

經營	72
測定	21

# 森林測定研究資料

1

昭和34年8月

農林省林業試驗場經營部

目 次

1. 1947~1949年の英国森林調査報告(要約).....	1
2. <i>British Columbia</i> 州の内陸地方における 暫定的空中写真林分材積表.....	9
3. 航空写真時代の照査法による森林経営.....	19
4. 航測林分材積表による蓄積の決定とその正確度.....	33
5. 数値計算における誤差の推定.....	47
6. デンタの丸め又は組わけによる影響.....	59
7. 常数の標準誤差を求めるための正規方程式の解法.....	105
8. 樹幹断面の幾何学について.....	111
9. インドネシアにおけるメルクシ松の成長の収穫.....	143
10. <i>Lodgepole Pine</i> の同令林分における部分的採 の効果.....	163
11. 英国における日本カラマツの一般材積表.....	177

1947年~1949年の森林調査報告(要約)

*Census of Woodlands*

1947~1949

*Summary Report*

第一次世界大戦直後 *Forest Commissioner* は英国森林地帯の第一次組織的センサスを組立てその成果は1928年に発表された。

大部分の測定は職員有志によってなされた。全森林面積の測定はかなり正確であったが森林の形による分類は多くのやりたい事を残していた。

又回のセンサスは応急対策の一部として1938~39に於て計画されたが、戦争が勃発してセンサスは完全なものからほど遠いものとなり必要な *data* は発表されなかった。

兎出致時中及び戦後強い伐採は再建事業のための必要な基礎として新しいセンサスが要求された。此のセンサスは1947に始められ1949の中頃作業は完了した。

此のセンサスは二つの主な目的を持っている。第一の目的は全国森林の中5エーカー又はそれ以上の森林を図示し分類する事である。5エーカー以下の *block* を含めば此の仕事は複雑となるであろう。

第二の目的は測定時に於ける残存林分の材積と生長量の推定である。そして此の報告は将来の伐採現正に對しては本質的なものである。此の国の私有林は此の目的のため特別に募集され訓練された男女によつて調査された。

調査者の数は変つたセンサスの期間を通じ平均40人であった。森林の各プロットは調査され必要に応じて、年令樹種 *etc* に依りて個一的型の林分の積集群に分割された。林分の境界が図示され野外の型について記録された詳細はささいなものも含む程にくふうされている。野業のデータの次に符号化され機械的に分類し表示するためのパンチカードに転記された、作業作業の状部分は *Commissioner* のため国防省によつてなされた。

国有林は国有林の人々によつて測定された。同じような基礎報告

が私有林の場合と同様に記録された。しかし好都合にも個々の *field form* を用いてそれ以外の報告が得られた。作業の重要についてその幾らかの概念は作業に用いられる分類された林分のカードの数が正しく 308,000 を越えるという事実から伺う事が出来る。

### 森林面積

此のセンサスは 3,448,362 エーカーの *Great Britain* に於ける実際のそして潜在的の森林の全面積を明らかにした(5 エーカーブロック又はそれ以上のブロック) 5 エーカー以下の小林分は計約 187,000 *acre* と推定され、その総計は 3,635,362 エーカーである。これは *Great Britain* の陸地面積の約 6.5% に相当する。

上記の森林面積は以前の伐採収獲の伐採のみを改している伐採地以外にも相当面積のカバ林や他の灌木林を含んでいる事に注意しなければならぬ、それらの大部分は境界がはつきりしていない。

Table 1 はセンサスで記録された 5 エーカー又はそれ以上の森林面積を洲又は個人の所有状態毎に地方毎に合計したものである。

3,448,362 エーカーの全面積の中、1,865,046 エーカーはイングランドにあり (54%)、1,266,838 エーカーは *Scotland* に (37%)、316,479 エーカーは *Wales* に存在する (9%) 所有については、2,825,331 エーカー (82%) は個人法人団体の所有であり、残り 623,031 (18%) が森林委員会の経営下にある国有林となっている。此れで迷っておかぬばならぬ事は個人の所有として *Class* 分けされた面積の中に御料林や他の省の委員会の役員によつて經營されている森林のいくらかの *block* を含んでいる事である。此れのは昔法人所有の森林と共に全項目のほんの僅かな割合になる。

### 森林の型

我が国の森林面積は五つの主要な林型に分けられる、喬林、新炭林、中林、灌木林、荒廃地及び伐採

各型の面積は Table 1 に表示されている。

第一番目のそして最も重要な喬林は 1~150 年又はそれ以上全階を含んでいる。

喬林は 1,788,799 エーカーであり、その中 1,029,537 エーカーは *England* に 573,336 は *Scotland* に 185,906 は *Wales* に存在する全面積の中 1,254,308 エーカー (70%) は個人若しくは法人所有である。

第二の型は新炭林と中林とを含んで此れは *England* 南部に於ける顕著な特性である。

新炭林のハンチュウに入る面積は 347,994 エーカーと計算され、その  $\frac{2}{3}$  が中林であり  $\frac{1}{3}$  は新炭林である。森林の此の型の大部分 (94%) *England* に表われる。

此の報告の第三の型である灌木林は 496,951 エーカーを占領している。

センサス調査者に発せられた訓令では、それは新炭林が、凡太材のような有用な収穫があるものとは似てもにつかぬ低い生長をするものと定義された。しかしその林を構成している樹種は此の国の地方が異なる毎に変化している。

カバとカシは開採のある主要樹種である。灌木林の全面積の半以上は *Scotland* にあり主として再び羊や鹿が入らぬようにさくのしていない開放カバ林の大部分の存在する高原地方にある。

151,000 エーカーを僅かに越える面積が荒廃地として分けられている。それは優良木の全てが取りのぞかれ十分な生長をする能力のない点在する残存木が残っている森林形であるこの型の大部分は広葉樹又は混交喬林の特に *England* 中南部に於ける戦時中の伐採の跡である。

最後の形、伐採地は計 661,554 エーカーと計算されている。此の面積の中 288,503 エーカーは 1939 年の 8 月以前に伐採されたものである。その大部分は第一次世界大戦の伐採に始まる、此の古い伐採の大部分 (8%) は *Scotland* にある、最近の伐採は 1939 年の 8 月から始まる、此れは 373,051 エーカーあり、

その166,482エーカーはEnglandに167,174エーカーはScotlandに37,395エーカーはWalesに存在する。

### 喬木の令級

Table 2, 3, 4は我が國の喬木が次の8令級にわけ分配されているさまを示している。

1~10 11~20 21~30 31~40 41~60 61~80 81~120  
120以上異令木の定義には規則的な令級に並柱するには年令が余りながつている木の群を含ませるため此れを主張する事が必要とされる。Table 2 はセンサスで測定された全喬木を分析している。このそれに次で表われる表に於てdataは夫々私有林(Table 3)と国有林(Table 4)を添してゐる。

表現の都合上Table 1の一語にされたCategoryは針葉樹と広葉樹に分けられる。そうすれば森林は全部或は主として針葉樹種であるのと広葉樹種であるのと、いづれかに級分される。

### 針葉樹

Great Britainの針葉樹林は計944,947エーカーで666,102エーカー(70%)が30年以下であり30~80年の間のものは179,374エーカー(18%)で残りは80年又はそれ以上のものは49,724エーカー(5%)と異令木の67747エーカー(7%)を構成している。

森林委員会の植栽活動のため1~30年Classの面積が多くなつたTable 3の關係はGreat Britainの私有林の48%である事を示している。31~60年の間では24%, 60年以上は17%。異令木は11%である。老年級—80年以上のものは大部分 of landに存在する。

### 広葉樹

Great Britainに於ける広葉樹喬木の令級の分布は(Table 2)針葉樹林とは非常に違つた姿をしている。広葉樹林の僅か8%が30年以下であり81年以上のものは僅かに27%である。全面積の約半分(47%)が異令木として分類されている事に気付くであらう。

この林分は大部分林木構造の変化が多いが大部分の林地に於て老令級の樹木は優勢の傾向がある。

### 喬木における樹種構成

喬木の樹種構成はTable 5, 6, 7に与えられているTable 5は全森林に対するものであり、Table 6は私有林のみTable 7は山林委員会が森林の植栽地に対するものである。

Table 5を見ればGreat Britainの喬木の53%が全部又は主として針葉樹林を構成している、そして47%が主として広葉樹林を構成している事が分る。然し三つの地方では相当の変化がある。即ちEnglandでは針葉樹である喬木は37% Scotlandでは79% Walesでは55%である。

主要樹種の分布は充分明瞭な地方的相違がある。英國ではナラ類が森林面積の33%で此の報告のトップでありScots松が14%で第二位となつている。

Scotlandでは面積の36%が欧州赤松であり僅か8%がナラ類であるNorway Spruceの両者は全Scotland面積の27%を占めている。Table 6, Table 7を見ればタウヒの相対的に高い割合は主として山林委員会の仕事に買つたものである事を示している。Walesに於ける位置はどの他の地方とも違つて全森林面積の4%が欧州赤松であり、もつと北豊富な樹種は26%を有するナラと18%のSpruceハリモミになつている。Table 6, Table 7とTable 5を比較すれば山林委員会の活動の結果として変化したWalesに於ける樹種分布のさまが判る。Walesに於ては日本カラマツは大体に於てヨーロッパカラマツより大面積を占めている事は注目される。

### 経済経営に適する森林の分類

Great Britainには主幹道路から離れて存在している小さな或は散在した森林がある。それらは組織的な森林経営の能があるとは考へられないから保護したり手入れしたり収穫したりする事は高価につくので違つた理由から同じ部類に入る他の森林がある

のセンサスに於て経済的經營に不適当な森林面積の概略を決定する試みがなされた。

その手続は次の如くである。測定された森林の各林分(一區劃)は、経済的經營に適當であるもの、不適当のもの、疑わしいものに分類される。

不適当の却類におかれるものは

- 1) 木材生産に不適当と考えられる地に生育する森林例へば非常に岩石の多い地、過度に露出された土地工場の煤煙をうけやすい土地
- 2) 入会地上の森林
- 3) 単に趣味のために植えられた装飾的な木や他の森林
- 4) 主として農産的性格の小面積の孤立した區劃
- 5) それらの全面積に比して長い境界をもつた小區劃や突出地
- 6) なかなか行けぬ孤立地

境界線に問題ある時は疑わしい部類に入る。その他の森林は大部分を占めているから経済的經營に適當なものとして分類されている。

Table 8 は Great Britain を通しての5エーカー又はそれ以上の私有林の此の分類方法による結果を集めている。

全面積 2,825,331 の中 2,332,876 (83%) が経済的經營に適當のものとして分類され 492,454 (17%) が疑わしいもの、不適当のものとして分類される。適當のものとの比率は Scotland で最高で 89% Wales が最低で 66% England では 81% で中位である。

### 英国森林の材積と生長量の推定

センサスの幹部職員が此の國に於ける5エーカーとそれ以上の森林の分類と記録の主な仕事をなし擧げた時特別訓練の調査班が生産林即ち喬林、中林に及ぶ data を集めるために派遣せられた。他の分類新炭林、灌木林、荒蕪地、伏跡地は、材積稱値からいつて無視しうる。

喬林と中林の3 inch 直径以上の立木材積は無作為標本抽出法に従つて選ばれた。

標準地から取られた抽出誤差の計算はその方法が此の國の全体の材積に、相当精度の推定値を与えるが各地方の各々の部属に対する数字は正確でない。

Table 9 に与えられている詳細は5エーカーそれ以上の森林の全立木材積は 2,658,4 million 立方 feet と推定される (及附4分法)

$$\begin{aligned}
 &1 \text{ Cubic foot quarter girth measure} \\
 &= 1.273 \text{ cubic feet true measure} \\
 &= 0.036 \text{ cubic meter true measure}
 \end{aligned}$$

此の材積の中 2,280,300,000 cubic feet は私有林 378,100,000 cubic feet が国有林である叢林の全上木が広葉樹であり混着林の半分の広葉樹種から成り立っていると仮定すれば広葉樹の全材積は 1,544,000,000 立方 feet 針葉樹は 1/15 平方立方 feet である。即ち 1.5:1 の比に近づく。

森林の現在の年々の材積成長量は又測定された。かくの如き推定に用いる事の本来的唯一の方法は喬林や中林の中の上木の各令階の平均生長率を決定する事である。此の方法は誤差の種々の原因が加わるが現在の可能の範囲内に於ける總体生長量の最良の推定方法である。詳細は Table 10 と 11 に与えられている。

Table 10 から全年生長量は 97,000,000 立方 feet と推定されその 2/3 (65,000,000) は私有林、1/3 は (32,000,000) は国有林のものである。総生長量の中 68,000,000 立方 feet は針葉樹により生じたものであり 29,000,000 立方 feet は広葉樹により生じたものである。此れは Great Britain を通じて 5 acre 又はそれ以上の林分に於けるものである。

Table 11 を見ると針葉樹の喬林に於て 75% 以上のものが 11~30 年令階に属する、それは小径木からなり、そしてその結果として当分の間は評価し得る程の用材の蓄積を増加しない

針葉樹の成期に達した木の生長量は最高が 4700,000 立方 feet と推定され、その中 3,700,000 立方 feet は針葉樹と 60 年生以上の

混雑林であり残りのもの(1,000,000)が混合林の類に属するものである。

針葉樹林と対象的に広葉樹の生長量の大半は老令期のものによつており、即ち林木が成期の太さに近づくか到達していると云える。

29,000,000立方feetの全生長量の中17,000,000(Table 10を見よ)は60年以上の林分である事は伐採された老令林にかわる若い広葉樹林が非常に沢山であるからである。

上に参考とした材積と生長量の推定を考察する場合に多くの森林が近づけぬため或は家の或は家のまわりの趣味のための森林となつてゐるため或は何らかの理由により保持されねばならぬという事からして林地の大部分が多少なりとも利用困難であるという事を知らねばならぬ材積と生長量のセンサス推定は形質の良否に対し何の酌量も辨わぬとして通例立木の売買取引の対象とならぬ木を含んでゐる。

Table 9~10の材積は未付々分測法立方feetで与えられている。

その材積は大枝や小枝の材や樹幹で直径で3inch以下ノ高さで10feet以下のものを除いてゐる。

(Forestry Commission Forestry Record Number 3

1951より; 葉屋)

British Columbia 州の内陸地方における  
暫定的な空中写真林分材積表

(Provisional aerial photo stand volume tables  
for Interior British Columbia)

by G. W. Allison and R. E. Breardon

序 論

ブリテッシュ・コロンビア州の総面積は234百万エーカー(214,062平方マイル)である。この森林資源に関するinformationに対する要求がたえず増大するにともない、空中写真の利用が、ちようど多年の同地図を作るのに助けとなつてきたようは、林分材積の推定を可能にする助けとなることができると考えられた。1953年以來、ブリテッシュ・コロンビア州の林野局、森林調査部のメンバーは、この問題の研究と、またこの地方の条件にあつた他の方法の適用を試みてきた。

空中写真における林分高と密度の測定値により、エーカー当りの材積をあらわすような空中写真林分材積式は、内陸の二地方について考察された。この目的に使用された空中写真は、焦点距離8インチのレンズのカメラをもち、海拔19,000フィートの高さで撮影された。原板は1:15,840の縮尺でプリントを作るために、1.95倍に拡大された。

この報告結果は、4および6の地帯に1955年に設定された414のダブル・サンプルを基礎としている。樹種の出現状態と気候にしたがつて州を分割したが、上の4、6の二地帯以外の残る5地帯の各々についても、同様の空中写真材積式を作る事が、将来の仕事として今計画されている。ダブル・サンプリングおよび或によりよい方法を発展させるよう、進歩がなされると、空中写真材積式の精度を高める事が期待できる。

現在までの結果

この問題についての作業は、適当な写真と労力が求められると直ちに着手された。現在までのところ、地帯4（中央内陸部）および地帯6（南東内陸部）は、林分材積式をつるに十分なダブルサンプルがとられてきている。仕事を簡単にするため、エーカー当り総材積と、樹高および密度の独立変数の間に、それぞれ直線関係が存在すると仮定した。各方程式は直線回帰の最小自乗解からなり、その形は

$$V = b_0 + b_1 H + b_2 D$$

である。

ここで

V - 利用可能な生立木のノロ立方フィート単位のエーカー当り総材積である。地上調査によつて決定される。

H - 空中写真の視差測定棒 (Parallax bar) で測定されるときの 優勢木の平均樹高である。

D - 格子点による樹冠密度計と比較して、空中写真から求められるが、これは地上被覆率として表わされる樹冠密度である。

$b_0$ ,  $b_1$  および  $b_2$  は最小自乗法によつて、データから算出される係数である。

回帰係数の値と他の適当な統計量を、第1表に示す。

第 1 表

エーカー当り総材積 (ノ立方フィート単位) の判読樹高と密度に対する一次回帰

	針葉樹 (伐期令級に別置 せるもの)	針葉樹 (伐期令級未置)	広葉樹 (令級込)
地帯 4			
回帰係数 $b_0$	+ 98.5	- 129.9	- 113.5
樹高の係数 $b_1$	+ 3.38	+ 5.53	+ 3.33
密度の係数 $b_2$	+ 0.629	- 0.378	- 0.096
重相関係数 $R_{VHD}$	.50	.44	.46
偏 係数 $R_{VH}$	.46	.64	.46
ダブル・サンプルの数	165	44	37
地帯 6			
回帰係数 $b_0$	+ 221.8	- 78.3	- 90.4
樹高の係数 $b_1$	+ 2.68	+ 1.54	+ 2.85
密度の係数 $b_2$	- 2.927	- 1.472	+ 0.116
重相関係数 $R_{VHD}$	.28	.51	.66
偏 係数 $R_{VH}$	.18	.33	.39
ダブル・サンプルの数	119	23	16

結果の討議

第1表の結果は説明を要する。

1. 本稿および未成熟の針葉樹林におけるダブル・サンプルは、それぞれの地帯でのすべての立木を完全に代表しているものではない。地帯4におけるダブル・サンプルは、主としてトウヒ (Spruce; *Picea glauca*) および Balsam (*Abies lasiocarpa*) の林分で、時には モミ (fir; *Pseudotsuga taxifolia*) や fir-cedar (*Thuja plicata*)、北米産ツガ (hemlock; *Tsuga heterophylla*)

であつた。地帯らにおけるサンプルには、*Douglas fir*, *Adas hemlock*, *balsam spruce* (*Picea Engelmannii*) およびカラマツ (*Larch*; *Lasix occidentalis*) を含んでいるが、*yellow pine* (*Pinus ponderosa*) は含まれていない。各地帯内における地位および林令の範囲は通常広い。*lodgpole pine* (*Pinus contorta* v. *latifolia*) の純林と落葉樹の純林は、サンプルの不足から一緒にした。これらは一般に針葉樹との類似点が少ない。この作業に対する援助は、*Karl Moessner* (*Intermountain Forest and Range Experiment Station, Ogden, Utah*) によつて与えられたが、彼は同じ空中写真材積表で、*lodgpole pine* および *aspen* の林分にも適用できるという見解をもっている。

2. 変数として林分密度をとりあげること。あるいはエーカー当り蓄材積の林分密度に対する関係が直線であるという仮定は、明らかなに問題である。第1表にみられるように、エーカー当り蓄材積と樹高との相関は、樹高と密度との変相関より一般に等しいか又は多少低いかの何れかである。分散分析および下検定は、密度を加えることによる効果が、ほとんどすべての場合において重要でないことを示している。もし密度の自乗が変数として導入されるならば、密度の効果は多少増大するであろう。しかしそれを変数として扱えば精度は多少増すが、使うときはそれだけ複雑になるのでそれを考えて変数としてとりあげるかどうかの吟味はして見なかつた。

3. 地帯内のエーカー当り蓄材積の変動が大きいことで、この作業は一帯に参加した数人かの空中写真測量家の各々が、いろいろな個人的要素(クセ)を持っていることの両者が作用したために、相関係数のあるものは低いことが注目されるべきである。しかしながら後に示されるように、方程式は写真の地方的な特殊性(林相)、樹高および密度を過大推定したり過少推定をする個人的な傾向を考慮して、調査の過程で修正されている。それ故に、方程式自体のなかに都合のよい相関の存在することは望ましいが、も

しある地域におけるエーカー当り地上材積と、エーカー当り写真推定材積の間に得られる相関が好適であれば、批判すべき問題ではない。実際に地域的に適用してみると、すべてエーカー当り材積の写真推定値と、エーカー当りの地上材積との間の相関は、概略的には非常に増大した。例へば地帯4の方程式にもとづく地上材積(胸高直径1.1ノインチ以上の)と写真推定値が、*buline* 湖の附近で比較されたとき、その相関係数は0.82であつた。

写真材積式の紹介

材積式を扱う場合には、材積式をグラフであらわした方が最も便利だということがわかつた。材積式は、各密度感毎に樹高の三つの値として解かれ、その結果はFig 1に示されるように、グラフを作ることに用いられた。(地帯4における成熟した針葉樹の林分についての写真材積推定)

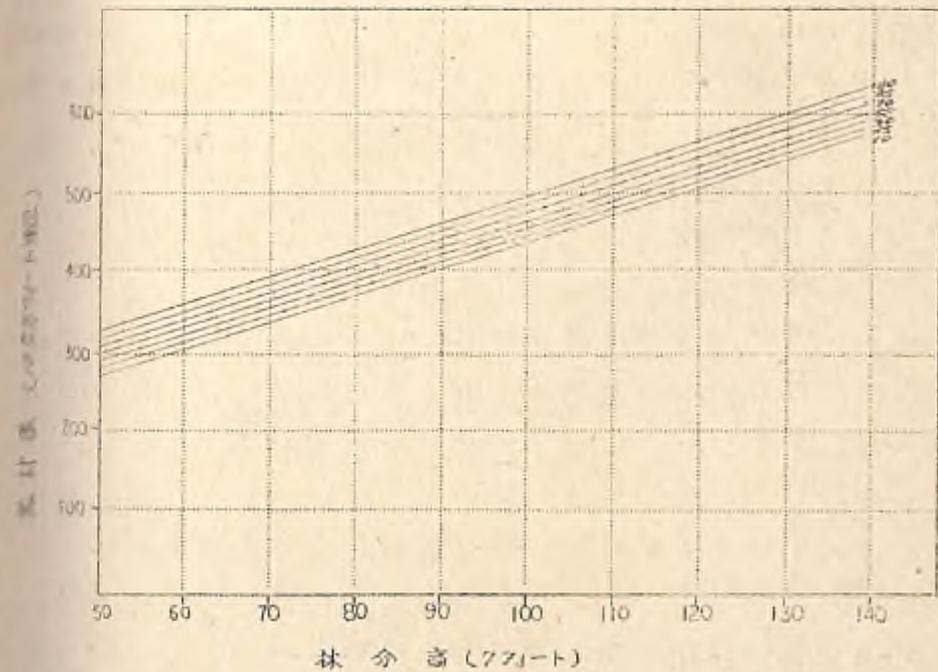


Fig 1. 地帯4におけるMature Coniferous 林分についての写真材積推定の関係

### 写真材積グラフの応用

林相毎の立木材積推定を必要とする林地がある場合、写真材積図の使用はダブル・サンプリングにおけるノツの問題となる。たゞ概略的な予備的な推定値が必要な場合、材積はその地帯のグラフから直接読みとればよい。現地調査は、地方的な修正の因子（係数）をうるのに必要である。簡単にその応用の段階を述べれば次の通りである。

