, C = 12, d = 3$

重みの決定においては V_1' のものよりも V_1' の倍数を使う方が便利である。このようにすることによって、計算が正確にゆくと同時に、より簡明となる。即ち

$$(d-1)V_1' = 2V_1 \quad = 904$$

$$(Cd-1)V_2' = 35V_2 = 2V_1' + 33V_2 \quad = 350341$$

$$(bCd-1)V_3' = 71V_3 = 2V_1' + 33V_2 + 36V_3 \quad = 564109$$

$$(abCd-1)V_4' = 143V_4 = 2V_1' + 33V_2 + 36V_3 + 72V_4 \quad = 770173$$

これから

$$V_1' = 452, \quad V_2' = 10010, \quad V_3' = 7945, \quad V_4' = 5386$$

を得る。分散 V_1', V_2', V_3', V_4' をもつ、異なる大きさをもつプロットに対応するプロット当りの単位数は、それぞれ 48, 4, 2 および 1 である。分散 V' を単位基準に直し対数をとると、Table 2 に与えた数値がえられる。

Table 2

プロットの相対的な大きさ (x') の対数と単位の分散 (y)

x'	y
0.0000	3.7313
0.3010	3.5891
0.6021	3.3984
1.6812	0.9739

これから、重みをつけない回帰係数は

$$\begin{aligned} b_1 &= \left\{ \sum x'y - \frac{(\sum x')(\sum y)}{n} \right\} / \left\{ \sum (x')^2 - \frac{(\sum x')^2}{n} \right\} \\ &= - \left(\frac{4.7638 - 7.5544}{3.2796 - 1.6697} \right) \\ &= +1.7334 \end{aligned}$$

Koch および Rigney が指摘した通り、 β は土壌の質異性の指標であるから、それは 0 と 1 の間を変動するものでなければなら

ない。

これが0であるということは、プロットを構成する単位間に完全なる相関（極端に一致）のあることを示し、1であるということは相関のないことを示すのである。この例で得られた推定量 $\hat{\theta}_i$ に、はっきりした物理的（physicals）な解釈を与えようがないことは明白である。こゝで明らかなことは、二つの自由度のみにもとづく反復の小さな平均平方を、もつと自由度の多い他の平均平方と同じ重みで取扱ったことから、不当な土壌の変異性の推定値が導かれたということである。

この論文で提案した方法を用いても、 y および x' は前と同じである。

重みは y の情報行列（information matrix）行列の要素 w_{jk} である。これらの数値をうるにはまず

$$\begin{aligned} A &= 2bcd(a-1)V_a^2 &= 1179.5 \times 10^6 \\ B &= 2cd^2(b-1)V_b^2/(d-1) &= 3808.1 \times 10^6 \\ C &= 2d^2(c-1)V_c^2/(d-1) &= 11100.6 \times 10^6 \\ D &= 2(d-1)V_d^2 &= 0.8 \times 10^6 \end{aligned}$$

を計算すると便利である。そうすると

$$\begin{aligned} w_{11} &= \{(d-1)V_d'\}^2 \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{D} \right) = 1.00 \\ w_{12} = w_{21} &= \{(d-1)V_d'\} \{(cd-1)V_c'\} / C = -0.03 \\ w_{13} = w_{31} = w_{14} = w_{41} &= 0 \end{aligned}$$

残りの要素も同様な型で計算される。完全な情報行列は

$$W = \begin{bmatrix} 1.00 & -0.03 & 0.00 & 0.00 \\ -0.03 & 43.29 & -51.90 & 0.00 \\ 0.00 & -51.90 & 253.36 & -368.34 \\ 0.00 & 0.00 & -368.34 & 502.89 \end{bmatrix}$$

で、その和は証明できる通り、 $\frac{1}{2}bc(ad-1) = 60$ である。こゝで我々は

$$Y_R = \sum_j w_{jR} y_j$$

の値を計算する。

従って

$$Y_1 = (100)(0.9739) - (0.03)(3.3984) = 20.87$$

同様にして

$$Y_2 = -39.19, Y_3 = -282.52, Y_4 = 554.42$$

$$\sum_j Y_j = 233.58$$

同様にして X_R を計算すると

$$X_1 = 1.66, X_2 = 10.39, X_3 = 75.11, X_4 = -110.87$$

$$\sum_j X_j = -23.71$$

故に

$$\begin{aligned} T &= \sum_j X_j x'_j - (\sum_j X_j)^2 / \sum \sum w_{jk} \\ &= 31.65 - (-23.71)^2 / 60 = 22.28 \end{aligned}$$

同様に

$$U = -14.87$$

および

$$\begin{aligned} V &= 13.05 \\ b_2 &= +14.87 / 22.28 = +0.667 \\ V(b_2) &= 0.1886 / 22.28 = 0.00846 \\ \text{標準誤差} &= 0.092 \end{aligned}$$

興味あることは、 b_1 の分散も同様に決定される。

この分散は

$$0.1886 \frac{\sum \sum w_{jk} (x'_j - \bar{x}') (x'_k - \bar{x}')}{\left\{ \sum (x'_j - \bar{x}')^2 \right\}^2}$$