1. どちらかと言えば、ランダム方式によつて、比較的多数の写真標本を各林相毎に配分する。写真標本の樹高と密度を測定し、写真材積グラフから、それに相応するエーカー当りの総材積を求む。
2. 全林地と地上調査地に対する上述の写真標本についての比率を示す。
3. かくて空中写真標本から求められるエーカー当り総材積は、全地域について地方的な写真材積ノ地上材積の回帰を導くために、地上調査から得られるエーカー当り材積と結びつく。この回帰は、地域における各林相毎のエーカー当りの修正された総材積を求めらるのに、利用される。式は次の通りである。

$$(i) \quad b = \frac{\sum GP - \frac{\sum G \sum P}{N}}{\sum P^2 - \frac{(\sum P)^2}{N}}$$

こゝで  $G$  = 地域内の地上標本からえられるエーカー当り材積  
 $P$  = 地域内の写真標本からえられるエーカー当り材積  
 $N$  = 地域内の地上調査における標本の数

$$(ii) \quad G = \bar{G} + b(P - \bar{P})$$

こゝで  $G$  = 林相毎のエーカー当りの修正された写真材積  
 $\bar{G}$  = 地域内の全地上調査のエーカー当りの平均材積  
 $b$  = 上記の (i) 式から与えられる。  
 $P$  = 1 林相内の単一標本（二重標本でないもの）についてのエーカー当りの平均写真材積（写真材積グラフ

から)

$$\bar{P} = \text{地域内の全ダブル・サンプルについてのエーカー当り平均写真材積}$$

以下は特殊な林地に地帯別の写真材積グラフを適用した例である。Kootenay 河の支流、Cochran Creek 流域の一部（25,800 エーカー）が例として選ばれた。36 の写真と地上のダブル・サンプルと 259 のシングル写真標本が、試験地域として設定された。ダブル・サンプルは、地方的な写真材積ノ地上材積の回帰を発展させるために用いられ、この地域についての“ $b$ ”の値は、前記の (i) 式を解いて 1.3294 を得た。この値は、地域内のある林相についての写真材積推定値を決定するのに用いることができる。1950 エーカーのノツの成熟した針葉樹林の写真材積推定値の計算が示される。

例として用いた林相は、7 つの写真と地上のダブル・サンプルと、18 の写真のシングル・サンプルであつた。（すなわち合計 25 の写真標本と 7 つの地上標本）地域内の写真と地上の 36 のダブルサンプルは、地上調査によるエーカー当りの平均材積が 3,247 立方フィート（胸高直径 11.1 インチ以上）（ $\bar{G}$ ）であり、写真推定によるエーカー当りの平均材積は 2,799 立方フィート（ $\bar{P}$ ）である。単一林相では、写真推定によるエーカー当りの平均材積は 3,190 立方フィート（ $P$ ）であり、地上調査によるエーカー当りの平均材積は 3,603 立方フィートであつた。前記の (ii) 式を解くと次の通りである。

$$\begin{aligned} G &= \bar{G} + b(P - \bar{P}) \\ &= 3,247 + 1.3294(3,190 - 2,799) \\ &= \text{エーカー当り } 3,247 \text{ 立方フィート (胸高直径 } 11.1 \text{ インチ以上)} \end{aligned}$$

地方的な修正をしないと、林相によつて写真推定によるエーカー当り平均材積と、地上調査によるエーカー当り平均材積との間

に、実質的な差異が存在することは注目されるべきである。

誤差計算は示さないが、同題の針葉樹の成熟林相における結果のみを示すと

エーカー当り平均材積の地上調査による推定値 (胸高直径 11.1 インチ以上)

(7 標本) = 3603 ± 1134 立方フィート (2SE)

エーカー当り平均材積のダブル・サンプリングによる推定値 (胸高直径 11.1 インチ以上) (25 標本) = 3767 ± 714 立方フィート (2SE)

である。

この針葉樹成熟林のエーカー当り写真推定値と、エーカー当り地上材積の相関は、地帯Ⅱの全針葉樹林の相関係数 0.28 に比し、0.68 であった。写真材積推定値の誤差は、17.0% (2SEで) であるのは、地上調査によると、この林相におけるエーカー当り平均立木材積 (胸高直径 11.1 インチ以上) は、31.5% の誤差 (2SEで) を有する。地上調査のみで同じ精度をうるためには、11 の追加の標本を必要とする。かくて、地方的な修正を加えた写真材積グラフの利用は、結果的にはその林相における材積推定の実質的な改良となった。

### 結 論

地方的な写真材積 / 地上材積の回帰を定めると、写真による材積推定をするのに多くの利益がある。最も大きな利益は、時間および経費の節約である。40 から 60 の写真調査が、1 つの地上調査の測定に必要とするのと同じ数の労力と時間で測定される。また写真調査は、地上調査のように天候の状態には左右されない。

更に一般に行われている地上調査は、標本がランダムあるいはそれに近い方法で配置されるとき、最も信頼できる。このことは、しばしば現地で標本地の原点をきめることが困難な標本をもとらなければならなくさせる。ダブル・サンプリングでは、ダブル・サンパ

ルの位置の有意選定は、(この場合各々の写真で判読された樹高図等には、ほぼ同数の標本を選ぶ) 差支えないのみかむしろ望ましく、そこではランダムな方法で必要とする標本よりも少ない標本の数で十分な精度の "b" の値をうることができる。ダブル・サンプルの有意選定は、ある程度便宜的な選定と結びついている。もしいくつかの地上標本が、樹種の分布、cull factor および材質に関する知識をうるために、各林相毎に配置されなければならぬとすれば、それらがえやすいところに配置することができる。

写真材積推定法の利点は、事業区の管理上重要である。比較的少量でも、正しく選ばれた地上標本は、その事業区についての写真材積 / 地上材積の回帰を求めるのに役立つであろう。この回帰をうるに、外業を行うことなしに、その事業区内にどのような林相がまぎっていても、その材積の推定は可能となるであろう。

### 参考文献

1. Schumacher, F. X. and R. A. Chapman. 1948. Sampling methods in forestry and range management. Duke University School of Forestry. Bulletin 7. 195-199  
(The Forestry Chronicle vol. 34 No. 1 1958 51; 52)

航空写真時代の照査法による森林経営  
*The Control Method of Forest Management  
 in an Age of Aerial Photography*  
 A. F. Hough

森林経営の分野には極めて重要な三つの概念がある。此の概念の発展過程をたどり用材生産の森林経営計画を樹てるのに用いることのできる実用的な方法を示すのがこの論文の目的である。

照査法 *The method du controle*

1825年フランスの Besancon で生れた Adolphe Guinard がはじめて照査法を提案した。Guinard は森林経営は統制された造林的方法の手段として使用すべきであると主張した一人の異端者である。彼はフランス国営林の番人の深遠を拡張した。又向後並びに森林経営についての現在公認されている見解にも反対した。

1878年に Guinard (17) は純粋調査により蓄積と伐採量とを統制する彼の方法を発表した。最も簡単なものでは、此の方法は次の様な事項を含んでいる。(1) 一定の最小径級以上の立木の直径の測定並びにその再測。(2) 立木と同じ方法による伐倒木の径級と材積の測定。(3) 新規の調査の際新たに最小径級(健全成長量)に達した木の測定。(4) 調査毎に得られた結果を比較するため立方呎単位の地方的材積表を用いて材積計算をすること。

Guinard はすでに1866年にフランス国営林の記録から思いついており、かの有名な照査法を発表した時にはフランスアルプスのジュラ帯に於て二三の公有林を此の方法で経営していた。

この公有林で彼は自分の理想を実現しようと試みた。状況が悪く彼は余り成功しなかつた。この方法の発展はさらにスイスの Henri Biolley (1858-1939) によつて行なわれた(4, 5, 6, 7) 彼は1890年にいくつかの公有林にさらに後年 Neuchatel の全 Canton に、この経営方式を導入するのに成功した。彼は照査法の原理を見

い出すためにスイスに住み、ますますその実行に務めた。照査法即ち継続調査法による記録についての賛否両論は過去25年の間多くの林業技術者によつてよく議論されてきた。スイスの山岳地帯及び針葉樹林の状態は択伐林で用いられる、この方法によつて好都合なものであつた。しかし同令林の造林方式が現在とられている他の土地にこの方法を適用することについては甚多の疑問がある。

具合悪いことには粗成長量を記録し林地の伐採及び林分構造を規制するこの測樹方法は、同時代になされた"した。Bauerwald (恒続林) Planterwald (択伐林) Methode du jardinage (平木法) といろいろな名称で呼ばれている各種の新しい造林法の概念と混同し、そしてその一部であるとかんがえなければならぬ。

Kunckel (24) によれば照査法の用途は択伐林に限定されてはいない。皆伐作業が実行されその意味を失つている場合を除いて、あらゆる林型に適用出来るのである。いかなる場合でも作業規制、working control 森林の取扱いに適用するよう改めるべきであつて、それを外れてはならない。

照査法は最上のもので定期伐採及び所製法正な令取配置の機械的な方法で経営出来ぬ不規則な異令択伐林に最も広く適用されていることはたやすく理解できる。

林業技術者の中には照査法を適用する前に林分を全令林に変更しておかねばならないと誤つて信じている者が多い。

過去の経営方法の資料の欠けている所では、照査法は蓄積量及びその分布、成長量、生産量の状態、各種の撫育方法や収獲伐採方法の効果について最近の資料を経営者に提供する。しかしこの方法は林型、更新のための造林方法或は収獲方法一部分皆伐が実行されていゝて大面積皆伐が行なわれていないならば一の制約を受けない。

照査法の説明を了る前にすでに引用されたものに加えて、この目的のために有益な論文について説明しよう。不規則な林分の成長量と経営を扱つている各種の文献をの大部分はWahlberg (46) が記載した146の引用文献に含まれている。H. Arthur Meyer (28)

は照査法に関する彼の卓越した論文の中に森林生長量決定に関する21の文献を掲げている Kunckel (24) は"択伐林の経営照査"なる興味深い論説にヨーロッパの着者全体に亘つて32の引用文献を添している。

これ以外の極めて価値のある仕事は故 R. Bourne の行つたもので"着理理論における誤謬"と云われている。1924年からEngland の Children Hill のブナ林を継続調査で照査しながら徐々に全令択伐林型に変えていつた。分つている限りにおいてこれが現在(1950) England での照査法の唯一の例である。Bourne は10の引用文献をのせた。Dannackon (10, 11, 12) はドイツの森林経営への照査法の使用を推進した。記載する時により大なる経済的収益のあるように生産を絶えず改善することを目的としている"生産管理"と知られている農業経済の新しい概念にそれを似せたのである。

米国では Burt Kirkland (20, 21, 22, 23) は照査法即ち継続調査法の使用及び特に Pacific Northwest の残存老令林に対しては平木法の使用を強調した最初の一人である。彼の思想は Crosscut, Arkansas (33, 39) その他の実験林経営の管理に影響をおよぼした。

H A Meyer (25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32) は照査法及びスイズ、メキシコ、米国で用いられているその他の成長量決定方法の地方的な応用について説明し、これをやりとげた。

Osborne (37) は米国において大規模即ち州の規模の森林調査にこの方法を適用した最初の一人である。

Holt (18) はカナダのパルプおよび製紙工業についての情報を得るためにスイスの Alfred Huber の方法を転用した。

#### 林分構造 Stand structure

森林経営の道具としての林分構造の利用(林地の直録分配を示す林分グラフ)は1878年 Gunnarved によつて示されたが Bechtelley が再びそれを取りあげた1890年まではあまり利用されなかつた。

初期の段階では、個々の直径級間の関係には余り考慮が払われなかつた。直径級別の本数が主として材積資料を得るために用いられた。即ち三つの巾 ない直径級 — 大、中、小 — 別に累算された。1898年に Liocourt はフランスの Vosges 地方のモミ状材林の林分グラフが典型的な逆丁字型をなし、最小から最大のものに至る大きさ順の直径級の本数が等比級数を示すことを発見した。

その後の研究で此の逆丁字型の直径分布は半対数方眼紙に直線として表わせることが示された。この方法は林分構造および森林調整の研究での分析や応用を容易にする。(26, 30)

林分構造に関する重要な文献は Flury (14) Vaubot (45) d'Alverney (1), Schaeffer, Gayin, d'Alverney (40), Francois (15) のものである。Hough はペンシルバニアの白松原始林の発展の歴史を決定するという特殊な目的のために直径分配の資料を利用した。Southern は (41) (42) はカナダの森林の各直径級別の直径定期成長量を決める方法として、標本プロットの定期調査によつて得られた累積的な林分配置の資料を用いた。

Meyer (30) が示しているように大森林の直径分配は逆丁字型になる傾向がある。これは十分に経営の行なわれている択伐林及び原始林の大部分だけではなく、地方森林或は州の森林の場合の標本、かなりの蓄積の小丸太、小径及び大径用材を含有している大森林においても当てはまる。

かゝる指数曲線の特性は隣りあつた直径級の本数間の比又は商が一定の値であることである。此の常数 "r" の数値は相対的的林分密度、林相、立地及び経営の要素のような林分の特性に従つてない巾を示している。

1) 望ましい蓄積、2) 直径級別の材積の粗成長量、3) 許容伐採量の推定の計算に対するこの関係の利用は釣合のとれた異径林について Meyer が概略説明している。

### 森林調査法 Forest-survey methods

湖水が点在している広大な針葉樹のパルプ用材林で作業が行なわれているカナダでは初めて水上機による境界測定を採用した。(47) 今日では、土地利用面積、土地とその境界、河川、道路、建築物、林相、土壌、立地図の作製及び林分の直径、用材の疎密度級や材積級を描写するのに航空写真を用いている。

Stephen Spurr (43) は林業における航空写真の利用について述べ、良い書物を書いている。Moessner (34, 35) は森林整理に対する航空写真の価値および林地の写真による地位分類方法について説明している。同じ様な概念が Wilson 及び Berard (48) により野生植生の分類について概説されている。

森林経営者にとって航空写真は極めて価値のあることが足悉されている。用材生産の経営計画を定むる場合に上手く用いるにはどうすればよいだろうか？ 低コストで基本図や林相図を作製するのに写真技術を用いるのが通常最も簡単な場合である。この地図は用材材積や面積推定の仕事を非常に簡単にする。Choate (9) および Sump は Forest Service Region (9) で用いた方法について述べた。Pacific North-west では得られた結果の精度を上げるため、製図された林地の層化無作為サンプリングを用いた。Central State の広葉樹帯では、三段抽出法 — 区割された級の本数内でのサンプリング — が用いられ、良好な結果が得られた。

最近では Northeast の森林調査のため改良されたサンプリング計画が Bickford (2) により展開され説明された。この方法は写真上での層化を省略し写真上で無作為に選ばれたプロット中心又は点の周りのノーカーについて写真プロットを分類するのである。人類の母集団に対して Neyman (36) が用いた数理的サンプリング計画が林木の母集団について用いられたのである。

統計的公式をはぶけば "二段抽出法" といわれているこの方法は林分の直径、疎密度級に写真プロットの標本を分けることであつて

極く安価な費用で実行出来るのである。写真プロットの標本は地上で測定される。林地の生産物である全材積及びその森林内の与えられた林分の径級又は疎伐度級の平均材積を推定するのがその目的である。地上プロットの材積と写真プロットの級との相関は容易出来る材積推定値を与えるに充分なものである。推定材積の信頼性を剛るために抽出誤差が計算されるであろう。層分けが困難な *Northwest* や層による実際の林地の区分が不必要な森林調査ではよくこの方法が用いられる。

*Bickford* は林分クラスの地図が不必要の場合(普通の)循環調査方法やこれ以外の航空写真に依る方法の代りに大面積の森林調査はこの計画を適用することを示している。自然の枯死、伐採又は消費成長による連続的な林分の変化を決定する問題も今日までに行なわれた州規模の森林調査に関係した。近代統計学者の関心を引いているのである。

*Osborne* (37) は *Bickford Chapman Caporaso* (3) の *Maryland* の *Eastern Shore* の森林調査で試験的に行ったものの中標準地連続調査法について述べている。この試験は次の事を明らかにした。(1)消費量を推定するためにとられた追加地上プロット又はストリップは最後的手段として用いる場合を除いて無効過ぎた。(2)樹木の成長量は各プロット毎に全林木を分類するよりも分類された単木の標本から決定出来る。(3)日をおいて撮影された一対の写真を利用することは消費量を推定する有効な方法である。(4)写真判読により森林の層を決めるには、立方呎単位で材積級を用いた方が普通の林分大いさ級を用いるより優れている。

*Osborne* はさらに生長枯死及び伐採による林分の変化を推定する手段として固定標準地の連続的調査を行うことについて述べた。連続して測定された単木又は再測される標本プロットを有する全林分の成長量を決定する各種の統計的方法を説明している。

"この方法は実際に測定された成長量に基づいているからその誤差は抽出誤差及び回帰方程式に含まれる統計的誤差に限られている"

と叙は述べている。

提案された方法 *The method proposed*

調査法は用材林の経営計画のため航空写真又は統計的サンプリングを用いて大規模に応用できるように修正できる。

原則として調査法はある径級以上の全林木の輪尺測定値に基づく実際の地上調査法の補わっている林班内で適用された。このように集約な記録をとる費用の高いことが多くの国で此の方法を採用することを妨げていたのである。(1)最初の調査資料を得 (2)毎年収穫される林地内で毎年新しい標本を追加して最初の地上プロットの級つかを再調査し (3)一回隔年級にある調査プロットに生ずる成長、枯死は株による着積の変化を推定するために近代的な森林調査法の技術を用いるのが提案した方法である。

伐採の調整は先に述べた林分構造法によるであろう。最大の生産量を得るために林分構造を改良し、蓄積を増すために準備がなされるであろう。

恒久的性質の中の大い林木又は地位級と、実行可能又は不可能な用材林について修正されているが、費用のかからない因化がこの経営計画の一部として提案された。

最初の調査 *Initial inventory survey*

最初の調査で得られる基本資料は次のものを含むであろう。主要樹種又は樹類別の本数及び材積、各層内の之の直径級、径級別の面積、等級別の材積分析、樹種および径級別の直径成長についての予備的資料をうるため、地上プロットにおける標本木の成長率調査が用いられるであろう。

航空写真はこのような調査や提案された修正連続調査体系の後の段階に比べて本質的のものである。写真プロットは *Bickford* が概説した分類を行うためにプリント上にスポットされるであろう。地上プロットは同じ標に選ばれ、測定されるであろう。この計画では

経営者が必要とするある正確度を得るのに必要なプロット数を決定出来る。

経営計画のため異つた林分又は林分状態を定める場合、航空写真上で林地を区画する必要がある。区画が用いられる又は用いなければならぬ限界又は程度が次に同じである。

### 区画化の問題 *The problem of delineation*

全材積を得るための調査には、航空写真で実際に着を区画する必要のないことが示された。

詳細な林型、林分の大きさ、疎密度級の区画が森林経営者にとって本質的なものと感じている人が多い。ある調査の方式では区画が材積推定値を得るための芽/段階で、その場合標本プロットは地上の各層の中で定められる。

当然森林経営者は確実な面積統計を持ち効果的な経営をするために所有地を各林分級に区分できなければならない。実際の経営計画を立てるために、南部林業試験場の R.R. Reynolds (39) は林地の極端な分類について次の様に警告している。

“林業技術者達は一般に誤を犯している様に思われる。彼等はくせをもっている。このことから彼等は出来るだけ多くの林相を製図、調査、経営の段階で認めようとして最善を怠っていると云える。これだけでなく、林相図は各林相を約ノダースの林分級に分類しない限り良好のものとしないう様に思える。”

数多くの級の使用は失敗の因となり、上司は全計画を実行不可能なものとして棄ててしまうであろうということを彼は暗示している。

区画法及び地上プロットによる現地照合は *Region 9 system* について Choate (9) Jump (44) が概略説明している。26の林相々々の林分の径級。3つの疎密度級に区画された基本図を航空写真から調製する費用は Lake 州と中央州にわたる 35,000,000 エーカーについてエーカー当り平均 5.5セントであった。ここに示されているクラスの多くは成長、更新、伐採のためにかなり急激に変化する

ることがこの様に詳細な面積図化の作業を遅くする一つの原因である。地図調製の *Region 9 system* について、細かく分類されていない所には広範囲に亘るサンプリングによる照合を適用することが必要と思われる。ある地方の広範囲の林相群を与えられた作業級<sup>\*</sup>について航空写真で判別し区画することだけを提案しているのである。林分の径級及び疎密度級は森林経営の見地からは一時的のものである。

我々が知らねばならないのは間伐又は主伐をするのに十分な蓄積があるか、換言すれば与えられた林分は遊業可能か否かということである。

遊業性の点からパルプ市場のある地方でパルプ材として伐採できる径級の林木、樹種が存在すればその林分は遊業可能と考える。

此の計画では写真上で区画される最小の面積は少くとも40エーカーで一般には100エーカーである。

### 作業級の細分

大作業級は通常地形によって区分される伐区 (*block*) と呼ばれる管理上の大区割に分割されるであろう。これはさらに林班といわれるより小さい単位に区分されるであろう。最小単位即ち林班は業務的な森林規正には役に立つが、ここで述べている広範囲に亘るサンプリングによる継続調査は助けとならず、かえって障害となることが多い。作業級の細分について次の方法が提案されている。

定められた回帰年の年数と同数の小班又は伐区に作業級内の遊業林分の全林地を分割する。蓄積がかなり相異していることが分つている場合にはこのことを林地を細分する際考慮しなければならない。その目的は等面積が遊業されるといふより伐採量を毎年ほぼ均等

\*注 Gross (14) は作業級を“一様な伐採収獲があるように計算されている林地”と定義している。

にすることである。

### 伐採予定案

各伐区内の施業林分の伐採面積、順序、時期を計画するのが伐採予定案である。この計画は次年度までの伐採量の指定されている林地について毎年このような調査を必要とするので、これも又再調査におけるプロットの再測を必要とするであろう。

例えば回帰年が10年であればその期間を通じて10ヶの小班又は伐区が施業されることを伐採予定案は示すであろう。経営計画は実際の伐採計画を置いて、毎年伐採される面積、材積が記載されている林地にだけ適用できる。この方法で作業級全般に亘る経営的な体系が得られるのである。

### 継続的調査の技術 *Reinventory technique*

伐採予定案のたてられた林地では、現在存在しており、再設定できる最初の調査で得られた全標準地は、伐採直前まで確認し測定されるであろうほぼ同数の新しい地上標準地が施業林分で無作為に選ばれ、伐区全般に亘る全材積の良好な推定値を得るため、同時に測定されるであろう。毎年おこなう継続調査から得られる知識は施業が予定されている伐区について、許容伐採量の修正推定値も与えるであろう。新しいプロットの選択は *Bickford* (2) が概説したはじめの調査と同じ統計的設計に依るであろう。

測定可能な大きさに達する小径木の進界成長、直径階別材積における残存木の成長量及び自然枯死による消失は、最初の調査プロットの再測により林分内の真の変化として示されるであろう。再測プロットの材積計算は一貫性を与えるために前に用いたものと同じ地方的立方呎単位的全材積を示す材積表を用いて行われるであろう。この標準プロットの継続測定は従来の際法の100名定期調査と同じ林分変化についての資料を与えるであろう。

諸君の内には大標本の写真プロットで補充されているとは云うも

の、小数の地上プロットから得られた資料の信頼性については疑念をもっている者もあるであろう。

無作為標本は本当に母集団即ち作業級の林分状態を代表しているであろうか。

抽出誤差の計算は推定材積が真の材積の±何%以内で信頼できるという保証を与える。われわれは5~10名ストリップ又はラインプロット調査による用材林のサンプリングの結果を認めている。標本を収束するために航空写真および近代統計的設計を用いて修正すれば小数のプロットを用いるだけで精度の高い結果が低コストで得られる。

### 許容伐採量 *Allowable cut*

施業対象となる用材を含む作業級又は伐区で与えられた回帰年を通じて伐採される許容材積を推定する方法は次の通りである。

1. 最初の調査の地上プロットの様本から2.5cm直径級別の平均直径分布(エーカー当りの本数)を計算する。半対数方眼紙にこの値を原座する。普通第一図に示すものと同様なグラフが得られる。これは利用可能の最初の蓄積を表わしている。
2.  $d$ ,  $b$ ,  $c$  各級別の成長量(地上プロットの標準木の成長量又は第1回の回帰年の終りに測られた木から決定される)から10年後に予定される直径分配をプロットする。枯死率は此の最初の成長量推定のために部分的に伐採される林分では省かれる。
3. 林木の生育し得る最大の径級を決定する。例では(Fig 1) 仮にスギ林としてあるのがこれ以外の径級とすることもできる。メーカーは必要があれば単木の場合にはこの限界を上げる標本図表を。
4. 第1回の回帰年の終り即ち10年後に期待される林分の $g$ を計算する。(Liocourt 比) Meyer (30)によれば、経過されていない大部分の林分の最良の収獲量に対しては高過ざる限である。例では(Fig 1)  $g = 185$  とした。

5. 最後にオ一回の回帰年の終りについては、上で計算されたものより幾分小さい $\bar{y}$ を定める。この様にしてエーカー当り残存大きな材積をもつ平均林分が認められることになる。10年間にその数値は $\bar{y} = 1.85$ から $\bar{y} = 1.75$ まで変化する。長期間の終りにては、(スイスの全令施業林に匹い)1.6か1.5の $\bar{y}$ となり得るのである。 $\bar{y} = 1.75$ の際が直径 $6\text{cm} \sim 24\text{cm}$ についてオノ図に示してある。

6. 伐採し得る量は $\bar{y} = 1.75$ の線とオノ一回回帰年の終りに期待される林分についてプロットされた値との間の本数で表わされる。この許容伐採量は、現在必要とされる最大の径級として仮に定められた $24\text{cm}$ 以上に達している林木を全て含んでいる。

ノ図に示してあるように伐採されるものは主に1.2 $\sim$ 1.6 $\text{cm}$ の木でありこの部分の林分グラフでは通制の本数、材積が増えることになる。次の回帰年に1.8 $\sim$ 2.4 $\text{cm}$ 級まで成長するに十分な本数が残されている。標準地の次の再測の際、その立地、気候条件の下で到達できる最大の用材を生産するのに適した割合のとれた林分増進へと修正された新しい $\bar{y}$ の値は伐採を再び等びくであろう。

施業方法 *The method in operation*

この方法は明らかに最初の調査に続いてぼう大な調査作業を行う必要がある。継続調査の仕事は伐採直前まで校正又はそれ以外の区画で毎年行なわれる。

この方法の費用は比較的軽い。例えば200,000エーカーが作業級内の施業林分である、700,000エーカーの最初の調査は総面積についてエーカー当り1.6セント施業林分についてエーカー当り5.7セントの費用で3,000の写真プロットと300の地上プロットを用いて行うことが出来た。この中には写真判読、図化及び地上プロット設置と同様、航行、写真のプリントの費用も含まれている。

この方法が一たん施行されたならば、10個の20,000エーカー

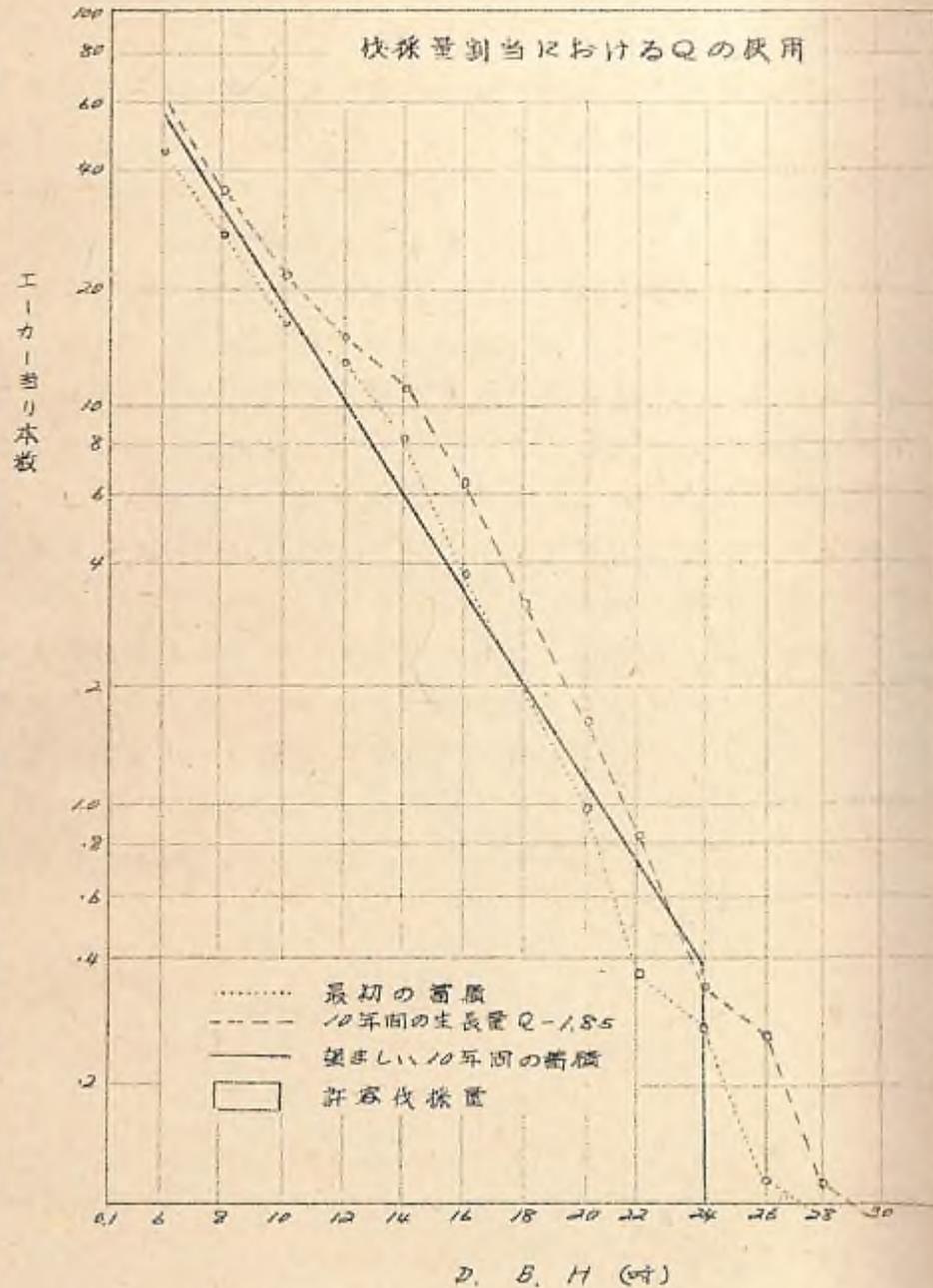
伏区のおのおの連年調査は10個の最初のプロットと40 $\sim$ 50の新地上プロットの再測を必要とする。班のリーダーとしてその地方に経験の深い技術者、補助員として熟練労働者を使用すれば、この作業は中程の起伏のある地形では約3週間で行える。"地形が険しい程、長時間を必要とする。"

年当りの継続調査のコストは一写真、地上プロット、写真判読プロット、図化、必要な計算を含めて一20,000エーカー伏区に対して1700ドルを超えないであろう。これはエーカー当り約69.5セントに当り、経営計画としては比較的安い費用である。15 $\sim$ 20年後に新しい航空写真が得られるであろう。これは、経営者がその期日に施業可能な径級に成長する林分を調査することを可能にする。この写真は図化の必要がある。施業可能でなくなった林分はこの時は考慮外としなければならない。サンプルプロットの写真判読の精度が改良されるから新しい面積統計値が得られるであろう。与えられた伏区内で新たに施業可能となった林分は全て最初の調査で用いた方法で原本調査されるであろう。

この計画全体の長所は、これが効果的にとり入れられたならば、この計画は林分の変化と共にすたれてしまうのではなく、施業の効果を実証的に安いコストで記録し、森林経営者を絶えず林産物の最適の生産方向へと導びくであろうということである。

(*Journal of Forestry* Vol. 52 No. 8 P568-573)

図1 許容伐採量を決めるのにLiocourt比をどの様に使用するか。



航測林分積表による蓄積の決定とその正確度

Volume Determinations from aerial stand volume table and their accuracy

H. A. Meyer, D. P. Worley

適切な航空写真からプロットの蓄積を求めるに要する時間は、同じプロットを現地で測定するに要する時間の1/10以下で足る、したがって、航空写真による測定精度が地上調査の精度に匹敵するならば、航空写真による調査は重要な高級調査法となる。

航空写真に影響する誤差の原因としては、

- 1) 写真測定の誤差
- 2) 航空写真による林分積表の推定値の誤差
- 3) 選ばれたプロットの抽出誤差

写真測定も航空写真による林分積表はいずれも偶然誤差と系統的誤差の影響をうけている。偶然誤差は測定を繰返し行うか、抽出プロット数を増やすことにより減らすことが出来るが、系統的誤差はこれ様なやり方では減らすことは出来ないから、系統的誤差と偶然誤差から除くことが大切になってくる。この様な誤差の大きさが、地上調査に対する航空写真調査の可能性や利点を決定するものである。この論文は極めて良質な写真(諸人1:12000でマイナススワールフィルムを使った赤外フィルム)を使って、高地雲カシ林分について行った詳細な研究結果を示している。

写真測定値の誤差

偶然誤差と同様に系統的誤差の重要性を示す目的で航空写真測定値の精度を決めるための研究が行われた(4)(5)。一方偶然誤差はある程度写真判読員の熟練度によるものであると熟練判読員に対しては信頼しうる限界内で決めることが出来る。写真による樹高測定の誤差は、測定条件と判読者の熟練度とにより、最小約5%から最大約10%まで変わっている。この作業に使われた積表には、1/5 エー

カーブプロット上の3本の最高の木の平均樹高が必要である。このことはプロット毎に3本の樹高測定値が必要であることを示している。従って、その平均値の標準誤差は、 $5/\sqrt{3} \sim 10/\sqrt{3}$  即ち3~6呎である。相対的ウツ開度の標準誤差は一定であつて10%である。飛並では各プロットについて、ウツ開度の測定は2回行なわれているから、標準誤差は $10/\sqrt{2}$  即ち7%となる。林分高と相対的ウツ開度で、 $1/5$  エーカープロット当りの枚数を表わす方程式が分つておれば、これらの測定誤差による枚数の標準誤差を計算できる。

我々の林分枚数表は次の方程式で与えられている。

$$V = -5.634C + 0.1364HC$$

- V:  $1/5$  エーカープロットの7'以上の立方呎枚数。
- C: パーセントで表わした相対的ウツ開度。
- H: 呎で表わした林分高(3本の最高の木の平均)。

したがつて、C、Hの測定の際の誤差  $d_c$ 、 $d_h$  による分散は、

$$d_v^2 = (-5.634 d_c)^2 + (0.1364 d_c)^2 + (0.1364 C d_h)^2$$

$$= (3.17 + 0.0186 H^2) d_c^2 + 0.0186 C^2 d_h^2$$

樹高測定の際の標準誤差を3~6呎、相対的ウツ開度の標準誤差を7%とした時の林分高と相対的ウツ開度について計算したプロット枚数の誤差がオノ表に示してある。

表1 ここに示してある値の範囲では、写真測定の際の偶然誤差によるプロット枚数の標準誤差はプロット当り60~130立方フートであることを示されている。異なる判読者により多数のプロットを繰返し測定すれば、枚数の誤差を減らすことができる。24プロットについて、6人の判読者が2回測定した試験結果が2表に示してある。

表2 測定の際の条件としては、測定が互に独立である様にオノ回とオ2回の観測の間に1週間以上をおいた。各判読者により得られた平均プロット枚数を調べてみると、各判読者の観測値間の差は判読者間の差よりも遙かに小さいことを示している。このことは重要な系統的誤差のあること、即ち判読者間の変動が大きいことを示して

いる。このデータの分散分析が表3に示しており、これはこの考えの正しいことを示している。

表3 プロットによる分散と判読者による分散もF検定で交互作用の周と比較すれば有意である。したがつて判読者間には重大な系統的誤差があると結論できる。しかし観測値の組内の分散は小さく、その標準偏差はプロット当り60立方呎に過ぎない。このことから一人の判読者の測定値は、一週間の期間内では、かなり一様であることが分る。交互作用の項から計算したプロット枚数の標準偏差は、組内の誤差と同じく原因不明のプロット×判読者による誤差を含んでいる。これはプロット枚数を定める時の偶然誤差といわれ、 $1/5$  エーカー当り17立方呎である。表2の平均枚数は48観測値の結果であるから、系統的誤差がないとすれば、標準誤差は $17/\sqrt{48} = 10$ 立方呎となるが、実際に計算してみると42立方呎即ち4倍以上になる。この様に大きな系統的誤差のあることは適当な現地照合によつて各判読者の系統的誤差を減らす必要性が生ずる。この検定で使われた樹高の大部分は60~80呎でウツ開度は60~90%であつた。この値から測定値の偶然誤差による枚数誤差(エーカー当り15~15立方呎)を生ずる。

この検定における偶然誤差は17立方呎はこの範囲内にある。各プロットについて樹高とウツ開度を繰返し測定すれば、プロット枚数の偶然誤差は随處に減らすことが出来る。樹高測定の際の誤差は枚数誤差にかなり大きい影響をもっているから(表1)ウツ開度の場合と同じく2回測定すると良い。この様にすればプロット枚数の標準誤差がプロット当り60立方呎を越えることは稀になり、さらに写真測定値の誤差が減ればこれ以上に小さくなる。

航空写真による林分枚数表の測定値の誤差

この調査に使つた航空写真による林分枚数表の測定値の標準誤差は $1/5$  エーカープロット当り $1/3$  立方呎である。この写真測定値の誤差は無関係なこの誤差、同一樹高、同一ウツ開度の林分における

差違によるものである。その結果プロット枚数の推定値の誤差には、写真測定の誤差と枚数表の推定値の誤差を含めなければならない。即ち

$$S_p = \sqrt{d_m^2 + d_e^2}$$

- $d_m$  ; 測定値の誤差によるプロット枚数の標準誤差
- $d_e$  ; 推定値の誤差によるプロット枚数の標準誤差
- $S_p$  ; プロット枚数の標準誤差

測定値の標準誤差  $d_m$  は 60 立方呎、推定値の誤差  $d_e$  は 1/3 立方呎であるから求められたプロット枚数の標準誤差はプロットあたり 1/28 立方呎である。枚数表の推定値の標準誤差は一定で、1/3 立方呎であるから測定値による標準誤差を 60 立方呎より小さくしては得所は少い。

### 現地照合によるプロット枚数の系統的誤差の修正

無作為に選んだいくつかの写真プロットを現地で測定することにより、航空写真調査の現地照合がなされる。これは写真調査の系統的誤差即ち判読員間の誤差を減くための修正係数を計算するかに使われる。

大規模調査では成長量、樹種、欠点等を調べるためにいつでも何箇所かの現地調査を行なわねばならないので、このことは写真調査の障害とはならない。照合プロットを正確に定めるには、充分慎重でなければならず、プロット設定の誤差は一般な林分では大して重要ではないが、不規則な林分では大切になってくる。簡単のため、最終的に決定される修正係数は、どの様な枚数のプロットに対しても同じであると仮定すれば、これは次の様に表わされる。

$$f = V_a / T_p$$

- $f$  ; 修正係数
- $V_a$  ; 照合プロットの平均実枚数
- $T_p$  ; 照合プロットの平均写真枚数

照合プロットの枚数は、ある林分の地位、林相に適用される枚

数表(とにかし使用される枚数表)の誤差をうけないと考えることが出来る。

照合プロットの平均写真プロット枚数の誤差は、各写真プロットの誤差と照合プロット枚数の影響を受ける。各プロットの写真枚数の標準誤差は平均枚数のプロットに対して 1/28 立方呎であることが分っているから、 $N$ 個の平均写真枚数の誤差は

$$S_p = 1/28 \sqrt{N}$$

$S_p$  は  $V_p$  の標準誤差である。  $f = V_a / T_p$  であるから、誤差の伝達の法則から

$$d_f = d_p \cdot \left( \frac{V_a}{V_p} \right)$$

$$S_p = \frac{1/28}{\sqrt{N}}$$

$$V_a = f (T_p)$$

$$\text{より、 } d_f = \left( \frac{1/28}{\sqrt{N}} \right) \cdot \left( \frac{f}{T_p} \right)$$

この方程式を  $N$  について解けば、

$$N = \left[ \left( \frac{1/28}{T_p} \right) \cdot \left( \frac{f}{d_f} \right) \right]^2$$

規定の  $S_p$  の値、例えば 0.5 に対して必要な照合プロットの数が表に示してある様に、写真枚数と  $f$  の値に対して求めることができる。面積の大きいプロットの方が小さいプロットよりも少数の照合プロットで必要な精度が得られる。一般に必要なプロット数は 30 ~ 150 である。特定の場合作について係数の  $f$  を計算してみると、どの位プロットがいるかが分る。

### 写真調査の抽出誤差

他の調査と同様、写真調査も抽出誤差の影響を受ける。これらの誤差は測定値の偶然誤差と推定値の誤差および修正係数の誤差と一列になっている。即ち各 1/5 エーカープロット枚数の抽出誤差を  $S_c$  で表わせば、単一プロット枚数の推定値の標準誤差  $S$  は、

$$S = \sqrt{f^2 (S_p)^2 + f^2 (S_f)^2 + S_c^2} \quad V = f \cdot P$$

比較的に一様な森林、林分、再、林相又はプロットでは、1/5 エーカープロットの平均枚数の変動係数は 20 ~ 40 % である。この値

は、ノエーカープロットの枚数に対しては、(10~20%)の変動係数に相当する。

$S_c$  が平均プロット枚数、例えば300立方呎の30%に等しいとすれば、 $d_c$  は90立方呎となる。

例として  $f = 1.0 \pm 0.05$  とする、写真調査による  $1/5$  エーカープロット枚数の標準誤差は、

$$S = \sqrt{1^2(128)^2 + 0.05^2(300)^2 + 90^2} = 157 \text{ 立方呎}$$

$d_m$ ,  $d_e$  を一定の値とすれば、抽出誤差  $d_c$  は単一プロットの枚数決定値の標準誤差を受えないで、相当な範囲内まで変化させることができる。ここで大切なことは航空写真から決定されたプロット枚数間の標準誤差はうまく設計した地上調査で得られるものの約2倍であるということである。どの様な場合でも、地上調査に匹敵する調査誤差を得るには地上調査の場合の3~4倍の写真プロットを測定しなければならぬことを示している。

この様な事実、および現地照合に関する説明から、変動係数の小さい小森林に対しては写真調査の現地照合に要するプロット数より多いプロットで調査できる場合が多い。航空写真から直接枚数を決定する際の時間と費用についてその長所は、大面積調査についていえるだけである。

### 航空写真による調査

ペンシルバニア大学の林学科 University park の南に1500エーカーの地で6000エーカーの調査用の森林を経営している。前に引用した枚数表のデータとして使われたものと林相は幾分違っており、種は明らかに違っている。3500エーカーの用森林を含むこの地区の1プロットを経営調査のため林班別に100%の地上調査を行った。これは航空写真による調査のすぐれた吟味となり、又前述の空中調査の原理を検討する機会を与えるものであると考えた。隣接地の用森林の平均蓄積はエーカー当り約1500立方呎、プロット当り300立方呎である。航空写真により決定したプロット枚数

に含まれる偶然誤差は前述の通り、 $d_m =$ プロット当り  $\pm 60$  立方呎、 $d_e =$ プロット当り  $\pm 100$  立方呎であるから種々のプロット間の標準誤差は  $\pm 100$  立方呎である。まず修正係数  $f$  について次の様に仮定する。 $f = \frac{V_a}{V_p} = 1$  で許容誤差  $0.05$  で  $f$  を決定するとする。この精度で  $f$  を決めるには、必要な照合プロット数を計算しなければならない。

$$N = \left[ \left( \frac{S_c}{V_p} \right) \cdot \left( \frac{f}{d_c} \right) \right]^2 = \left[ \left( \frac{128}{300} \right) \cdot \left( \frac{600}{0.05} \right) \right]^2 = (9.5)^2 = 92 \text{ プロット}$$

72プロットが現地および航空写真で測定するために選ばれた。このプロットだけでなく隣接した2プロットでみられるあらゆる状態を含む様にこれらのプロットは航空写真上で系統的に選ばれた。実際には照合プロットは写真調査に使われたプロットの副次標本を思っているから特殊な技巧が必要である。これらのプロットのデーターが1図に示してある。このデーターを使えば

$$f = \frac{V_a}{V_p} = 1.024$$

この内縁に必要な設計量は

$$S V_a = \pm 51 \text{ 立方呎}$$

$$S V_p = \pm 98 \text{ 立方呎}$$

$$S V_a V_p = \pm 54 \text{ 立方呎}$$

$$S f = \pm 0.02$$

これから  $f$  の標準誤差は充分許容誤差の範囲内にあり、これ以上照合プロットを測る必要のないことが分る。

基本的な検討としてプロットを含む個々の林班について写真調査を行った。系統的な設計による任意の箇所写真プロットをもちいて調査を行い、測定されたプロット数で算出される誤差と実際の誤差とを比較して検討を行った。この基本的な検討結果を次に示す。それから8つの林班の全てについて修正された写真枚数は誤差の期待値がらみで実際の合理的な決定値であることが分る。さらに写真枚数は一般に低いことが分る。これは一節は修正係数  $f$  が個々の林班の副次用式で決められたのではなくて、プロット全体について  $f$  の修正係数で代用されたことによるためと考えられる。しかし生じた誤

差はそれ程的をはずれたものではないから、修正係数  $f$  が任意の林班に対して異状に違ふことはありえないということを描測しなければならぬ。その段階は全プロットについて厳正に航空写真調査を行うことである。

必要な許容誤差を 0.05 とする。航空写真による調査のプロット枚数の推定誤差はプロット枚数決定の誤差、抽出誤差の標準偏差、修正係数の誤差の影響を受ける。即ち

$$S = \sqrt{1.1^2(128)^2 + 0.02^2(300)^2 + 90^2} = 147$$

平均枚数は 300 枚であるから、この様な調査の変動係数は

$$C.V. = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{147}{300}$$

許容誤差 (A.E.) を得るに要するプロット数は

$$N = \frac{(C.V.)^2}{A.E.^2} = \frac{(0.49)^2}{(0.05)^2} = 121 \text{ プロット}$$

航空写真で 121 プロットが測定された。プロット当りの平均枚数が決定され修正係数  $f = 1.10$  を使って修正された。

その結果は次の通りである。

無修正のプロット当り平均写真枚数 318 Cu.ft    修正係数 ( $f$ )  
1.10

修正したプロット当り平均枚数 348 Cu.ft    100% 調査による  
実際のプロット当り平均枚数 335 Cu.ft

実際の誤差    -13 Cu.ft

許容誤差 (0.05)    ± 6.75 Cu.ft (335 × 0.05)

### 要 約

1. 月並の地上調査法より遙かに時間と節約できる航空写真による調査法は偶然誤差と系統的誤差の影響を受けている。これらの中系統的誤差は極めて重要であり、偶然誤差の4倍以上におよぶ。
2. 系統的誤差があるため航空写真調査では現地照合を行なわねばならない。現地照合により何個かの航空写真プロットが現地で測定される。この標にして集めたデータから系統的誤差を補正するために修正係数を計算する。

3. 特定の許容誤差範囲内で修正係数を求めるために必要な照合プロット数を計算することが出来る。本論文で述べたような条件では、±3%の精度で修正係数を求めるには、30~150プロットが必要である。実際に必要な個数は個数とプロット当りの平均写真枚数により変る。

4. 実際に写真調査を行う場合には変動係数には、プロット枚数の写真柱定値に関係のある誤差と同時に抽出誤差を含ませねばならない。この結果変動係数は、地上調査の略2倍にもなり、地上調査と同じ精度を得るには、3~4倍のプロットを測定しなければならない。

5. この決定で取扱った様な条件では、変動係数の小さい小面積の林地は同じ面積の写真調査の現地照合に必要なプロット数より少いプロットで地上調査できることかはっきりしてくる。

6. 大面積に適用される場合には、予定の精度で航空写真から直接求めることは実際的であり、経済的でもあることかはっきりする。

引用文献

1. Gingrich, S. F., and H. A. Meyer. 1955. Construction of an aerial stand volume table for upland oak. *Forest Science* 1: 140-147.
2. Worby, D. P., and G. H. Landis. 1954. The accuracy of height measurements with parallax instruments on 1:12,000 photographs. *Photogrammetric Engineering* 20: 823-827.
3. -----, and H. A. Meyer. 1955. Measurements of crown diameter and crown cover and their accuracy for 1:12,000 photographs. *Photogrammetric Engineering* 21: 372-374.