で与えられる。こゝで w_{jk} は重み行列の逆行列の要素、いゝ換えれば、 y_j の共分散行列の要素である。こゝで $\bar{x}'$ は x'_j の重みをつけない平均値である。

b_1 の分散は 0.0310 であることがわかるから、その標準誤差は 0.176 となる。

故にこの推定値の効率 (efficiency) は

$$0.00846/0.0310 = 27\%$$

である。

0と1との間にある値の推定値で、このように大きい標準誤差をもつものは、あまり価値がない。回帰からのかけ離れを検定するためには

$$\chi^2_{(2)} = 5.302(V - U^2/T) = 5.302 \times 3.125 = 16.57$$

この値は、 χ^2 分布の1%点をこえるから、このデータは仮定された一次関係と有意に異なる。

6 経験的な関係からのかけ離れを考慮に入れること

(Allowance for departure from empirical relationship)

ある場合には線型性(直線性)からの(即ちFairfield Smithの実験的法則からの)かけ離れが、懸念される場合がある。そのような場合、費用のデータが利用できさえすれば、最適なプロットサイズは、実験的な法則が成立するという仮定をおかなくとも、妥当な正確さをもって推定できる。

Y 反復の費用が

$$Y(K_1 + K_2 X)$$

であるとする。ここで K_1 は1プロットの費用(大きさを考えない)、 K_2 はプロット内の単位当り費用で、 X はプロット当りの単位の数である。

従って我々に必要なのは、 $Y(K_1 + K_2 X)$ が一定という条件のもとで、 Vx/Y を最小とすることである。これは

$$F(x) = (K_1 + K_2 X) Vx$$

を X に関して最小とすることと同じである。もし $F(x)$ が X の小数の値に於いて、実験データから決定できるなら明らかに、その最小値は容易に図上で決定できる。

Example 2

Johnson および Hixon (1952) は Oregon 州における40エーカーの Douglas fir 老成林の100%調査(全林毎木)を報告し

ている。このデータは、40x40の正方形の1600個の1/40 エーカープロットの各々の立木材積からなっている。

8行(row) および8列(column)の組の間の系統的な変動を除去するための層化について、分散分析が下表に示すやり方で実行された。

変動因	d. f	平均平方
1.6エーカープロット間	16	277106 = V_1
1.6エーカープロット内0.4エーカープロット間	75	93947 = V_2
0.4エーカープロット内0.1エーカープロット間	300	73012 = V_3
0.1エーカープロット内0.025エーカープロット間	1200	100744 = V_4

0.025-エーカープロット間の平均平方が大きいことは、競合(competitive)の影響を示すものである。測定された木の平均直径は、4.5 inch であつたから、このような結果は殆んど驚くにはあたらない。

ここで

プロット当りの0.025-エーカーが単位の数

$V'_1 = 277106$	64
$V'_2 = 138349$	16
$V'_3 = 89223$	4
$V'_4 = 97869$	1

V' の値を単位の基準に修正し、図上におとしたとき、直線性からのへだたりは極めて明らかであつた。

Johnson と Hixon は、40 acre の4時間調査で測定できるいろいろな大きさのプロット個数をも推定した。これらのデータを種々の大きさのプロットに対するプロット当りの平均の分散に換算して、

プロットの種類	0.025エーカー単位の数(x)	プロット当りの分を求めた平均時間(t)
$\frac{1}{2} \times 1$ chain	2	7.50
$\frac{1}{2} \times 2$ chain	4	11.10
$\frac{1}{2} \times 4$ chain	8	16.14
$\frac{1}{2} \times 6$ chain	12	22.16

を得た。

プロット当りの費用(分における)はプロットの大きさと一次の関係があるものとする。

$$T = K_1 + K_2 x$$

と書ける。ここでTはプロット当りの全費用(プロット当りの分で測定した)で、 K_1 は常数(プロット当りの分で測定した)、 K_2 は常数(単位面積当りの分で測定した)、xはプロット当りの0.025エーカー単位の数である。

上に与えたデータから

$$T = 4.9 + 1.43x$$

を得る。故にF(x)が計算できる。

x (0.025エーカー 単位の数)	$K_1 + K_2 x$	$V'/x = Vx$	$F(x) = Vx(K_1 + K_2 x)$
1	6.33	97869	619500
4	10.62	22306	236900
16	27.78	8647	240200
64	96.42	4330	417500

F(x)をxの函数とおけば、その最小値はx=4とx=16単位の間にあることがわかる。

この地方においては

$$\log Vx = \log V_1 - \beta \log x$$

なる一次関係からのかけ離れはそう大きくないということが示さ

れる。

よって β は近似的に

$$= (\log V_{16} - \log V_4) / (\log 16 - \log 4) \\ = -(\log 8647 - \log 22306) / 0.602 = +0.68$$

で与えられる。

故に最適なプロットサイズは

$$x_0 = \beta K_1 / (1 - \beta) K_2 = (0.68)(4.9) / (0.32)(1.43) \\ = 7.3 \text{ 単位}$$

である。この地方でのもっと正確な β の推定値は、大きさ5.8, 10および12単位のプロットに対する平均平方を計算し、上に提示した重みづけの手続きを行なつてもを計算すれば得られる。

Ref.

Johnson, F. A. and Hison, H. J. {1952}

The most efficient size and shape of plot to use
for cruising in old growth Douglas-Fir timber
Jour. of Forestry 50: 17-20

Koch, E. J. and Rigney, J. A. {1951}

A method of estimating optimum plot size from
experimental data. Agronomy Jour. 43: 17-21

Rao, C. R. {1952}

Advanced Statistical Method in Biometric
Research. Wiley

Smith, H. F. {1938}

An empirical law describing heterogeneity in the
yields of agricultural crop. J. Agric Sci 28: 1-23