(*Journal of Forestry* May 1957 47: 乗風)

1表 写真測定の高さ誤差による1/5エーカープロットの  
写真材積の標準誤差

林分高	樹冠うっ閉度%					
	40		70		100	
feet	Sc = 7%		Sc = 7%		Sc = 7%	
	SR	SR	SR	SR	SR	SR
	3 ft	6 ft	3 ft	6 ft	3 ft	6 ft
40	57	64	62	77	68	99
70	77	84	83	96	88	113
100	104	108	107	118	111	132

2表 24個の1/5エーカープロットの航空写真測定による  
平均プロット材積

判読者	観測値1	観測値2	平均
	feet <sup>3</sup>		
1	345	336	340
2	294	299	292
3	247	236	242
4	269	274	272
5	361	271	316
6	358	342	350
平均	311	293	302

実際の平均材積 = 314 feet<sup>3</sup> プロット当り

3表 6人の判読者の行った写真調査によるプロット材積の分散分析

変動因	平方和	自由度	平均平方	F
プロット 向	606.941	23	26.389	5.2
判読者 向	440.551	5	88.110	19.4
P x I の交互作用	582.611	115	5.066	
プロット観測値の対向計	1,630.103	143	11.399	
プロット観測値の并内	566.597	144	3.936	
計	2,196.700	297		

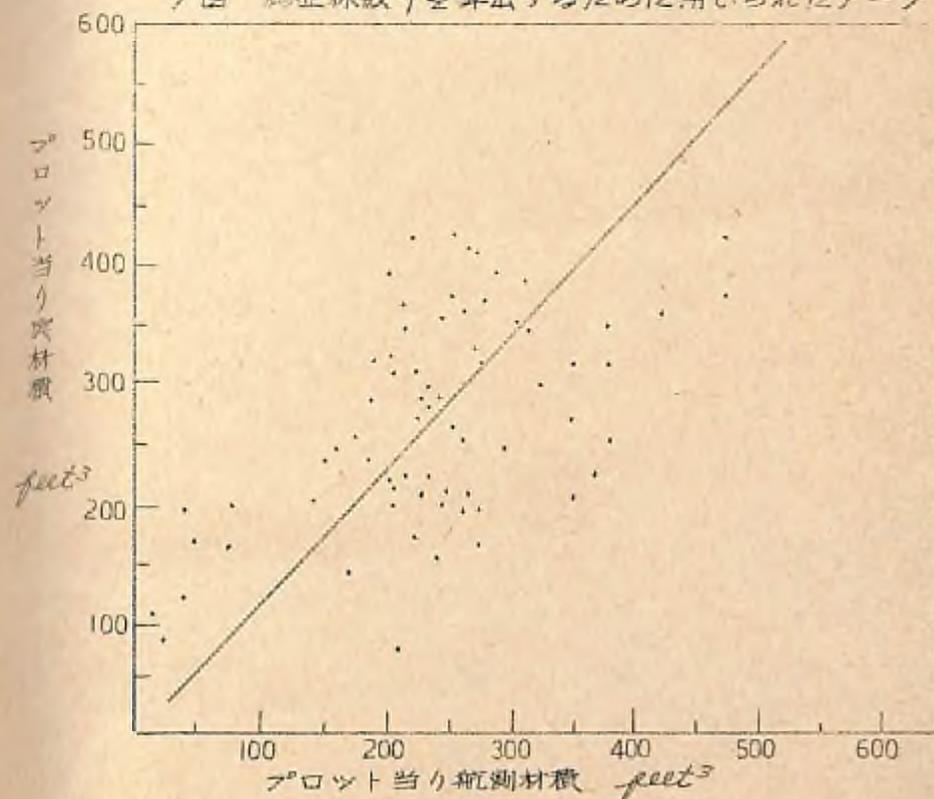
4表 いろいろな f にプロット材積に対して 0.05 の  $\alpha$  を得るに要する調査プロットの数

各エーカー当りの平均 写真推定材積	f の 値		
	0.8	1.0	1.2
<i>feet</i> <sup>3</sup>	必要なプロット数		
200	104	163	231
300	59	72	104
400	26	40	60
500	17	26	38

5表 大面積林地の個々の林区について行った航空写真調査の結果

林区番号	プロット当りの 平均実材積	写真プロット数	平均航測材積		修正材積の 実際の誤差 (実材積-航測材積)	期待誤差 (SX)
			無修正	修正(1/10)		
	<i>feet</i> <sup>3</sup>		プロット当り <i>feet</i> <sup>3</sup>			
1	309	20	297	326	- 17	35
2	389	21	335	368	+ 21	35
3	382	23	293	322	+ 60	35
4	358	26	294	324	+ 34	30
5	316	18	278	306	+ 10	40
6	368	40	297	327	+ 41	25
7	214	17	194	213	+ 1	40
8	197	25	189	208	- 11	35

1回 修正係数 f を算出するために用いられたデータ



数値計算における誤差の推定

*Estimation of Error in Numerical Computation*

KAISER, S. KUNZ

4.1 誤差の種類 *Kinds of errors.*

応用数学の問題の解には次の原因のいづれかによる誤差が含まれているであろう。

- 1. 解法の基礎となっている物理法則又は原則の近似性。
- 2. 制約のある方法で定められた量を表わすために、無限数列の最初の数項の極限有限の形を用いるために生ずる切断誤差。

*Truncation error*

- 3. 計算には有限小数を用いる必要があるために生ずる 数値計算の際の丸めの誤差

*Round-off error*

- 4. 演算方法の取扱いの誤りや数字の書き違いにより生ずる計算誤差や誤まり、このうち第1のものは本書の対象とみなすから除外する。又切断誤差は、特殊な問題を論じているテキストで取扱われているから、ここでは説明しないことにする。

一方計算誤差は 理論的には、充分注意を払えば避けることができるが、実際的な観点から云うと、ある一定の精度をもって、計算の各段階で起るものである。発見し難いこのような誤りを防ぐため計算の各段階で適当な吟味をしておく必要があると思われる。実際には最終結果が不正確な値になったり、計算が終わつてから長時間をかけた誤りを検出すること避けるため、計算過程の相当の部分をこのような吟味にきくことは有益である。

この後、この附録では数値計算における累積された丸めの誤差の決め方について詳しく述べることにする。

4.2 誤差の推定値を求める一般的な方法

*General Procedure for obtaining an error estimate*

殆んどの問題に適する誤差分析の型を説明するためにまず2,3の極めて簡単な計算を扱うこととし、後でいろいろな演算の際に生ずる起りうる最大誤差を求める一般公式を説明することにする。このような公式を用いると、詳しい逐次解析をしなくても計算による誤差の拡大率の推定値を求めることができる。したがってある演算方法が適当であるかどうか、即ち誤差の拡大が限界内にあるかどうかを、かなり早く決めることができるであろう。

数値計算は全て、加減乗除の基本的演算に逐次分割することができる。したがってこのような演算におけるための誤差の研究をすれば計算全体にわたる誤差分析が十分にできる。

加法 *addition*

数を決定する時用いた計算が近似的なものであるため、或は有限小数で表す必要のため誤差を伴っていると思われる2つの数値  $N_1, N_2$  を加え合せる場合を考えてみる。例えば  $\pi$  の代りに  $3.1416$  が、 $\sqrt{2}$  の代りに  $1.414$  を取った場合である。和の誤差の上限を数  $N_3, N_3$  に表われる。起りうる最大誤差から決めるにはどうすればよいかこれらの数の真値を  $\tilde{N}_1, \tilde{N}_2$  としよう。

$$\begin{aligned} \tilde{N}_1 &= N_1 + E_1 \\ \tilde{N}_2 &= N_2 + E_2 \end{aligned} \quad (A.1)$$

ここで  $E_1, E_2$  はこれらの数の誤差である。\*したがって真値の和  $\tilde{N}_3 = \tilde{N}_1 + \tilde{N}_2$  は次式で与えられる。

$$\tilde{N}_3 = N_3 + E_3$$

$$\text{ここで } N_3 = N_1 + N_2 \quad (A.2)$$

$$E_3 = E_1 + E_2$$

したがって誤差はただ加えられるだけである。

$E_1, E_2$  は普通、未知であるから、方程式(A.2)をそのまま用いる

\* この誤差の定義は普通とは符号が逆である。しかしこれは近似式にいわれる誤差項を加えて誤差を表わす、数値解析の一般的な方法と一致している。

ことはごまかす。

しかし仮りに

$$|E_1| \leq e_1, \quad |E_2| \leq e_2$$

であることが既知であるとする。ここで最大誤差 *maximum error*  $e_1, e_2$  は  $N_1, N_2$  の最大の誤差の絶対値の上限を与える正の数である。

したがって、 $E_3(A.2)$  から

$$|E_3| \leq |E_1| + |E_2| \leq e_1 + e_2$$

故に  $N_3$  の最大誤差は

$$e_3 = e_1 + e_2 \quad (A.3)$$

と与えられる。

減法 *Subtraction*

$N_1$  と  $N_2$  を引算する場合には、 $E_3(A.2)$  の代りに方程式は

$$E_3 = E_1 - E_2$$

となることは明らかである。しかし  $E_1$  と  $E_2$  は符号を取り換えることができるから  $N_3$  の最大誤差  $e_3$  は  $E_3(A.3)$  で与えられたものと同じである。

よって次の簡単な法則が成立する。

• 2つの数を加減する場合、和又は差の最大誤差は2つの数の最大誤差の和に等しい。

乗法 *Multiplication*

(A.1) で与えられる2つの数を掛けた場合を考えてみる。この積について次のことが分る。

$$\tilde{N}_3 = \tilde{N}_1 \tilde{N}_2 = N_1 N_2 + N_1 E_2 + N_2 E_1 + E_1 E_2$$

$E_1, E_2$  はおそろしく数  $N_1, N_2$  に較べこ小さいから  $E_1 E_2$  の項は無視されるであろう。

したがって

$$N_3 = N_1 N_2$$

$$E_3 = N_1 E_2 + N_2 E_1$$

後の方程式から

$$|E_3| \leq |N_1| |E_2| + |N_2| |E_1| \leq |N_1| |E_2| + |N_2| |E_1|$$

したがって、積の最大誤差は

$$E_3 = |N_1| E_2 + |N_2| E_1 \quad (A.4)$$

で与えられる。

Eg(A.4)を  $|N_3| = |N_1| |N_2|$  で割れば

$$\frac{E_3}{|N_3|} = \frac{E_1}{|N_1|} + \frac{E_2}{|N_2|} \quad (A.5)$$

したがって数Nの最大の相対誤差を

$$Y = \frac{E}{|N|} \quad (A.6)$$

で定義すると便利である。このようにすると

Eg(5)は簡単に

$$Y_3 = Y_1 + Y_2 \quad (A.7)$$

となる。

除法 Division

$N_1, N_2$  で表わされた2つの数を割れば、その商は

$$\bar{N}_3 = \frac{N_1 + E_1}{N_2 + E_2} = \frac{(N_1 + E_1)(N_2 - E_2)}{N_2^2 - E_2^2}$$

やはり誤差の平方の項を無視すれば

$$\bar{N}_3 = \frac{1}{N_2^2} (N_1 N_2 + N_2 E_1 - N_1 E_2)$$

$$N_3 = \frac{N_1}{N_2}$$

$$E_3 = \frac{E_1}{N_2} - \frac{N_1 E_2}{N_2^2} \quad (A.8)$$

この方程式の両辺の絶対値をとると、前と同じ方法で、方程式は

$$E_3 = \frac{E_1}{|N_2|} + \frac{|N_1| E_2}{|N_2|^2} \quad (A.9)$$

この方程式を  $|N_3| = |N_1| / |N_2|$  で割れば Eg(A.5)が得られる。

よって次の簡単な法則が乗法と除法の双方に適用される。

2つの数を乗除する場合、結果の数値は、この2つの数の相対誤差の和で与えられる最大の相対誤差を持つ。

例. 1.

Jahnke と Emde の表から

$$J_0(0.0) = 1.0000$$

$$J_0(0.1) = 0.9975$$

$$J_0(0.2) = 0.9900 \quad (A.10)$$

$$J_0(0.3) = 0.9766$$

$$J_0(0.4) = 0.9604$$

$J_0(0.241)$  を決定するため Lagrange の補間公式を用い、Lagrange の補間係数の表は小数点以下5位まで正確であると仮定して、この計算における最大の正味の誤差を計算する。

$J_0(0.241)$  に対する公式は

$$J_0(0.241) = A_{-2} J_0(0.0) + A_{-1} J_0(0.1) + A_0 J_0(0.2) + A_1 J_0(0.3) + A_2 J_0(0.4) \quad (A.11)$$

ここで

$$A_{-2} = 0.02260$$

$$A_{-1} = -0.15449$$

$$A_0 = 0.79694$$

$$A_1 = 0.36920$$

$$A_2 = -0.03425$$

(A.12)

したがって  $J_0(0.241)$  の値は

$$J_0(0.241) = 0.98503$$

この場合、わざと一桁余分に出した。

この計算の最大誤差を決めるため、(A.10) の数字は全て同じ最大誤差  $5 \times 10^{-5}$  をもち、最大の相対誤差は略等しいとする (Eg 6 参照)

したがって誤差分析では (A.11) に含まれている  $J_0$  は全て等しいとして取扱い。

$$(A_{-2} + A_{-1} + A_0 + A_1 + A_2) J_0 \quad (A.14)$$

を決める場合の誤差を決める。ここで  $J_0$  には  $5 \times 10^{-5}$  の相対誤差があると仮定する。  $A_k$  の最大の絶対誤差\* は  $5 \times 10^{-6}$  であるから、

ここで  $J_0$  はある数に代わられる誤差の絶対値の上限を表わすのに、他の場合と同じく最大誤差という言葉を用いた。相対誤差よりむしろ絶対誤差が考慮されていることを強調するために最大の絶対誤差という言葉を用いることもある。しかし簡単にするため、誤解が起らないと思われる時には“最大”という語を省略する。

(A.8)によつて  $A_k$  の和の最大誤差は  $2.5 \times 10^{-5}$  である。  $A_k$  の和は  $1$  であるから、  $A_k$  の和に含まれる最大の相対誤差も亦  $2.5 \times 10^{-5}$  である。したがつて最終的には (A.14) からわかるようにそれぞれ  $2.5 \times 10^{-5}$  と  $5 \times 10^{-5}$  の相対誤差を持つ二つの数の積となる。よつて (A.13) で与えられる  $J_0(0.241)$  の最大の相対誤差は  $7.5 \times 10^{-5}$  である。

Ex (A.6) により絶対誤差は

$$\epsilon \approx (0.98)(7.5 \times 10^{-5}) \approx 7 \times 10^{-5}$$

したがつて (A.13) で与えられる数は最後の桁でぐらゐ違つてゐる。

いま、最後の桁を丸めるとこの数は

$$J_0(0.241) = 0.9850$$

このため  $3 \times 10^{-5}$  の誤差が加わつてくる。この誤差は前と同じ範囲内にあるであろう。したがつて  $0.9850$  という数は  $10^{-4}$  ぐらいの誤差を持つており、最後の数字は丸めの誤差だけのために、その誤差は  $1$  ぐらいに等しいであろう。

### A.3. 問題の安定性 *Stability of a Problem*

数値解法の問題は一般に、与えられた数  $x_j, j=1, 2, \dots, n$  であつて  $n$  以上の数  $y_i, i=1, 2, \dots, m$ , を求める問題として式で表わすことができる。

したがつて常識的に、この問題は  $n$  組の関数

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad i=1, 2, \dots, m \quad (A.15)$$

と同じに扱えるであろう。

与えられた数  $x_j$  が  $\delta x_j$  だけ変化すれば、その答の数  $y_i$  は

$$\delta y_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta x_j \quad (A.16)$$

だけ変化する。

係数  $\partial f_i / \partial x_j$  が余り大きくないならば、導入数  $x_j$  に含まれる不定量  $\delta x_j$  による解の変化  $\delta y_i$  は極く僅かなものに過ぎないと思われるから、この問題は安定してゐるといえる。逆にこの係数のどれかが非常に大ききものになると、導入数が少しでも不安定で

あれば、解  $y_i$  を殆んど、いふ完全に意味のないものにしてしまう程、答を変えてしまう。この場合には問題は不安定であるといわれる。かゝる問題は、与えられた数  $x_j$  の正確度を増加させる可能性のある場合にだけ扱うことができる。このようにことが出来な時は、かゝる問題は棄てるか、或は統計的に処理しなければならぬ。

### A.4. 解の安定性

前節で扱つた安定性は式で示されている問題に関するものであつて、特定の計算方法とは関係ない。しかし不安定な解をもつ安定性のある問題が数多くある。このことは与えられた  $x_j$  から計算された補助媒介数—これは次の計算段階で導入数として使われる—を普通解が含んでいることから生じたものである。いま媒介数から結果の数を求める計算が不安定であれば、媒介数の丸めの誤差のため、この解法は失敗するであろう。

このような解は、中間の結果に残しておく数字の桁数を増せば安定なものとすることができる。桁数(10進法又は2進法)の多い計算機の大さき長所の一つは、他のものとは不安定となる解が伏えぬということである。この様な解は安定性の大ききものに較べて簡単なことが多い。

したがつて、中間の計算ではいつも数桁余分の項を残しておき、終りに含まれてゐる全体の誤差の分析で示される通りに最後の数値を丸めるようにするとよい。

時には電気系統のノイズに相当するものとして丸めの誤差を考えると便利である。したがつて与えられた数には導入ノイズを構成するとみなされる誤差が存在している。これらの誤差は導がかれる数  $y_i$  output number の計算過程において拡大(又は縮小)されるであろう。しかし特殊な計算方法を用いれば、中間の数を丸める必要のために生ずる。

各計算段階におけるノイズの増加量を導がくことができる。計算の際残しておく数の多い程、計算はノイズの少ないものとなり、導が

かれる数がノイズで不明確となる前に行うことのできる計算の長さは長くする。

### A.5 計算における有効数字の損失

#### Loss of significant figures in a computation

小数で表わされた数  $N$  の有効数字の数は、正確であると考えられる最初の 0 ではない数字から出発して左から右に数えた数字の数で示される。正確さを増すには、通常、最後の数は近似的に正確であるに過ぎないとする必要がある。計算値に含まれている有効数字が正確な意味を失っている場合におき、これは整数に丸めた次の量に等しいとみける。

$$\log_{10} \frac{|N|}{\epsilon} = -\log_{10} r \quad (A.17)$$

したがって  $r$  を 3.14 と表わせば、その誤差は 2.0016 である。

ゆえに

$$\log_{10} \frac{3.14}{2.0016} \approx \log_{10} 2.000 = 3.0$$

したがって有効数字の数は 3 である。(A.17) から有効数字の損失は相対誤差に 10 を乗じたものに等しい。

一組の数  $N_k$   $k=1, 2, \dots, n$  から一つの数  $N_T$  を決める計算区間の計算段階を考慮してみる。これらの数に誤差項  $E_T, E_k$  を加えたものを真の数とし、次の様におく。

$$N_T + E_T = f(N_1 + E_1, N_2 + E_2, \dots, N_n + E_n) \quad (A.18)$$

計算数値は何玉かの有効数字を持っており、誤差は小さいと仮定すれば、一般に誤差の平方は無視できる。右辺をテーラー展開すれば

$$N_T + E_T = f(N_1, N_2, \dots, N_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial N_i} E_i$$

故に

$$N_T = f(N_1, N_2, \dots, N_n) \quad (A.19)$$

$$E_T = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial N_i} E_i \quad (A.20)$$

上の方程式から (A.2 参照)

$$|E_T| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial N_i} \right| |E_i| \leq \frac{M}{T} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial N_i} \right| e_i$$

$E_T$  は  $E_T$  がとりうる最大の値であるから

$$E_T \leq \frac{M}{T} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial N_i} \right| e_i \quad (A.21)$$

が  $N_T$  の最大の絶対誤差である。(A.6) の最大相対誤差  $r_T$  は

$$r_T = \frac{1}{|N_T|} \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{T} \left| \frac{\partial f}{\partial N_i} \right| e_i \quad (A.22)$$

$r_T$  の重み付き平均を次式で定義すれば

$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^n \left| N_i \frac{\partial f}{\partial N_i} \right| e_i}{\sum_{i=1}^n \left| N_i \frac{\partial f}{\partial N_i} \right|} \quad (A.23)$$

Eg (A.22) は次の形に書ける

$$r_T = \lambda \sigma \bar{r} \quad (A.24)$$

そこで

$$\lambda = \left| \frac{\sum_{i=1}^n N_i \frac{\partial f}{\partial N_i}}{T} \right| \quad (A.25)$$

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n \left| N_i \frac{\partial f}{\partial N_i} \right|}{\left| \sum_{i=1}^n N_i \frac{\partial f}{\partial N_i} \right|} \quad (A.26)$$

したがってこれは導入数の相対誤差の平均  $\bar{r}$  に拡大係数

$$A = \lambda \sigma = \frac{1}{|T|} \left| \sum_{i=1}^n N_i \frac{\partial f}{\partial N_i} \right| \quad (A.27)$$

を乗じたものである。もちろんこの係数は 1 より大きいこともあれば小さいこともある。

係数  $\lambda \sigma$  の意味は、これから説明する特殊な場合の例から分るであろう。

### A.6 和 Summation

$N_T$  を求めるため、一組の数  $N_i$  の和をとったとする。すなわち

$$f(N_1, N_2, \dots, N_n) = \sum_{i=1}^n N_i \quad (A.28)$$

$$\frac{\partial f}{\partial N_i} = 1$$

である。

故に

$$\lambda = \left| \frac{\sum_{i=1}^n N_i}{T} \right| = 1 \quad (A.29)$$

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n |N_i|}{\left| \sum_{i=1}^n N_i \right|} \geq 1 \quad (A.30)$$

したがって、和の場合には、相対誤差に $\sigma$ 即ち和の絶対値に対する各数の絶対値の和の比が掛けられる。

数が全て正であれば $\sigma = 1$ で、相対誤差に対する拡大常数は存在しない。逆に正の数と負の数が殆んど相殺されると、 $\sigma$ は大きくなり計算は不安定となる。数値計算のある段階で、大きな $\sigma$ の値が起れば、普通不安定となる。

### A.7 積 Products

$N_T$ が一組の数 $N_i$ の積であるとする。 (A.25) (A.26)において

$$f(N_1, N_2, \dots, N_n) = \prod_{i=1}^n N_i \quad (A.31)$$

したがって

$$\sum_{i=1}^n N_i \frac{\partial f}{\partial N_i} = \sum_{i=1}^n \left( \prod_{j \neq i} N_j \right) = n f$$

故に  $\lambda = n \quad \sigma = 1 \quad (A.32)$

したがって、相対誤差の重み付き平均 $\bar{\sigma}$ には $n$ すなわち積の数 $n$ の数が乗じられるだけである。(A.23)からこの重み付き平均は $n$ 度 $n$ の普通の平均である。

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i \quad (A.33)$$

したがって (A.24) と (A.31) による最大の相対誤差は積に含まれている因数の数に比例して大きくなること分る。したがって高次の行列式の値を直接求めることは個々の項に含まれている因数の数および符号の相違による各項の部分積のために不安定な方法とみるであろう。前に説明したように後者は $\sigma$ の値を大きくする。

### A.8 冪および根 Powers and roots

(A.31)で数 $N$ が全て同じであれば

$$N_T = f(N) = N^n \quad (A.34)$$

(A.33)で相対誤差は全て同じであるから、

$\bar{\sigma} = \sigma$  前と同様  $A = \lambda \sigma = n$  であるから

$$Y_T = n Y \quad (A.35)$$

$N$ の $n$ 乗根はその数の $1/n$ 乗と書けるから

$$N_T = \sqrt[n]{N} = N^{1/n}$$

(A.35)より

$$Y_T = \frac{1}{n} Y$$

### A.9 対数および指数 Logarithms and Exponentials

$N_T = f(N) = \ln N$  であれば

$$N \frac{\partial f}{\partial N} = 1$$

したがって (A.27) により

$$A = \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial N} = \frac{1}{\ln N} \quad (A.38)$$

数 $N$ の対数の相対誤差は $N$ が大きいか、0に近ければ小さいが逆に $N$ が1に近ければ相対誤差は大きくなる。

$N_T = e^N$  ならば

$$A = \frac{1}{e^N} \frac{\partial e^N}{\partial N} = e^N = N_T \quad (A.39)$$

となり、この相対誤差は $N$ の相対誤差に対して係数 $N_T$ だけ増加する。

### A.10 丸められた数 Rounding off numbers

普通の方法で、ある数が小数点以下 $n$ 桁目で丸められておれば、その数には $\pm 5 \times 10^{-(n+1)}$ の変化が起るのである。この変化により、その数の絶対誤差は増すこともあれば逆に減ることもある。

しかし起り得る最大誤差を計算する誤差分析の目的にかぎらぬためには、前に示した誤差にこれを加える必要がある。このことは計算途中の数値を丸めると最終結果の信頼性が低下することを意味している。したがって計算途中で数を丸めるのは、次第に桁数の増していくのを防ぐという理由だけである。折衷案として、2,3桁余分の数を付けて計算を行い、この桁から後の数はまるめてしまうことにする。計算途中の丸めの誤差を小さくするためには計算の長さが長くなるにつれて、余分の桁数を増さなければならぬ。最終結果の丸めの誤差も最大絶対誤差に加わってくるが、これは最後の数値の平均桁が正確と考えられるかを示す時に役に立つ函数である。

A.// 誤差分析の統計学の応用

Application of statistics to error analysis

上記の誤差分析は、ある与えられた計算中に生ずる最大の絶対誤差、最大の相対誤差に適用される。これは適当な長さの普通の計算に含まれている丸めの誤差を扱う、ごくありふれた方法である。数千、数万の加算、乗算を含む計算を行うことのできる電気計算機の出現により、正と負の誤差の大部分が相殺されるといふ高い確率に基づいて期待されるより現実的な誤差の推定値が必要になってくる。

したがって有効数字の3桁まで正確な1000個の数を集めれば、その個々の数の最大相対誤差は0.1%より大となり、積の最大相対誤差はその1000倍以上になる。したがって答の最大相対誤差は100%となることもある。しかし、個々の正負の誤差のあらゆる組合せについて平均した誤差の平均平方の平方根は、個々の誤差0.1%に $\sqrt{1000}$ を掛ければ求まる。したがって、最終結果は約3.2%以下の誤差と思われる(68%の確率)(68%) 誤差が10%を超えることは殆んどないであろう。

この際に沿った誤差分析ではむしろ統計学の基本概念についてもっと詳しい説明が必要であり、したがってこの説明は余白が足りないので省略した。

(KAISER, S. KUMZ. Numerical Analysis より; 栗屋)

データの丸め又は組合けによる影響  
Effects of rounding or grouping data

1. ま え が き Introduction

統計家は、数のデータが連続量量の記録された値である限り、必ず、丸めた数を使用しなければならない。計数データも、取扱いを便にするために、10, 100, 1000, 10000, 100000単位に丸められるであろう。データの丸めが粗雑な程、観測された事象を扱う精度は低下し、余りに粗雑な丸めをすると、因原のある現象を論ずる根拠として役立たなくなるであろう。このことはかなりさつたことではあるが、データを無効にしてしまわれ程度に、かなり粗い丸めは、データの解析をかなり害ない、時には無効にしてしまうかもしれないということが常に認められているわけではない。

"Student"として、一般に知られているWilliam Sealy Gossetはデータの粗い丸めや組合けが、データの統計的性質におよぼす影響について、かなり突進んで論じている\*。彼の理論的指針の定験によるテストとして用いた、3000人の犯罪人の身長と左中指の測定値とを関連させた。データを引用して次のように書いている。

この比較を妨げる、いま一つの事情は、観測値の組がかなり大きいことである。身長は1-cmの組に分けられ、標準偏差は、僅かに2.54-cmであったが、一方指の長さにはmm単位で組合けされていたが、当時、着着は比較的になんて小さな単位のもっている重要性に注目せず、それらを2-cmの組に集めたかその標準偏差は2.24であった。このように粗い組に並べられた資料から4標本を取り出すことにより、次のようないくつかの奇妙な結果が得られる。次のような点が認められるであろう。  
(1) 平均値は0.25の倍数として現われるだけである。

\*注1. Student: "The Probable Error of a Mean" のIV節 (全文については7節参照)

(2) 標準偏差は次の形の数値の平方根として現われる。即ち、

$$n + 0.19, n + 0.25, n + 0.50, 2n + 0.75$$

(3) これらの組の一つに属する標準偏差は、特定の平均と結び付けることが出来るだけであり、したがって  $\sqrt{2}$  なる標準偏差は、平均が原点として選んだ組から、整数倍だけ違っている場合に現われるだけであり、一方  $\sqrt{1.5}$  は平均が  $n + 0.25$  のときに現われるだけであろう。

(4) 標本に含まれる4人の身長が全て、偶然に同じ組からとられることもあるであろう。この時には標準偏差の値は0となる。これは区間の幅の値を導くことになり、これは明らかに組わけの巾が広すぎるためである。それは、インチ単位を測った時には、二人の人が同じ身長であるかも知れないが、測定が精密になる程、身長が同じになることは稀になり、遂には、4人の人が正確に同じ身長をもつ機会は極めて小さくなるからである。組分けを小さくすれば、値のなる標準偏差は大きくなることか期待され、同じ極端な考えから、比較的小さな値の標準偏差も、一つの組に3個が入り、隣りの組に1個が入る時には0.43と、2個ずつ隣りあった組に入る時には0.50となるように、恐らく大きくなるであろう。これと逆に、標本の個々の値が、かけ離れている時には、Sheppardの補正が、適用されるであろう。これは標準偏差の実際の値は、どの組においても頻度はモードに近い所ほど大きくなるから、求められた値より小さくなるという論説である。

\*1 この場合、Student は標本に含まれる4観測値のその平均からの偏差の平均平方の平方根を示すのに“標準偏差”という言葉をを用いている。

\*2 この場合、Student は標準偏差を割った、母平均と標本平均の偏差として、 $\Sigma$ を用いた。標準偏差は前の注で定輪した。(4.4節以下を参照)

この二つの組分けの効果は、標準偏差の平均におよぼすその影響を、相互に消してしまふであろうか、いずれも変動性を増加させるであろう。

したがって、標準偏差の平均は、算出されたものとよく一致しているか、いずれの場合でも、その変動性は著しく大きいことか分った。以上の理由並びに、組分けによる(2)、(3)の効果のため、頻度は一律に分布していないので、曲線の当てはめはうまくゆかない。これに反して、区間分布を与える曲線の当てはめは、かなりうまくゆき、実際の点が一つだけの場合には、荷足のゆく比較かできるものと思われる。

統計調査グループ Statistical Research Group は、珍らしい統計的特性を示す、各種のデータを受け取った。ある場合には、これらの特性は、データを記録する時に用いられる、粗い丸めによるものであることか分った。少なくとも、その一つの例では、測定に用いた二つの機械の精度の本質的な相違(部分的に)のため、データの勘数か残りの数の  $1/2$  の精度で記録されているという事実によるものであった。たまたま、Group は、データの記録方法について、勧告するよう請求を受けた。というのは、この調査は、データの記録が面倒なものであって、実際の目盛の読みとりは、面倒でないことを示していたからである。粗く丸められたデータを解析する際に出ずる困難性、および丸めについての意見が要求されたので、主として、それが統計的群集の標準的手法におよぼす影響という観点から、丸めの研究が始められた。この研究結果は、本章に取纏めてある。ここに示してあることの多くは、統計学の文献で見ることかできるか、まとまって書かれてはない。

### 2. 丸められた数値と尺度の読み取り

#### Rounded numbers and scale readings

丸められた数値は、二つの違った戸口から、実社会の中に入り込んでいる。オノに、測定器具は全て、精度に限界があるから、科

学者や技術者の行った測定値は、丸められた数値である。オニにデータは使用した器具の精度より落して記録されることか多いが、わりに簡単に得られ、"当面の目的に適する。精度は維持されている。即ち、時には、 $51/128$  (正確には  $0.3984375$ ) の代わりに  $0.40$  を用いる場合のように、算術計算を簡単にするために、時には、 $\pi$  の代わりに  $3.1416$  を用いる場合のように、やむを得ずに使わねばならないなどの理由で、計算の際には、数値は丸められる。

※ 単位数との正方形の対角線 ( $\sqrt{2}$ ) や直径に対する円周の比 ( $\pi$ ) のように、普通の分数や有限個の小數では正確に表わすことのできない、極めて実際的な常數について、便利な記号を案出した。これらの量に対して数学者の考えた記号を用いれば、実際数値は正確その代数的取扱を簡単にするにはできぬか、違われ早かれ、その数値が必要になってくる。この場合は  $\pi$  ( $3.14159265358979323846 +$ ) と  $355/113$  (小數点以下6桁まで正確) のような普通の分数で置換するか、 $3.141593$  のような近似的小數で置換することが必要になってくる。

計算者か、小數の形で、正確な數を丸められた數に属する場合に、次節に示す規則に従って正確に丸めを行った後足すれば、その數はいずれも、残りの小數の最後の桁で、 $1/2$  単位以内で正確であると云える。科学者や技術者の測定値の場合には、このことは当てはまらないであろう。最後の數が被っている場合は、最後の數が全数看かれるか、一行減して結果を丸めるための基として用いられる場合に比べて、データは正確であるという考えから、残された最後の數には、なおもかなりの情報が含まれているであろう。このような場合、測定値が全て同一の正確度であれば、与えられた測定値の不正確さは  $1/2$  単位であるということ、測定"単位"というものが存在するであろう。

初として、 $1/8$  吋目盛のスケールで"読み取り"を行う実験者

の場合を考えてみよう。彼は、最も近い  $1/8$  インチまで、直接に測定値を読みとることかでき、最も近い  $1/16$  インチまで、目測し、例えば  $3 3/16$  インチという読みか得られるであろう。彼がこれを小數の形で表わせば、これは  $3.4375$  吋となり、これは  $3.40625$  インチ ( $3 1/32$  インチ) と  $3.46875$  インチ ( $3 15/32$  インチ) との間にある數値を表わしており、したがって、その正確度は  $\pm 0.03125$  インチ以内に過ぎず、残りの小數の數が示している  $0.00005$  インチではない。したがって、彼は、この値を  $3.44$  として報告しようとするであろうか、その正確度は  $\pm 0.00975 - 0.03375$  以内に過ぎないか、これは、真値が  $3.40625$  と  $3.4200$  と間にない限り、 $3.4$  よりは真値に近いであろう。しかし、このように報告された場合には、彼の読みは、正確度ははっきりしないであろう。正確度を明示する必要があれば、彼は、彼の読みを  $1/8$  インチ単位で報告すべきであり、このような場合には、その正確度は  $\pm 1/2$  単位以内であろう。

3. 丸めの規則とその特性

*The rounding rule and its properties*

小數形式で表わされている數を、特定個數の有効數字に丸めようとする場合、丸めは、必ず次の規則に従って行なわれなければならない。

※ 小數で表わされた數の有効數字は、小數点の位置を定めるのに役立つことを附にして、その數の重要度を示すのに役立つ任意の數字である。例えば、 $345$  と  $0.000345$  はいずれも3個の有効數字を持つ。  $34.05$  と  $34.50$  ( $34.5$  とは区別する) は4個の有効數字を持っている。  $34500$  はそれか、それぞれ  $3.45 \times 10^5$ ,  $3.450 \times 10^5$ ,  $3.4500 \times 10^5$  を意味することにより、3, 4, 5, 個の有効數字をもっている。

丸めの規則 *Rounding rule*

a) 捨される最初の数字が5以下であれば、残される最後の数字はそのままである。

b) 捨される最初の数字が5より大きいか、0より大きい数字を伴う5であれば、残される最後の数字は1だけ増す。

c) 捨される最初の数字が5のみか、0だけを伴う5であれば、一番近い偶数に丸められる。

このようにして、小数点以下2位に丸めると

$\pi \approx 3.141593 \longrightarrow 3.14$

$e \approx 2.718282 \longrightarrow 2.72$

$\sqrt{22} \approx 0.045455 \longrightarrow 0.05$

$\sqrt{200} \approx 0.00500 \longrightarrow 0.00$

$\sqrt{198} \approx 0.005051 \longrightarrow 0.01$

$\sqrt{2247} \approx 0.004450 \longrightarrow 0.00$

a) 項に従って“切下げられる” rounded down 数は全て b) 項に従って“切上げられる” rounded up 数に対応していることか分る。またかつて a) b) 項は、切捨される最初の位置が正確に5であるもの以外の全ての数について、切り上げと切り下げとの間の釣合をとっている。c) 項は、その前の数字が1, 3, 5, 7, 9であれば切り上げ、0, 2, 4, 6, 8であれば切捨すると定めるところにより、捨せようとする最初の位置が正確に5である数の切上げと切捨との間に同様の釣合をとっている。最も近い奇数に丸めたとしても、全く同じ釣合が得られか否、c) 項はどちらにしてもよい。この場合には前の文章の切上げと切下げとを互換さえすればよい。しかし 吟味のためには、画一的な手順が重要であり、発表された表は、首尾一貫していることが必要であるから、はっきりと規定したc) 項を遵守しなればならない。

この点について、自然、次のような疑問が生ずる。

“その位置における単一の丸めのように、丸めを特定の位置で止めた場合に、この規則(単独、対その他として数字を捨す)を

繰返し適用すれば、必ず同じ結果が得られるであろうか? 我念なかりとて答は否である。上記の5番目の例は、この一つの場合である。どんなものであれ、一回以上の切上げ切下げを含む方法では、0.005051 が規則に従って小数点以下2位で丸められると、その結果は 0.00 であるか、これは“誤まり” incorrect である。

オ3の例は、最初に表示される数の桁数が、引続いて行う丸めの結果に影響するであろうという事実を例示するために用いられる。 $\sqrt{22} = 0.045454545\dots$ 、小数点以下6桁に止めれば 0.045455 となり、この値を上記に示してある。この値を規則によつて5桁に丸めると、0.04546 となるが、 $\sqrt{22}$  は5位に止めれば 0.04545 に等しい。これは最初に表示された値が小数点以下7位以上正しい時に、5位に丸めることにより得られるであろう。

このことから、 $n$ 桁の表か  $(n+k)$ 桁の表に示してある数値を丸めることにより複製されている時には、この数値の中には、 $n$ 番目の正しくないものがあることか分る。したがって、5桁の  $\log_e N$  の表で、 $\log_e 1947 = 7.574045054$  の5桁の値は8桁目で補正された8桁の表より桁数の少ない表が丸めによつて定められたものであれば、5桁目は不正確であろう。しかし最後の5は、この表の丸めが切上か切下かを示すため記しをつけることかできる。例えば、1冊の  $\ln$  表、 $\ln 5$  表を参照されたい。この表では、丸めがc) 項によつていなければ、最後の5はいずれもイタリックで書かれている。

どの桁に丸める時に用いられる規則の適用回数と無関係に、常に特定の桁で同じ結果の得られる丸めの法則が存するかどうか疑問されるであろう。Cayley\* の示した方法はこの長所をもっている。

\* Cayley, letter to J. W. L. Glaisher

この方法によれば、残される最後の桁の数字は全然補正されない。これは、その次の数に無関係に切捨てることと同じである。その結果記録される数は正確なこともあれば、誤まっていることもある。この形式で記載された数か用いられる場合には、最後に5かについておれば、記載された数か、丸めの規則に従って、その正確な値から、ただ一段階の計算で丸められる場合と同じく、その誤差は、記載される最後の桁で±1/2 単位の間にあるであろう。

例えば、元は 小数点以下4桁では、3.1415 と記載され、その後の計算では 3.14155 が用いられるであろう。Coxley の方法は 簡単であり、(数は常に切捨てるから) 機械による計算のため機械化することができ、正確な値から、その値に到達するまでの丸めの回数に無関係に、9桁の数か得られるという利点はあるが、丸めの規則に従って丸められた9桁の数かを用いて得られる正確度と同じものに到達するには、その後の計算に(9+1)桁の数かを用いる必要があるという欠点がある。

4. 多数の観測値の統計的解析におよぼす丸めの影響

Effects of rounding on statistical analysis of large numbers of observations.

4.1 影響の性質 Nature of the Effects

統計的解析に用いられる測定値は、実際に有効と思われるものより数桁余分に記録されている場合が多い。この小数点以下の余分の桁には大して関心ははらわれない。というのは、関心があれば当然その桁まで正確に測定されるであろうから。余分な数字を記録し、この測定値を丸めることは、無用の行為である。逆に単位または それ以上正確に記録することが出来なそうしなければならぬ場合には、測定値が 5, 10, 20, 50, 100 等いはもっと粗い単位で括めて記録されることがある。したがって、本管内に同一条件でとられた対にした測定値か、平均して約50単位の差を生ずる傾向があれば、調査者

は厚々10又は20単位で括めて測定値を記録し、時には単に50単位で括める場合もある。本質的に同一条件でとられた測定値か 標準偏差σをもって真値 " true value " の周りに近似的に正規分布する傾向があれば、この丸めはそれぞれ略 0.23σ, 0.45σ, 1.1σ の間に相当する\*。

これに反して 統計家は、ランダムサンプリングの標準偏差の 1/3 以下 — 1/4 以下であればなお良い — の丸めの間隔を推奨している\*\*。

原則的には、丸め又は区間隔の選択は、次の三つの質問に対する解答により変る。

α) 観測値  $X_1, X_2, \dots, X_N$  が データのとられた母集団において、平均値  $\mu$  の周りに、標準偏差σをもって分布する。確率変数  $X$  の独立な値とみなされるならば、次のように定義される  $\mu$  とσの標本推定値におよぼす丸め(組分け)の影響はどのようなものか。

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad (1)$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \quad (2)$$

β) 丸めは、 $\bar{x}, s$  に基ずく  $\mu$  とσと信頼限界にどのように影響するか。

\* 上記の仮定のもとでは、対にした測定値間の平均差は  $2\sigma/\sqrt{\pi} = 1.12838\sigma$  である。この平均差が50であれば区間隔10は  $1.12838\sigma/5 = 0.226\sigma$  に相当し、区間隔20についても同様にして求まる。

\*\* (例えば Fisher の Statistical Method Sec 13 参照)

0) 丸めは、 $\bar{x}$ ,  $s$  に基づく  $\mu$  と  $\sigma$  に関する統計的仮定の決定にどのように影響するか。

この節では、観測数  $N$  が大きい場合について、この問題の解答が与えられるであろう。5節には、 $N$  の小さい場合、僅か2~3の場合が論じてあり、そこで得られた結果は、どのような  $N$  の値か大とみなされ、どのような値を小とみなさなければならぬかという問題の解決に糸口を与えた。

#### 4.2 Sheppard の補正 Sheppard's corrections

オ-の範囲に答えるために、確率密度函数  $f(x)$  にしたかつて分布する連続確率変数の  $K$  次 (母集団) の積平均

$$\mu_K = E(x^K) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^K f(x) dx \quad (K=1, 2, 3, 4, \dots) \quad (1)$$

$x$  の値を中点  $x_i$  ( $i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 中の  $h$  の級に包含することを得るヒストグラムの  $K$  次の積平均

$$V_K = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_i^K \int_{x_i - \frac{h}{2}}^{x_i + \frac{h}{2}} f(x) dx \quad (K=1, 2, 3, 4, \dots) \quad (2)$$

との関係を考察してみよう。

定義から  $\mu_K$  は、母集団の  $x$  の (原点の周りに) 積平均であり、この場合  $x$  は連続変数である。一方連続変数の値は全て、完全な正確度で読みとることも、記録することも不可能であるから、 $x$  の記録された値は一般に、丸められた値であろうし、

$x_i - (h/2)$  と  $x_i + (h/2)$  との間にある  $x$  の値は全て  $x_i$  として記録されるであろう。したがって、ある意味では  $V_K$  は  $x$  の現実的な積平均であり、 $\mu_K$  は理論的な積平均である。

まず  $f(x)$  が  $p(x) > 0$  の範囲で Taylor 級数に展開でき、

\* これは、任意の  $C$  の値に対して積平均  $p(x) = \int_{-\infty}^C f(x) dx$  は  $x$  が  $C$  より小さい確率に等しく、あらゆる  $C$  の値に対して  $0 < p(x) \leq 1$ 、 $p(-\infty) = 0$ 、 $p(+\infty) = 1$  である。

オニに  $x^K p^{(2K)}(x)$  が有限で、この範囲 ( $K=1, 2, 3, 4, \dots$ 、 $i=1, 2, 3, 4, \dots$ ) で連続であり、オニに  $p(x)$  と  $p^{(K)}(x)$  ( $K=1, 2, \dots$ ) がこの範囲の限界で0であれば  $V_K$  と  $\mu_K$  とには次の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \mu_1 \\ V_2 &= \mu_2 + \frac{h^2}{12} \\ V_3 &= \mu_3 + \left(\frac{h^2}{4}\right) \mu_1 \\ V_4 &= \mu_4 + \left(\frac{h^2}{2}\right) \mu_2 + \frac{h^4}{80} \\ &\dots \dots \dots \\ V_K &= \sum_{i=0}^{\infty} \left[ C_{2i}^K \left(\frac{h}{2}\right)^{2i} (2i+1) \right] \mu_{K-2i} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

この場合に  $0 \leq r \leq k$  では  $C_r^k = k! / (r!(k-r)!)$   
 $r > k$  では  $C_r^k = 0^*$

$p(x)$  に関するこの三つの条件は  $p(x) > 0$  なる範囲外でも連続であるだけでなく、この範囲の両端で0に近づくことを示している。したがって  $-h/2 \sim h/2$  まで一般に分布するものや、U字型曲線や丁字型曲線のように、急傾斜の端をもつ確率密度は除かれる。この三つの条件は、(5) の関係を厳密に成立させるために、必要にして充分な条件である。またの仮定で除外した場合についても、さらにいくつかの項のかわった (5) に似た関係が得られた\*\*

(5) の関係は、丸めの格手加算の基本分布に対して、無作為に設置されるならば、それの積平均が存在する時には、いつでも平均して正しいことが示されているものとも一般的方法を用いて誘導できる\*\*\*

\* Sheppard の "Most Probable Values of Frequency Constants"

\*\* 変数の場合は Bates の "Corrections for the Moments"

\*\*\* 変数の場合は Wild の "Sheppard's Correction Formula" を参照せよ

7節に示してある Edderton, Pairman と Pearson, Pearson の論文を参照。

まず \$x\$ 軸が \$1/n\$ の方法で、間隔 \$1/n\$ の整数のクラスに分割されるとする。ここで、\$n\$ は \$1\$ より大きい任意の整数である。確率密度関数 \$P(x)\$ が与えられれば、このように組合せられた \$x\$ の値に対応するヒストグラムは常に次式から決定できる。

$$f_j(x_j) = \int_{x_j - (1/2n)}^{x_j + (1/2n)} p(t) dt \quad (j=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4)$$

\$P(x)\$ が確率密度関数のときには、この級数は常に存在すると思われるから、\$x\_j\$ は \$j\$ 番目の区間の中心である。この基本ヒストグラムの原点の周りの頻率、即ち \$\mu\_k\$ は、それが存在する（即ち有限である）限りにおいて、(4) に類似した和の形で推定できる。(4) を決定される基本ヒストグラムに対応させて、\$1/n\$ の小クラスを \$1/n\$ の小クラスに結合させることにより、\$n\$ 個の新しいヒストグラムを形成することができる。即ちある場合には \$x\_0, x\_1, \dots, x\_{n-1}\$ を含む区間が結合され、次の場合には、\$x\_1, x\_2, \dots, x\_n\$ を含む区間が結合される。これらのヒストグラムのそれぞれに対応させて、原点の周りの頻率 \$V\_k(\delta)\$, \$\delta=1, 2, \dots, n\$ は、それが存在する限り、(4) に似た和の形から決定できる。\$\overline{V}\_k\$ で \$\overline{V}\_k(\delta)\$, \$\delta=1, 2, \dots, n\$ の値の平均を取れば、それが存在する限り、\$\overline{V}\_k\$ と \$\mu\_k\$ とには、次のような関係がある。

$$\left. \begin{aligned} \overline{V}_1 &= \mu_1'' \\ \overline{V}_2 &= \mu_2'' + \left[1 - \frac{1}{n^2}\right] \cdot \frac{W^2}{12} \\ \overline{V}_3 &= \mu_3'' + \left[1 - \frac{1}{n^2}\right] \cdot \frac{W^2}{4} \cdot \mu_1'' \\ \overline{V}_4 &= \mu_4'' + \left[1 - \frac{1}{n^2}\right] \cdot \frac{W^2}{2} \mu_2'' + \left[1 - \frac{1}{n^2}\right] \cdot \left[3 - \frac{7}{n^2}\right] \cdot \frac{W^4}{240} \end{aligned} \right\} (5)$$

\$n \to \infty\$ とすれば、この方程式の右辺は、方程式(5)の対応する式となる。それは \$n \to \infty\$ のときには、\$\mu\_k \to \mu\_k'\$ となるからである。他方 \$\overline{V}\_k\$ は \$V\_k\$ の平均としての意味を失わない。

\*\*\* 7節に示してある Abernathy, Craig, Carver の論文を参照。

したがって、\$x\$ の分布の性質がどうであろうとも、一般に、方程式(5)が成立する。即ち \$1/n\$ のセクションから構成される丸めの格子を、その基本的確率分布に対して無作為に設置するという無限回の試行について、\$V\_k\$ と \$\mu\_k\$ が有限であればその間に存在する平均的な関係をこの式は与える。

上に示した結果は全て、原点としてとった固定された点の周りの頻率に関するものであって、その頻率の値は原点のとり方によって変わるであろう。したがって、\$x\$ が歪度を変え、垂直に割られたならば、\$\mu\_k\$ と \$V\_k\$ の値は、\$x\$ が傾度で割られたときのもとは異なるであろう。しかし、選ばれた原点が \$x\$ の分布の平均であれば、得られる結果は同じであろう。

\$x\$ の平均の周りの頻率を表わすためにダッシュを添せば、関係式(5)は次式に相当する。

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \mu_1 = 0 \\ V_2 &= \mu_2 + \frac{W^2}{12} \\ V_3 &= \mu_3 \\ V_4 &= \mu_4 + \frac{W^2}{2} \cdot \mu_2 + \frac{W^4}{240} \\ &\dots \end{aligned} \right\} (5')$$

(5') の二番目の方程式と (5) とを比較してみると、\$x\$ の丸めた値—便宜上 \$x\_R\$ で表わされる—の分散（平均の周りの二次の頻率）は \$x\$ の分散即ち \$\mu\_2\$ に分散 \$\frac{W^2}{12}\$ —これは \$\frac{W^2}{12}\$ と \$\frac{W^2}{12}\$ の間で一様に分布している丸めの誤差の分散に等しい—を加えたものに等しいことを示している。これは、次の様に書けることを暗示している。

$$x_R = x + \epsilon \quad (6)$$

\$x\_R\$ は \$\pm W/2\$ 以内で丸められた \$x\$ の値を示し、\$\epsilon\$ は、\$-W/2\$ と \$+W/2\$ の間で一様な確率密度をもって、独立に分布している確率変数である。(6) 式は上述の三つの条件の下で厳密に正しく、上記の意味で、頻率の存在するどのような条件の下においても一般に正しいことが厳密に証明されている。

普通は  $V_k$  から  $\mu_k$  を決定したいのであるから、逆則  $V_k$  と  $W$  の巾を用いて  $\mu_k$  について解かれる。その関係は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= V_1 = 0 \\ \mu_2 &= V_2 - \frac{W^2}{12} \\ \mu_3 &= V_3 \\ \mu_4 &= V_4 - \frac{W^2}{2} V_2 + \frac{7W^4}{240} \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (10)$$

$\mu_k$  を得るために  $V_k$  にほどこす修正は通常、組分けの Sheppard の修正と呼ばれている。前に示したように、丸めの格子がその基本的分布に確率的に影響するならば、積率が存在する際にはいつでも、この修正は平均的な修正として妥当なものである。この仮の条件は、例えば、非負の値だけをとりうる変数の値が丸められる場合に、最小クラスの中点として 0 かとられるとは限らないということを意味している。事実、最小クラスの中点は、小さな負の値となるであろう。Sheppard の最初の仮定が断されない場合に、丸めの格子が確率的におかれていますなければ、前述の修正をすると、非常に誤ったものとなり、時には誤まった方向に修正することすらあるであろう。

\* 7 節の Craig, Langdon と Ore の論文を参照。

\*\*  $\mu_5 \sim \mu_9$  の関係は Riey が証明している。Hand book p. 78. それは Craig の説明した  $\mu_5 \sim \mu_9$  の式で  $m \rightarrow \infty$  とおくことにより求められる。  $\lambda_k$  と  $L_k$  が丸められていない変数  $X$  と丸められた変数  $X_R$  の準不変量を表わすとすれば、この関係は簡単に次のようになる。

$$\lambda_{2m} = L_{2m} + (-1)^m B_{2m} \frac{W^{2m}}{2^{2m} m!} \quad \lambda_{2m+1} = L_{2m+1}$$

ここで  $B_m$  は  $m$  番目のベルヌーイ数である。

したがって  $\lambda_4 = L_4 + \frac{W^4}{240}$ ,  $\lambda_6 = L_6 - \frac{W^6}{252}$ ,  $\lambda_8 = L_8 + \frac{W^8}{240} \dots$  となる。これ以上詳しい説明は Craig, Langdon と Ore, Wild を参照されたい。

4.3  $N$  が大きな時、丸められた  $N$  個の観測値の平均値の分布と丸められなかった  $N$  個の観測値の平均値の分布との比較

Comparison of the distribution of the mean of  $N$  rounded observations and the distribution of the mean of  $N$  unrounded observations, when  $N$  is large.

Sheppard の修正は、 $N$  が大きな時、丸められた  $N$  個の観測値の平均値の分布と、丸められなかった  $N$  個の観測値の平均値の分布との簡単な比較をすることからできる。引読いて、(11) と同値した記号を採用し

$$\bar{X}_R = \sum_{i=1}^N \frac{X_{Ri}}{N}$$

とする。ここで  $X_{Ri}$  は確率変数  $X$  の  $N$  個の独立な値の  $i$  番目の値  $X_i$  の丸められた値であり、これは巾  $W$  のクラスのための格子に対応するものである。(Sheppard の仮定が断られなければ、 $X$  軸上に無作為に定められる)

さらに

$$\begin{aligned} \text{母集団における } X \text{ の平均値} &= \mu_1 : X \\ \text{母集団における } X \text{ の分散} &= \sigma^2 : X \quad (12) \\ \text{この母集団平均の周りの } X \text{ の } k \text{ 次積率} &= \mu_k : X \quad (k=1, 2, \dots) \\ W &= a \cdot \sigma : X \quad (13) \end{aligned}$$

とする。

4.1 表は平均値、分散、歪度、尖度について、 $\bar{X}_R$  の分布と  $X$  の分布および平均値  $\mu_1$  と分散  $\sigma^2$  をもつ正規分布との比較を扱っている。

4.1 表を調べると 次のことが分る。

(1)  $\bar{X}$ ,  $\bar{X}_R$  はいずれも  $X$  の母平均の不偏推定値である。

\* Sheppard の修正の数学的基礎について詳しく知りたい読者は Kendall の論文を読まれることをおすすめする。

- (2)  $\bar{x}_R$  の分散は  $\bar{x}$  の分散の  $(1 + \frac{12}{N})$  倍である。
- (3)  $\bar{x}_R$  の分布の歪度 (Pearson の記号で  $\gamma_1 = +\sqrt{\beta_1}$ ) は  $\bar{x}$  の分布の歪度を越えない。
- (4)  $\bar{x}_R$  の分布の尖度 (Pearson の記号で  $\gamma_2 = \beta_2 - 3$ ) は  $\bar{x}$  の分布の尖度より常に小さい。
- (5)  $N$  が大きいときには、 $\bar{x}$  と  $\bar{x}_R$  は母平均  $\mu: X$  の周りに、近似的に正規分布をする。

組分けされていない変数が正規分布をしている場合は特に重要である。この場合  $\bar{x}$  は同じ様に正規分布をするが、 $\bar{x}_R$  の分散は対象ではあるが、尖度は正規分布より僅かに小さく、その差は  $(\frac{12}{N}) / (1 + \frac{12}{N})^2$  である。

“一般化された正規曲線”に関する Gram-Charlier の級数から決めることができる。この尖度の差は、 $\bar{x}_R$  の分布が“中心部”即ち  $\pm 0.75 \sigma_{\bar{x}_R}$  の間では僅かに小さい面積をもち、両側即ち  $\pm 2.3 \sigma_{\bar{x}_R}$  を越える部分においても僅かに小さく、この両点間では僅かに大きくなっていることを示している。実際に行われる丸め、即ち  $a = W/\sigma < 1$  場合には、この影響は殆んど無視できるであろう。R. A. Fisher は、正規分布とする変数  $X$  の  $N$  個の独立に丸められた値  $X_R$  から、 $\mu: X$  の最尤性推定値  $\hat{\mu}$  は  $(1 + \frac{12}{N} - \frac{a^6}{2.880} + \dots) \cdot \sigma_X^2 / N$  の分散をもっていることを示している\*。したがって、 $\mu$  の代わりに  $\bar{x}_R$  を用いた時の精度の低下は僅かに  $\frac{a^6}{2.880}$  であるが、これは実際に丸めをする際には、殆ど無視できる。

結論として

- a.  $N$  の値の如何を問はず、 $\bar{x}_R$  は  $X$  の母平均  $\mu: X$  の不偏推定値である。
- b.  $N$  が大きく、 $\sigma_X$  と  $W$  の値が既知の場合、即ち  $\sigma_{\bar{x}_R}^2 = (\sigma_X^2 + \frac{12}{N}) / N$  を求めることができるならば、 $\mu: X$  の信頼限界および正規偏差とみなされる  $(\bar{x}_R - \mu: X) / \sigma_{\bar{x}_R}$

\* Fisher "Mathematical Foundations" p 362

による  $\mu: X$  の値についての統計的仮説検定は、近似的に正しいであろう。即ち  $X$  の真の分布は“高次の接触” high order contact をしているか、(即ち Sheppard の仮定が正しい) 丸めの格子が  $X$  の許容できる値について、確率的に定められているか、或はどの両者が同時に満たされているか。

4.1 表

確率変数の  $N$  個の独立に丸められた値の平均の分布の平均値、分散、歪度と丸められなかった変数の分布および正規分布の対応する特性との比較；丸めの間隔が標準偏差を単位とする場合

特 性	分 布		
	丸めの行なわれなかった変数 $X$	$N$ 個の丸められた値の平均 $\bar{x}_R$	正規分布
平均	$\mu: X$	$\mu: X$	$\mu: X$
分散	$\sigma_X^2$	$\frac{(1 + \frac{12}{N}) \sigma_X^2}{N}$	$\sigma^2$
歪度 ( $\gamma_1$ )	$\gamma_1: X = \frac{\mu_3: X}{\sigma_X^3}$	$\frac{\gamma_1: X}{\sqrt{N(1 + \frac{12}{N})^3}}$	0
尖度 ( $\gamma_2$ )	$\gamma_2: X = \frac{\mu_4: X}{\sigma_X^4} - 3$	$\frac{\gamma_2: X - \frac{12}{N}}{N(1 + \frac{12}{N})^2}$	0

2.4 観測値を丸めた時と丸めなかった時の  $\sigma^2$  の分布の比較；観測数が大きい場合

Comparison of the distribution of  $\sigma^2$  for rounded and unrounded observations, when the number of observations is large.

$$\sigma_{\bar{x}_R}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(x_{Ri} - \bar{x}_R)^2}{N-1} \tag{4}$$

ただし  $x_{Ri}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ )、 $\bar{x}_R$  は (4) と同じである。4.2 表では  $\sigma_{\bar{x}_R}^2$  の平均およびその平均の平方に対する  $\sigma_{\bar{x}_R}^2$  の分散の比と、決り二組の条件における  $\sigma_X^2$  の平均の比とを比較している。；第一の条件は  $X$  は  $1$  次 ~  $4$  次の積率の存在している

任意の分布をしている場合であり、その条件は  $X$  が正規分布  
をしている場合である。

4.2表を調べてみると

比

$$s^2 \text{の分散} / (s^2 \text{の平均})^2$$

は  $s^2_x$  の場合より  $s^2_{XR}$  の場合の方が常に小さいことが分る。  
しかしその差は僅かであり、合理的な丸め即ち  $a = 1/2 < 1$  の  
場合には、一般に無視できるであろう。

1)  $N$  が大きい時には  $(N-1) s^2_{XR} / (\sigma_x^2 + 1/12)$  と  $(N-1) s^2_x / \sigma_x^2$   
は同じ次数の近似値の周りに、自由度  $N-1$  の  $\chi^2$  分布をする  
であろう。

2)  $X$  の分布が高次の接触をもっているか(4.2節で述べた *skewness*  
の三つの条件が完全に満たされているか) 丸めの誤差が  $X$   
の許容できる値に対して無作為に定められているか、或は両者  
が同時に満たされているか、 $s^2_{XR} - 1/12$  は  $N$  の如何を問はず、  
 $X$  の母分散  $\sigma_x^2$  の不偏推定値である\*。

比  $(N-1)(s^2_{XR} - 1/12) / \sigma_x^2$  は  $a = 1/2$  が極めて小  
さくない限り  $1/12$  を与えられる比の代りに用いてならないことが  
ここではっきりと指摘されるであろう。その理由は、この比の  
分散は、 $(1 + 1/12)^2$  の因数だけ  $1/12$  を与えられる比の分散を

\*  $N$  が小であっても、4.2表に示してある平均値と分散/(平均値)<sup>2</sup>  
の同原は当てはまるが、 $s^2_{XR}$  の分布連続分布による  $s^2_{XR}$  の平均値  
の誤差が実際上不可能であるように不連続なものである。(4.1節  
参照)  $X$  の値の丸めが標本の抽出される前に決められるなら  
ば、(2)は  $\sigma_x^2$  の正確な推定値を与えることを Kendall は認めた。  
これに反してまた、観測値  $X_1, X_2, \dots, X_N$  が抽出されてから丸  
められるならば  $\sigma_x^2$  を推定するために  $s^2_{XR} - 1/12(N-1)$  を使  
用することを暗示した。 $N$  が大きい時には、その差は実際的には  
明らかに無視できるが理論的には重要である。

4.2表  $X$  の分布が任意の場合および正規の場合について  $s^2_{XR}$  の平均  
値の平方に対する  $s^2_{XR}$  の分散の比を  $s^2_x$  に対するものと比較した場合 ( $a = 1/2$ )

$X$ の分布	任	規	正 規
平均値	$s^2_x$	$s^2_{XR}$	$s^2_x$
分散/(平均値) <sup>2</sup>	$\frac{2}{N-1} + \frac{Y_2: X}{N}$	$\frac{2}{N-1} + \frac{Y_2: X - \frac{1/12}{N}}{N}$	$\frac{2}{N-1}$

例えば、そのため一般に  $X^2$  近似が不正確になると思われるからで  
ある。修正された分子、分母  $\sigma_x^2 + 1/12$  が用いられるならば、  
その結果得られる比の分散は  $1/12$  を与えられる比の分散と同じに  
なるであろうか、平均値は  $(1 + 1/12)$  の因数だけ小さくなるで  
あろう。分子に  $s^2_{XR}$ 、分母に  $\sigma_x^2$  を用いれば平均値は  $(1 + 1/12)$  の  
因数だけ過大となるであろう。

3)  $\sigma_x^2$  の値の信頼限界の決定やそれに関する統計的仮説検定は  
1) に示してあるように、 $s^2_{XR}$  について行う必要があり、それ  
についての条件や近似値の得られるほど正しくなるであろう。  
結論として これまで述べた説明は  $s^2_{XR}$  が  $\pm 1/2$  以内に丸  
められ、自由度  $N$  をもつ  $X$  の値の分散分析から求められる場合  
にも適用できることに注目すべきである。変える必要があるの  
は全体を通じて  $N-1$  の代りに  $N$  を用いることだけである。

#### 4.5 Student の $t$ 分布におよぼす丸めの影響

Effect of rounding on the distribution of Student's  $t$

$$t_x = \frac{\sqrt{N}(\bar{x} - \mu_1: X)}{s_x} \quad (13)$$

$$t_{XR} = \frac{\sqrt{N}(\bar{x}_R - \mu_1: X)}{s_{XR}} \quad (14)$$

とする。ここで  $\bar{x}, \bar{x}_R$  は(1)(11)、 $s_x, s_{XR}$  は(2)(14)と  
同じであり、 $\mu_1: X$  は母集団における  $X$  の平均値、 $N$  は標本に  
おける  $X$  ( $s^2_{XR}$ ) の独立な値の個数である。

この母平均の周りに  $1$  次〜 $2$  次の誤差の存在することを条件とする

$N$ 個の独立な観測値が正規分布からとられた場合、 $t_{XR}$  の分布は、Student の  $t$  分布として知られている。即ちこの条件の下で  $t = t/\sqrt{N-1}$  の分布は 本章のノ節で引用している論文で Student によって始めて与えられたものであることを認め、このように呼ばれている。これを誘導する際 Student は正規母集団からとった独立な観測値から計算した時の  $\bar{x}$  と  $s$  の独立性を利用したが、彼自身は  $\bar{x}$  と  $s$  および  $\bar{x}^2$  と  $s^2$  の積率相関係数はこの条件の下では 0 であるという事実を確立したに過ぎない。實際上、 $\bar{x}$  と  $s$  の独立性は必要条件である。正規母集団からとった確率標本における、その独立性の厳密な証明はオノ次大橋に先だつて文書で Fisher が Student に伝えたものである。これは、附随的であるが 1915 年に発表された相関係数の正確な標本分布に関する Fisher の論文\* の予備的段階として発表された。

二年前に彼はこれらに一般的な定義を与えていたが、もによる Student の分布の完全な誘導は 1926 年に Fisher によって、始めてなされた\*\*。

本章のノ節で引用した一節で Student が指摘しているように、丸めをした結果、丸められた観測値の確率標本の標本平均と標本標準偏差との間には相関があり、 $\bar{x}$  と  $s$  が独立の間でも  $\bar{x}$  と  $s_{XR}$  は独立に分布しないであろう。それにもかかわらず、Student の実験結果は  $t_{XR}$  の分布の不連続性を無視できるほど  $N$  が大きい時には、 $t_{XR}$  の分布は 近似的に  $t_x$  の分布と一致するであろうということを示している。こうなることは、1次~4次の積率が存在するという条件だけの任意の分布を持つ  $\bar{x}$  の場合について、 $t_{XR}$  の最初の4つの積率を調べてみると明らかになる。 $\bar{x}$  について、このような仮定を設ければ、 $\bar{x}$  の半不変量による  $t$  の最初の4つの積率について Geary\*\*\* の与えた式

\* Fisher "Distribution of the Correlation Coefficient"

\*\* Fisher "Applications of Student's Distribution"

から  $t_{XR}$  の最初の4つの積率は直ぐに求まる。

$t_{XR}$  の最初の4つの積率は 4.3 表に示してあり、この表で Student の  $t$  分布の最初の4つの積 即ち  $\bar{x}$  が正規分布の時の  $t_x$  の積率とが比較されている\*。

4.3 表を調べてみると、 $1/\sqrt{N}$  のオーダーの項までについては、丸めは4次の積率に影響するだけで、その影響は、丸めが合理的 即ち  $N = 10^6$  くらいであれば 正規母集団 ( $Y_1: x=0, Y_2: x=0$ ) からの標本の場合には、明らかに無視できる。Geary の拡張された公式を調べてみると、 $\bar{x}$  の分布が対象的ではあるが、必ずしも正規でない場合には、 $t_{XR}$  の1次と3次のモーメントは 少なくとも  $1/\sqrt{N^2}$  のオーダーで 0 であり、 $t_{XR}$  の値は  $1/\sqrt{N}$  のオーダーで正規の値であることが理解できる。事実、 $\bar{x}$  が正規分布をしている時には、 $t_{XR}$  の分散は、やはり  $1/\sqrt{N^2}$  のオーダーで正規の値である。したがって、次のように云えるであろう。

$t_{XR}$  の分布の不連続性を無視できる程  $N$  が大きく、20 くらい小さい時には、 $\bar{x}$  の分布が、高次の接続を持つが、丸めの格子が  $\bar{x}$  の許容できる値について無関係に定められているか、その両者を満たしておれば、 $t_{XR}$  および  $t_x$  の分布は同じオーダーの近似値の周りで、標準的な  $t$  分布に従うであろう。

$s_{XR}^2$  即ち 4.4 節の(2)項に示してある修正値でないものを  $t_{XR}$  の分母に用いなければならぬことに注意する必要がある。修正値を用いれば

$$t_{XR} = \frac{\sqrt{N}(\bar{x}_{XR} - \mu_1; \bar{x})}{\sqrt{s_{XR}^2 - \frac{10^2}{12}}} \quad (6)$$

Geary, "Distribution of Student's Ratio"

\*  $t_{XR}$  の積率は  $1/\sqrt{N}$  のオーダーの項まで示してある。即ち  $1/\sqrt{N}$  の 3/2 次以上の項は無視されている。最初の4つの積率に関する Geary の一般式は  $1/\sqrt{N^2}$  のオーダーの項まで正確である。 $t_{XR}$  の  $1/\sqrt{N^2}$  および  $1/\sqrt{N}$  のオーダーの項は前記の(1)式の脚注示してある  $\bar{x}$  の半不変量を用いて計算できる。

となる。この場合  $|t_{xR}| > |t_{xR}|$  であるから、当然  $t_{xR}$  が有意な値となる場合が多くなる。さらに、 $s_{xR}$  が  $\frac{w}{2}$  より小さい時には、 $t_{xR}$  の値は虚数となり、このような場合には記述される  $t_{xR}$  の値に何んらかの变换を施す必要がある。換言すれば Fisher\* が云っているように“この (Sheppard) の補正は、推定のために用うべきであって、有意性の検定には用いてはならない。”

又  $\bar{x}$  と  $s_{xR}$  とが独立に分布しているとみなされるような場合であれば、 $s_{xR}$  が  $\pm w/2$  以内に丸められた  $\bar{x}$  の値と自由度  $N$  により、分散分析又はその他の方法により求められた場合にも、前述の説明は適用できる。変える必要があるのは、全標本に  $N-1$  を  $N$  におきかえるだけである。

5 正規母集団からとられた小数の観測値の統計的解析におよぼす丸めの影響

Effects of rounding on statistical analysis small numbers of observation from a normal population.

5.1 序 Introduction

今迄に得られた結果は、 $N$  の値に無関係であるが、これまでの論議は主として観測数の多い場合についてであった。ただし1節の Student の引用文は例外である。この論文では、正規に近い母集団からとった4-5の標本の短い丸めの影響について詳細に論じている。この一節から、標本の小さい場合には、 $\bar{x}_R$  と  $s_{xR}$  の分布の不連続性が、丸めにする最も重要な影響であることがはっきりする。Nを固定すれば、 $\bar{x}_R$ 、 $s_{xR}$  の分布の不連続点は丸めの間隔  $w$  の減少につれて、(任意の有限の区間で) その数は増すか 重要性は減り、又  $w$  を固定すれば、 $N$  の増加につれて、その数は増すか 重要性は減小することが期待されるであろう。したがって  $N$  の大きさは、 $w$  の小さいことと結び

\* Fisher, Statistical Methods, Ⅲ章の補注D節

つけた場合にだけ意味のあることが分る。

4.3 表 7から有限の1次~4次の積率を持つ任意の母集団から取られた  $N$  個の独立な丸められた観測値の標本に基づいている場合の Student の  $t$  分布の最初の4つの積率と、これに対応する Student の  $t$  分布の積率との比較

( $a = \frac{w}{\sigma}$ )

関数	有限の1次~4次の積率を持つ任意の母集団	正規
$t$	$t_{xR}$	$t_x$
$M_1(t)$	$-\frac{Y_1: X}{2\sqrt{N}} + O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right)$	0
$M_2(t)$	$1 + \frac{2(1+Y_1: X)}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$	$\frac{N-1}{N-2} = 1 + \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$
$M_3(t)$	$-\frac{3Y_1: X}{2\sqrt{N}} + O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right)$	0
$M_4(t)$	$3\left\{1 + \frac{6}{N}\left[1 + \frac{14Y_1: X^2}{9} - \frac{Y_2: X - \frac{2Y_1: X^2}{2}}{9(1 + \frac{2Y_1: X^2}{9})}\right]\right\} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$	$\frac{3(N-1)^2}{(N-3)(N-5)} = 3\left(1 + \frac{6}{N}\right) + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$

5.2 ある正規母集団からとった大きい2~3の標本における  $s_{xR}$  の正確な分布

Exact distributions of  $s_{xR}$  in samples of 2 and 3 from a normal population

5.2.1. 分布の例 Illustrative Distributions

正規母集団からとられた小標本における  $s_{xR}$  の分布におよぼす、 $w$  と  $N$  の結合された影響を明らかにするために、正規母集団からとった大きさ2の標本における  $s_{xR}$  の正確な分布が  $N = \sigma^2, \sigma^2/2, \sigma^2/4$  について計算された。これは、4.1, 4.2, 4.3 図に図示してあり、自由度1の  $\chi^2$  として分布する  $s_x^2$  の分布と比較してある。4.1 図には4.4 節の (1) を考慮して

$s_x^2 = \left(1 + \frac{1}{12}\right) s_{xR}^2$  (8)

の分析も図示してある。

この図に示されている  $s_{xR}$  の分布の大きな歩みはこの分布の

不連続をはっきりさせる。Nが大きい場合には、 $\delta x^2$ の分布は  $\delta x^2$ の分布よりも  $\delta x_R^2$ の分布に近づくであろうことが 4.4 節(1)から推定される。4.1図から、 $N=2$   $W=2$ の時にはこの修正は明らかに無視できる。さらに、全ての点でこの階段関数に完全に近似した平滑な曲線を求めることは明らかに不可能である。換言すれば、 $\mu$ の値に等しいか又はこれを超える  $\delta x$  又は  $\delta x^2$ の確率は、原則として  $\delta x_R^2$ の分布の歩みの水平部分と  $\delta x$  又は  $\delta x^2$ の分布の交点の近くにある、 $\mu$ の値についての  $\mu$ に等しいか、これを超える  $\delta x_R^2$ の確率に厳密に近似しているであろう。

4.4図では  $W=2$ のとき、正規母集団からとった大きさ3の標本の  $\delta x_R^2$ 分布を、今度は自由度2の  $\chi^2_{(2)}/2$ として分布する  $\delta x^2$ の分布と比較している。4.4図を4.1図と比較してみると、 $W$ を固定して  $N$ を2から3に増すと、歩みの大きさは減るかそれほど顕著でないことが分る。

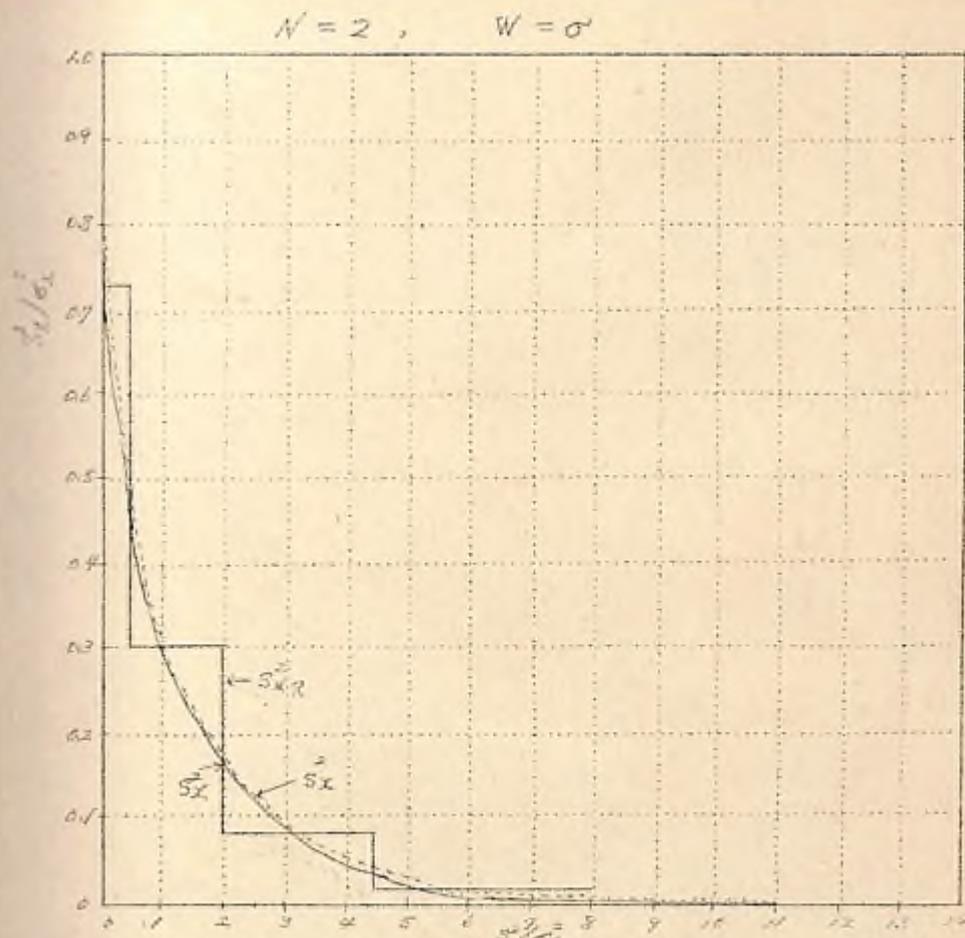
5.2.2. 丸めの格子のポジションによる影響

Effect of the position of the rounding lattice

与えられた  $W$ の値に対して必要な  $N$ の大きさについての質問に答える前に 4.4節(1)項に示してある近似値を、確信をもって使用できるようにするために、 $N$ と  $W$ を固定したときに、丸めの格子のポジションが、 $\delta x_R^2$ の分布におよぼす影響について、結論を離れて簡単に説明するのがよかろう。4.4表から 4.6表は 半周期離れた丸めの格子の二つのポジションに対応する、 $N=2$ 、 $W=2$ 、 $\sigma/2$ 、 $\sigma/4$ の  $\delta x_R^2$ の正確な分布が小数点以下4位まで示してある。<sup>\*</sup> この場合標本は正規母集団からとったものである。この二つの位置は次のように選ばれている。

ポジション I Position I

$x$ の平均を二つの丸めの格子の境界と一致させる。脚註の表示法によれば、 $x$ の母平均が原点に選ばれたら、即ち  $\mu/x=0$



4.1図 丸めの間隔を標準偏差に等しくとった時に正規母集団からとった大きさ2の標本における  $\delta x_R^2$ の分布と、これに対応する  $\delta x^2$  および  $\delta x^2 = (12/2) \delta x^2$ の連続分布

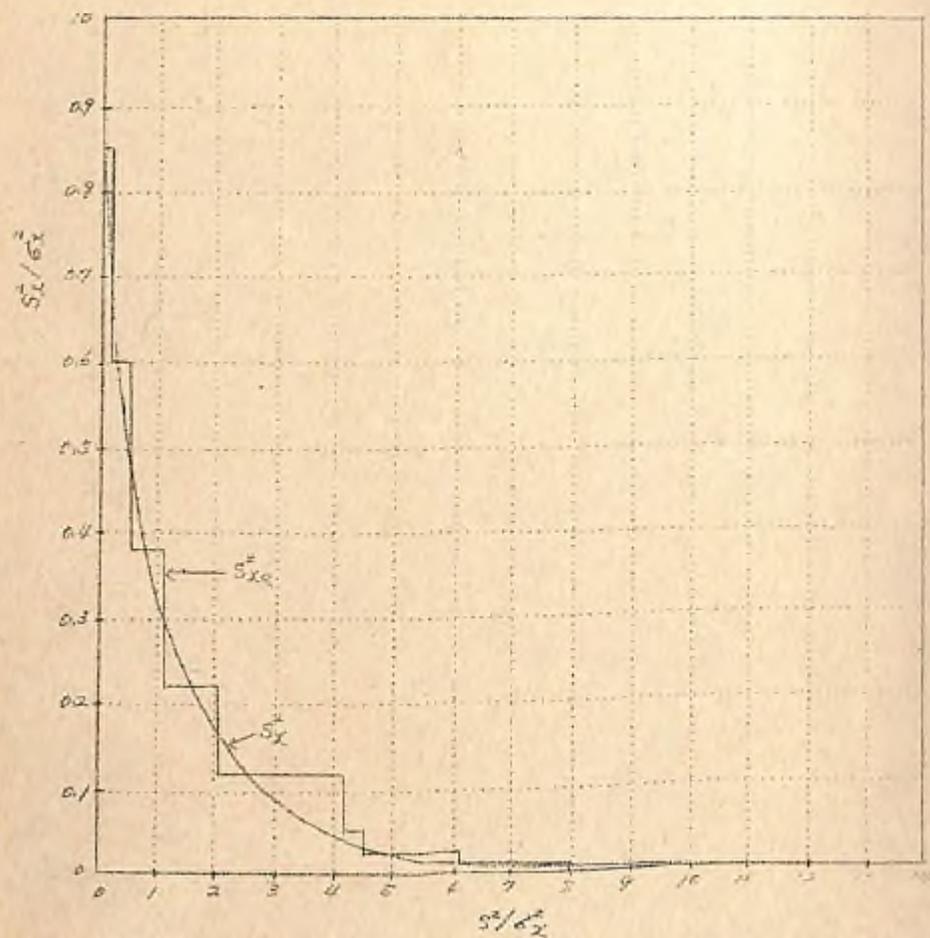
$\xi_i$ が  $i$ 番目の区間の中点における  $x$ の値を示すとすれば、丸めの格子の所定の位置に対して

$$\xi_i - W/2 < x \leq \xi_i + W/2 \quad (i=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty)$$

$\xi_i = (i + \frac{\theta}{2\pi})W$ と書けば  $\theta$ は丸めの格子の位置を定義するために使えるであろう。0番目の区間の中点が原点( $x=0$ )時には  $\theta=0$ であり、0区間の下限が原点の時には  $\theta=\pi$ である。 $\theta=\pi$ と  $\theta=\pi + 2k\pi$ の丸めは同じものである。

ここでは  $k$ は整数である。

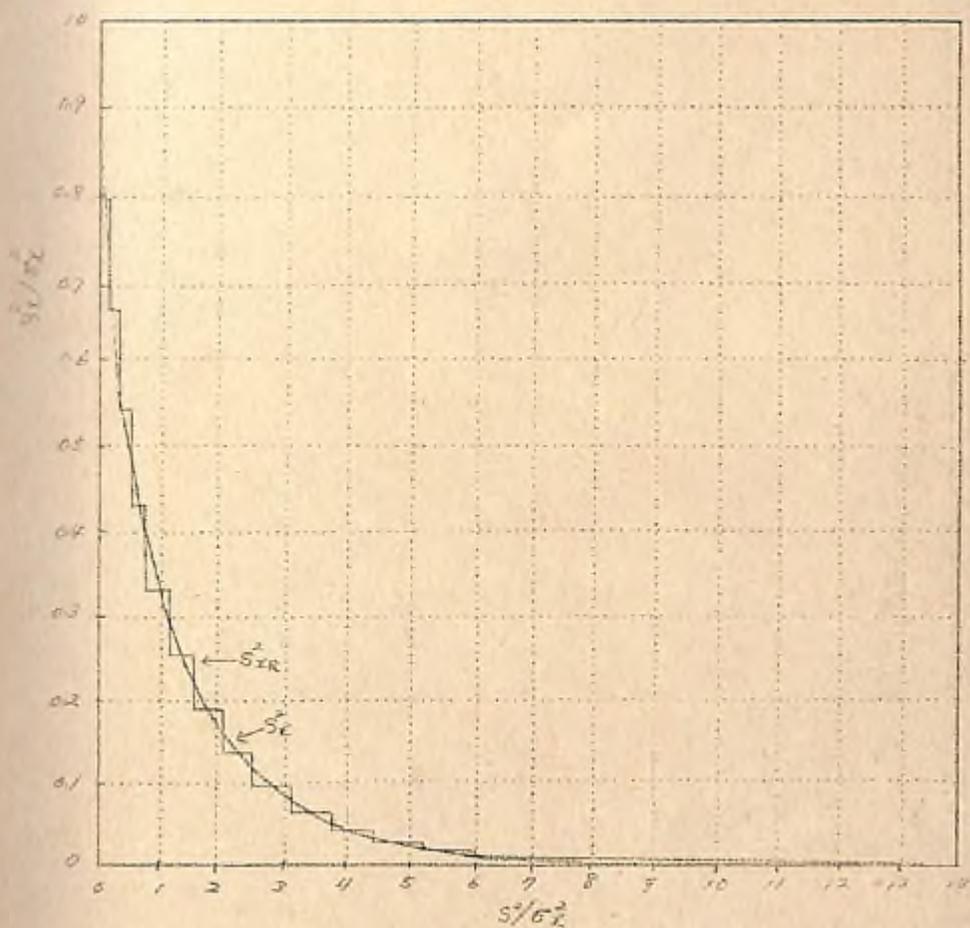
$N = 2, W = \sigma/2$



4.2 図

丸めの間隔を標準偏差の半分にした時に 正規母集団からとった大きさと2の標本の  $s_{xc}^2$  の分布とこれに対応する  $s_x^2$  の連続分布

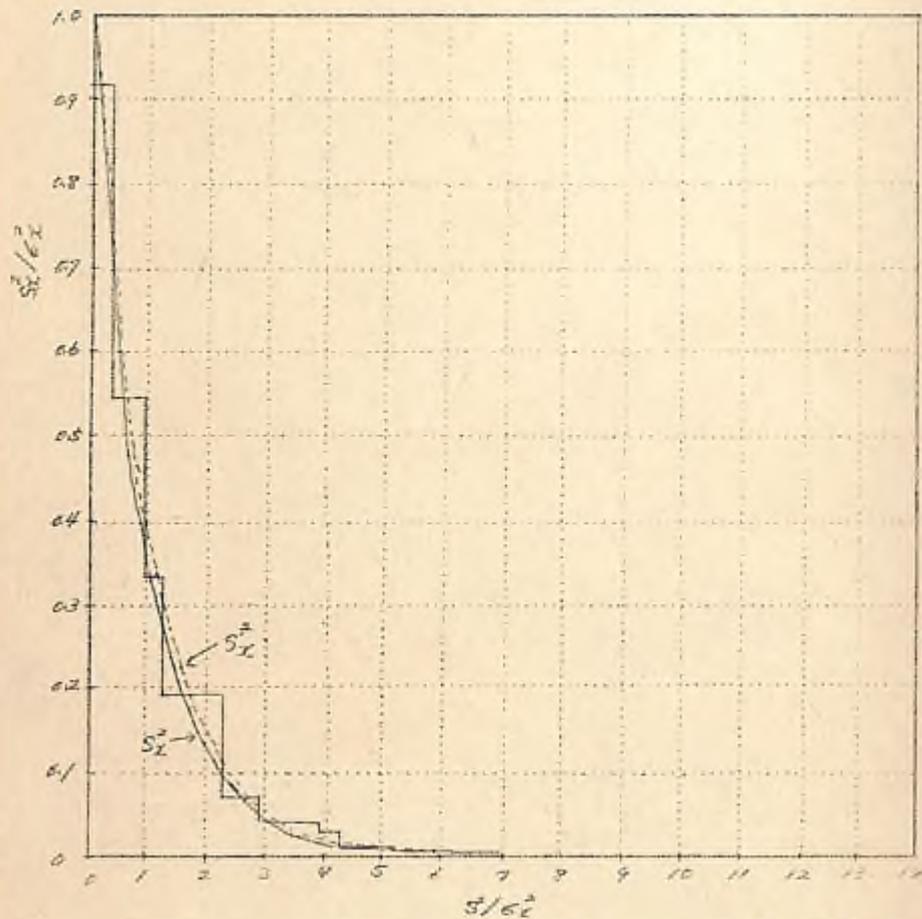
$N = 2, W = \sigma/4$



4.3 図

丸めの間隔を標準偏差の1/4にしたときの正規母集団からとられた大きさと2の標本の  $s_{xr}^2$  の分布とこれに対応する  $s_x^2$  の連続分布

$N=3, W=5$



4.4 図

丸めの間隔を標準偏差に等しくとった時の正規母集団からとられた大きさとその標本の分布と、これに対応する  $S_x^2$  の連続分布

であれば、 $\theta = -(2k+1)\pi$ であることをこれは意味している。ここで  $k$  は正又は負の任意の整数又は 0 である。

ポジション II Position II

次の母平均を丸めの区間の中心と一致させる。したがって、 $\theta = -2k\pi$ 、ここで  $k$  は正又は負の任意の整数又は 0 である。4.7 表は、この二つの丸めの結果のポジションに対応する、 $N=3$ 、 $W=5$  の  $S_x^2$  の正確な分布、小数点以下 6 位まで示してある。

4.4 表 丸めの格子の一番端のポジションに対する  $d_{1R}^2 = (x_{1R} - x_{R-1})^2 / 2$  の正確な分布

この場合丸めの間隔は標準偏差に等しく、 $x_1, x_3$  は正規母集団からとられた独立な観測値である。(  $N=2, W=5x$  )

k ④	$\frac{d_{1R}^2}{\sigma^2} \geq k$ となる基準	
	ポジション I	ポジション II
0	1.0000000	1.0000000
1/5	0.7291077	0.7290858
2	0.2987666	0.2987802
3/5	0.0832659	0.0832609
4	0.0152891	0.0152803
4 1/2	0.0018126	0.0018124
5	0.0001988	0.0001968
5 1/2	0.0000065	0.0000065
6	0.0000002	0.0000002
6 1/2 以上	0.0000000	0.0000000
$E(\frac{d_{1R}^2}{\sigma^2})$	1.0833382	1.0833384
$V(\frac{d_{1R}^2}{\sigma^2})$	2.3430509	2.3430491

④ ここに示してある  $k$  の値は 3.2 にまでの可能な値全てを各々示している。

4.5 表 丸めの格子の一番端のポジションに対する  $d_{2R}^2 = (x_{2R} - x_{R-2})^2 / 2$  の正確な分布 この場合丸め区間の  $\theta$  は標準偏差に等しく、 $x_1, x_3$  は正規母集団からとった独立な観測値である。

$(N=2, W=\frac{\sigma}{2})$

$\mu$	$\frac{\bar{x}_R}{\sigma} \geq \mu$ となる確率		$\mu$	$\frac{\bar{x}_R}{\sigma} \geq \mu$ となる確率	
	ポジション I	ポジション II		ポジション I	ポジション II
0	1.0000000	1.0000000	16 $\frac{1}{8}$	0.0000110	0.0000110
1/8	0.8604057	0.8604057	4 $\frac{1}{2}$	0.0000071	0.0000071
1/2	0.5777898	0.5777898	20 $\frac{1}{8}$	0.0000004	0.0000004
3/8	0.2792357	0.2792357	32	0.0000001	0.0000001
2	0.2183109	0.2183110	32以上	0.0000000	0.0000000
7/8	0.1134953	0.1134954	E( $\bar{x}_R^2$ ) $\sigma^2$	1.0308312	1.0208314
3/2	0.0505415	0.0505415			
7/4	0.0222898	0.0222898			
8	0.0083596	0.0083596	V( $\bar{x}_R^2$ ) $\sigma^2$	2.0839751	2.0739755
9/8	0.0027919	0.0027919			
7/2	0.0008331	0.0008331			
17/8	0.0002213	0.0002213			
10	0.0000523	0.0000523			

④ ここに示してある $\mu$ の値は32までの可能な値を全て含む。  
この表に示してある確率は、15桁の正規偏差の確率\*を用いて得られたもので、示されている最後の桁の1単位以内の正確とであると信じられている。  
この計算は全て、小数点以下10位又はそれ以上の数値を用い念入に味を行った。求められた個々の確率は、ここに示してある桁数で丸めた場合、その最後の桁で±1以内の単位に持たれる。

これらの表およびポジションI, IIが互に正反対の影響を $\bar{x}_R$ におよぼしているということから、次のような結論が引きだされるであろう。

(1)  $N=2$ の時には $\bar{x}_R/\sigma^2$ が $\mu$ に等しいか、これを越える確率は $w=\sigma$ であれば小数点以下4位まで、又 $w \leq \sigma/2$ であれば

\* Mathematical Tables Project, Table of Probability Functions.

一般に小数点以下7位まで、丸めの格子のポジションによる影響を受けない。

(2)  $N=3$ の時には、 $\bar{x}_R/\sigma^2$ が $\mu$ に等しいか、これを越える確率は、 $w=\sigma$ であれば小数点以下3位まで丸めの格子によって影響されない。

(3) 丸めの格子のポジションが $\bar{x}_R$ の分布におよぼす影響は、観測値の数即ち $N$ と共に増すことかはっきりした。

4.4~4.7表で考察した場合のそれぞれについて $\bar{x}_R/\sigma^2$ の平均値および分散がこれらの表に示してある。この値は4.9表に一括され、4.2表の公式で計算した平均の値と比較してある。 $\bar{x}_R$ が正規母集団からとられた $N$ 個の独立な観測値(丸められている)から求められた時には、 $\bar{x}_R$ の平均の分散に関する4.2表の公式は次のようになる。

$$\bar{x}_R \text{ の平均の分散} = \frac{2\sigma^4}{N-1} \left(1 + \frac{a^2}{12}\right) \left(1 - \frac{(N-1)a^4}{240N}\right) \quad (19)$$

ここで  $a = w/\sigma^*$  である。

19式は $N$ 個の独立な観測値を正規母集団から無作為に引き出す、一連の繰返し試行で得られる $\bar{x}_R$ の分散の平均の値を示している。この場合丸めの格子のポジションは試行とは無関係に無作為に決定されている。 $\bar{x}_R$ の平均値の平均の値は、 $X$ の分布の性質の影響を受けないから、この値はどの場合でも4.2表の公式から求められる。4.8表から次のことか分かる。

(1)  $N$ が2又は3で、 $w \leq \sigma$ の場合、格子のポジションIおよびポジションIIの $\bar{x}_R^2$ の平均値は、小数点以下5位又はそれ以上まで、相互ならびに理論的平均の値と一致している。

\*  $N$ が大きい即ち $(N-1)/N \approx 1$ の場合には、公式(19)は、正規母集団からとられた $N$ の独立な丸められた観測値から計算された $\sum_{i=1}^N (X_{Ri} - \mu)^2 / N$ の分散についてR.A. Fisherの "Mathematical Foundations" p.362に示している式と4.9表と一致している。

4.6表 丸めの格子の一番端の位置に対する  $d_{XR}^2 = (x_{R1} - x_{R2})^2/2$  の正確な分布。この場合丸め区間の巾は  $1/2$  標準偏差で  $x_1, x_2$  は正規母集団からとられた独立な観測値である。

(  $N=2$   $W = \frac{\sigma_x}{2}$  )

$\mu^{\oplus}$	$\frac{d^2}{\sigma^2} \geq \mu$ となる確率		$\mu^{\oplus}$	$\frac{d^2}{\sigma^2} \geq \mu$ となる確率	
	ポジション I	ポジション II		ポジション I	ポジション II
0	1.0000000	1.0000000	0/8	0.0020043	0.0020043
1/32	0.9296094	0.9296095	36/32	0.0010902	0.0010902
1/8	0.7911090	0.7911091	25/2	0.0005757	0.0005757
1/32	0.6579490	0.6579494	40/32	0.0002954	0.0002954
1/4	0.5366327	0.5366322	17/8	0.0001471	0.0001471
7/32	0.4264273	0.4264273	57/32	0.0000711	0.0000711
9/8	0.3315445	0.3315445	19	0.0000333	0.0000333
47/32	0.2511525	0.2511525	67/32	0.0000151	0.0000151
2	0.1854693	0.1854693	43/8	0.0000066	0.0000066
9/32	0.1354464	0.1354464	72/32	0.0000028	0.0000028
21/8	0.0935041	0.0935041	27/2	0.0000011	0.0000011
77/32	0.0637758	0.0637758	54/32	0.0000004	0.0000004
9/2	0.0423219	0.0423269	22/8	0.0000001	0.0000001
147/32	0.0273253	0.0273253	78/32以上	0.0000000	0.0000000
47/8	0.0273253	0.0171541	$\frac{E(d_{XR}^2)}{\sigma^2}$	1.0052058	1.0062058
217/32	0.0104691	0.0104691	$\frac{V(d_{XR}^2)}{\sigma^2}$	2.0207969	2.0207969
8	0.0062099	0.0062099			
257/32	0.0035773	0.0035773			

⊕ ここに示してある  $\mu$  の値は 225/8 までの可能な値全てを含んでいる。

4.7表 丸めの格子の一番端のポジションに対する  $d_{XR}^2 = \sum_{i=1}^3 (x_{Ri} - \bar{x}_R)^2/2$  の正確な分布。この場合丸め区間の巾は標準差に等しく、 $x_1, x_2, x_3$  は正規母集団からとられた独立な観測値である。

(  $N=3$   $W = \sigma_x$  )

$\mu^{\oplus}$	$\frac{d^2}{\sigma^2} \geq \mu$ となる確率		$\mu^{\oplus}$	$\frac{d^2}{\sigma^2} \geq \mu$ となる確率	
	ポジション I	ポジション II		ポジション I	ポジション II
0	1.0000000	1.0000000	9	0.000401	0.000401
1/3	0.915415	0.915156	20/3	0.000278	0.000278
1	0.541194	0.541514	31/3	0.000098	0.000098
4/3	0.309213	0.308998	12	0.000027	0.000027
7/3	0.190327	0.190245	37/3	0.000019	0.000019
3	0.071995	0.072096	13	0.000008	0.000008
4	0.040097	0.040103	49/3	0.000002	0.000002
13/3	0.027447	0.027411	16	0.000001	0.000001
14/3	0.008914	0.008808	14以上	0.000000	0.000000
7/2	0.005122	0.005122	$\frac{E(d_{XR}^2)}{\sigma^2}$	1.083330	1.083336
7	0.002200	0.002206	$\frac{V(d_{XR}^2)}{\sigma^2}$	1.170804	1.170831
27/3	0.000627	0.000627			

⊕ ここに示してある  $\mu$  の値は 16 までの可能な値全てを含んでいる。  
 (2)  $N$  が 2 または 3 で、 $W = \sigma$  の場合、格子のポジション I およびポジション II の  $d_{XR}^2$  の分散は、小数点以下 2 位又はそれ以上まで、相互ならびに理論的平均の値と一致している。又  $W \leq \sigma/2$  の場合には、小数点以下 3 位以上一致している。

Fig. 12 は本節の初めの脚註で注意した。このような影響の周期性に基き、解析的方法を用いて、丸め区間のポジションが正規分布からとられた標本の  $\bar{x}_R, d_{XR}^2$  の平均値におよぼす影響について調べた。間隔が標準偏差に等しい丸めの格子のポジションによる  $\bar{x}_R$  の偏りは、 $1.379 \times 10^{-6}$  以下の  $N$  の値に対しては  $\bar{x}_R$  の標準誤差の 1/10 以下となるであろうと計算している。 $d_{XR}^2$  については、 $N$  の対応する値は  $1.75 \times 10^4$ 、 $d_{XR}^2$  の分散については、 $1.34 \times 10^{12}$  である。

4.8表  $\bar{S}_{\bar{X}_R} / \bar{S}_R^2$  の実際の平均値および分散と4.2表の近似により修正された値との比較。この場合、丸め区間の平均に標準偏差に等しく、 $\bar{S}_{\bar{X}_R}$  は正規母集団からとられた2又は3個の独立な観測値から求めたものである。

観測数	丸め区間の 幅	格子の 位置	$\bar{S}_{\bar{X}_R} / \bar{S}_R^2$ の平均値		$\bar{S}_{\bar{X}_R} / \bar{S}_R^2$ の分散	
			実 際	公 式	実 際	公 式
2	1	I	1.0833322	1.1833333	2.3430669	2.3433122
		II	1.0833334	1.0833333	2.3430669	2.3433322
	1/2	I	1.0208312	1.0208333	2.0839751	2.0839100
		II	1.0208314	1.0208333	2.0839753	2.0839300
3	1	I	1.0833330	1.0833333	1.170824	1.170831
		II	1.0833336	1.0833333	1.170831	1.170831
	1/2	I	1.0208312	1.0208333	2.0839751	2.0839100
		II	1.0208314	1.0208333	2.0839753	2.0839300

⊕ ポジション I, II の厳密な意味については5.2.2節を参照のこと。

上記の(1), (2)および Fisher の解析から次のように結論する。

(3) 丸めの格子のポジションが正規母集団からとられた標本の  $\bar{S}_{\bar{X}_R}$  の平均および分散におよぼす影響は、丸めの平均的効果と対比して記録される。

(4) (少くとも、正規母集団からとられた) 小標本では、連続分布による  $\bar{S}_R$  と  $\bar{S}_{\bar{X}_R}$  の分布の近似が関係付けられない限り、丸めに起因する、 $\bar{S}_R$  および  $\bar{S}_{\bar{X}_R}$  の分布の不連続性は、丸めの格子のポジションより遙かに大きな影響をおよぼす。

5.3 正規母集団から抽出された場合に、 $\bar{S}_{\bar{X}_R}$  の実際の分布を連続分布によって充分近似させる標本の大きさと丸め区間の幅との組合せ。

Combinations of sample size and rounding-interval widths for which the actual distribution of  $\bar{S}_{\bar{X}_R}$  can

be approximated satisfactorily by a continuous distribution, when the sampling is from a normal population. 4.4節の(1)節を示した  $\chi^2$ -近似が、実際的には充分  $\bar{S}_{\bar{X}_R}$  の分布を表わすであろうということに先だって、与えられた丸め区間の幅  $\omega$  に対して必要な標本の大きさと  $N$  および 与えられた  $N$  の値に対して必要な  $\omega$  の大きさについての両方向に対する厳密な解答は見つかっていない。 $\bar{S}_{\bar{X}_R}$  の分布の不連続性は  $N$  が小さく、 $\omega$  が比較的大きい場合、 $\bar{S}_{\bar{X}_R}$  の実際の分布を連続分布で表わそうとする場合に起る困難性の主因であるから、その解答は明らかに、与えられた区間に対する  $\bar{S}_{\bar{X}_R}$  の分布の不連続性が充分に多く、その幅が無視できる程小さい  $N$  と  $\omega$  との組合を見出すことにかかっている。

4.9表  $\bar{S}_{\bar{X}_R}$  が正規母集団からとられた、丸められた  $N$  個の観測値に基づいている場合には  $\bar{S}_{\bar{X}_R}$  の0の値が通られる確率

観測数 $N$	$\omega$ 単位の丸め区間の幅 ( $\omega = \omega/g$ )			
	1	1/2	1/4	1/8
2	0.271	0.1396	0.0703	0.0302
3	0.185	0.0225	0.0087	0.0014
4	0.028	0.0038	0.0005	0.0001
5	0.009	0.0007		
6	0.003	0.0001 <sup>+</sup>		
7	0.001 <sup>+</sup>			

正規母集団から抽出された場合に、 $\bar{S}_{\bar{X}_R}$  の分布の不連続性を無視できる  $N$  と  $\omega$  との組合せは、表に対する  $N$  と  $\omega$  の値について、表4.9~4.12に似た  $\bar{S}_{\bar{X}_R}$  の実際の分布についての表を複製することにより決定されるのである。しかし、このような表を複製するのに要する計算の労力は莫大であるから、このような表が利用可能になるまでは、厳密な解答の代りに、直観的に求まる経験法を考案する方がよいように思われる。したがって、与えられた

$N$ と $W$ の値に対して $s_{2R}^2$ の0に近くなる確率を 与えられた $N$ と $W$ の対が満足できるものかどうかを決める基準として用いることを提案する。もっとはっきりさせるために、正規母集団から抽出されたものであるという仮定から求められる

$P\{s_{2R}^2 = 0 | N, W\} \leq 0.001$  を 4.4節の(1) に示してある近似が  $s_{2R}^2$  の分布の実際に満足される近似を与える $N$ と $W$ の値の仮定基準として採用することを提案する。

正規母集団からの抽出に対する  $P\{s_{2R}^2 = 0 | N, W\}$  の値は  $N$ と $W$ の各種の組合せについて 4.9表に示してある。なお $W$ は母標準偏差を単位として表わしてある。この表から $n = 1/2$  の場合満足のおく組合せは次のとおりであることが分る。

$a \leq 1/200$	$N \geq 2$ (補外による)	
$a \leq 1/10$	$N \geq 3$	
$a \leq 1/3$	$N \geq 4$	(20)
$a \leq 1/2$	$N \geq 5$	
$a \leq 2/5$	$N \geq 6$	
$a \leq 1$	$N \geq 7$	

4.4節の(1), (2) が、実際の仕事に際して、満足のおく結果を生み出すと期待されている条件の任意の定数を (20) の組合せが長わすことを見極めてはいけない。(20) の組合せは 4.1節の最初の項で引用した  $W$  は  $2/3 - 2/4$  の方がよいが、より小さくなければならぬという一般的な取決めと拮抗する。或は矛盾するものとは考えられない。この一般的な取決めの目的は、丸めに原因するパラメーターの推定精度の必然的な低下を制約することであり、その上丸め区間の選択の行なえる場合と関係がある。これに及して(20)の組合せは、あらゆる丸めに原因する推定精度の低下とは関係なく、データが標準的方法の簡単な修正で正しく解析できる条件の大まかな指標として提案されたものである。

5.4 小数の丸められた観測値にもとづく場合の Student の  $t$  と分散比の分布

Distribution of Student's  $t$  and the variance ratio when based on a small number of rounded observations

丸められた観測値のあらゆる函数の分布と同じく、4.5節の方程式(16)で定義されている  $t_{XR}$  の分布は不連続である。しかし、 $t_{XR}$  の分布と  $s_{2R}^2$  の分布の不連続性は、結合されて  $t_{XR}$  の分布に影響するから、与えられた区間における不連続点の数は  $t_{XR}$ ,  $s_{2R}^2$  の分布のそれよりも多く、一般にその歩みも  $s_{2R}^2$  の分布に比べて小さくなる。これに反して、 $s_{2R}^2$  が0に等しい時はいつでも、 $t_{XR}$  が母平均  $\mu_1: X$  に等しい場合を除いて、これは分子の符号によって  $t_{XR}$  が  $+\infty$  又は  $-\infty$  になる。この場合  $t_{XR}$  は  $+1$  又は  $-1$  に等しいと定義でき、その符号は、各符号の出現は確率であるという確率の模倣によって、場合毎に決められる\*。

最後に述べたような事態は、 $\mu_1: X$  が  $1/2$  の符数でない限り起り得ず、又例えそいう可能性があったとしても、稀にしか起らないであろう。これに反して、 $t_{XR}$  の無限の値は、軽い丸めの行なわれた時には、小標本例え  $N \leq 4$  ではしばしば起るであろうことか 4.9表から分る。

しかし、与えられた  $N$  で行なわれた丸めが (20) の取決めに従っておれば、 $t_{XR}$  の値が不定になる確率は 0.001 以下となるであろう。さらに、このようにして決められた丸めは、同時に  $t_{XR}$  の分布の歩みも無視できることを示すであろう。即ち実際的には、 $t_{XR}$  は標準的  $t$  分布に従っている——厳密に云えば  $t_X$  についての  $t$  が正しい——とみなされるであろう。

同様な考え方が、二つの平均平方  $s_{12R}^2$ ,  $s_{22R}^2$  の比  $F_R$  の分布——例えればこれは丸めが行なわれなかった場合  $\mu_1, \mu_2$  と  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  はそれぞれ自由度  $n_1, n_2$  の  $\chi^2$  として独立に分布するであろう——に適用される。

\* この定義は模倣になる。  $F = 0 = 1$  は常識的な定義と思われ、 $t = 0 = 0$  も常識的と思われるが  $t^2 = F$  であるために、この定義は  $0^2 = 1$  を意味しない。

特に  $\Delta_{12R}$  が 0 であれば  $F_R = \Delta_{12R} / \Delta_{22R}$  は 0 となり、 $\Delta_{22R}$  が 0 であれば 不足となり、 $\Delta_{12R} \cdot \Delta_{22R}$  が共に 0 のときにはノと定数されるであろう。  $F_R$  の 4 つの正値な分布が、4.4 ~ 4.7 表に示してある  $\Delta_{12R}$  の分布から計算された、 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ 、 $W = 0, \sigma/2, \sigma/4$  と  $\alpha_1 = \alpha_2 = 2, W = \sigma$  の場合について考察した。予期していたとおり、与えられた区間では、 $F_R$  の不連続点は  $\Delta_{12R}$  だけの分布の不連続点よりも数が多く、歩みも小さかった。  $F_R = 0, F_R = 1, F_R = 1/4$  に対応する歩みが最大であった。

これの押れているグラフから、この 3 つの歩み  $\alpha_1, \alpha_2$  を埋すか、 $W$  を減すことにより、無視できる大きさになるならば、 $F_R$  の分布は実用的にはさしつかえない近似値として F 分布で表わされるであろうことが分る。  $N_1 (= n_1 + 1), N_2 (= n_2 + 1)$  と共通の尺目区間が、上記 (20) の勘合と異なるならば、 $F_R$  は実用的には F 分布に従って分布するとみなされるであろう。

$\Delta_{12R}, \Delta_{22R}$  が異なる尺目区間  $W_1, W_2$  によるものであるれば、 $F_R$  の分布は F の分布に対して崩れているであろう。 F 検定が平常通りに用いられる場合、 $\sigma^2$  が未知であれば、この備りは除去できない。

6. 表および補間された値の統計的性質

*Statistical properties of tabular and interpolated values.*

統計の教科書では、表値の誤差は、その最後の桁で、 $\pm 1/2$  単位の間に一様な確率密度をもって分布する確率変数とみなされるということがよく言われているし、又暗にほのめかされている。表の使用上には分かりないかもしれないが、与えられた表値の丸めの誤差は明らかに一定の値をもっている。与えられた表値の誤差はその分布が一点に集中しているから、どんな表わし方をした

としても、確率変数であるとはいえない。統計学のテキストで見られるこの記述は、変数の表値を用いて計算を行う場合に、好都合の条件のもとでは、一語にして考察される個々の表値の誤差はほぼ一様な密度をもって、最後の桁の  $-1/2$  単位から  $+1/2$  単位の間にあるであろうことを意味していると解さねばならない。

時には、事情が全く不都合なこともある。したがって、与えられた計算に表の一部だけの数を用いられおれば、——簡単にははつきり云えない場合にも——誤差は全て同符号をもつようになるか、誤差を合計すれば、この自乗数の特定の範囲について、与えられた小数点以下の桁数まで示されている場合の函数の別の特性を有する値になるであろう。事実、事情の好都合性は、次に対比してある二つの対数表のように、函数加表に示される単位によって変る。

$N$	$\log_{10} N$	$\log N$
9.861	3.9939 210	2.1963 429
9.862	3.9939 650	2.1964 403
9.863	3.9940 090	2.1965 457
9.864	3.9940 531	2.1966 470
9.865	3.9940 971	2.1967 484
9.866	3.9941 411	2.1968 498
9.867	3.9941 851	2.1969 511
9.868	3.9942 291	2.1970 525
9.869	3.9942 731	2.1971 538
9.870	3.9943 172	2.1972 551
9.871	3.9943 612	2.1973 564
9.872	3.9944 051	2.1974 577
9.873	3.9944 491	2.1975 590
9.874	3.9944 931	2.1976 603
9.875	3.9945 371	2.1977 616
9.876	3.9945 811	2.1978 629
9.877	3.9946 251	2.1979 641
9.878	3.9946 690	2.1980 653
9.879	3.9947 130	2.1981 666

この対数値は小数点以下7桁まで正しい。Log<sub>10</sub>N の値について7桁目の数字を調べてみると、6桁のLog<sub>10</sub>N から読みとられた対数を用いて計算され、Nが上記の範囲に限られておれば、対数の誤差は6桁目の1/10 単位の値の周りに集まり、明らかに6桁目の-1/2 単位と+1/2 単位の範囲でほぼ一様な分布をしないであろうことが分る。これに反して、計算が6桁のLog N の表を用いて行われたならば、Nの値か上に示された値に限定されていても、対数の誤差は6桁目の-1/2 単位と+1/2 単位の範囲でかなり一様に分布するであろう。ただし最後の桁の3/10 単位前後で、誤差の分布にはギャップが存在するであろう。

自乗数の連続した値に対する正確な因数値の間には一定の関係があるから、同じ様に、小数点以下7桁まで正しい表の値を丸めることによって生ずる誤差間にも一定の関係がある。したがって9桁に丸めたための誤差は、実際には、残りの数の最後の桁の単位の-1/2 と+1/2 の範囲で一様分布する確率変数の独立な観測値とは同符ではない。それにもかかわらず、よく散らばっている自乗数を示す乗数の表値を調べてみると、9桁を越える数値は、屢々残りの最後の数値の単位で0と1の範囲で幾分一様かつ独立に分布すると思われる分数となるであろう。さらに、表に示される因数が無理数又は超越関数の時には、9の大きい程、9桁目を越える小数は与えられた自乗数の空間で、一様かつ独立に分布すると思われる分数となりやすい、もちろん例外もある。

例えば小数に展開した時に0と1だけになる関数 10<sup>3/9</sup>, 10<sup>7/9</sup>, 10<sup>21/999</sup> 等 (n = 0 ± 1, ± 2, ...) は前述のどの性質も示さない。同様に完全な因数の表は、なんらかの欠点を持っているであろう。しかし、上記の性質はごく普通のものであり、特に無理数や超越関数を小数展開する場合にそうであるという事実は多くの場合、表の数値の丸めによる誤差は表に示されている最後の桁の+1/2 単位と-1/2 単位の範囲で、一様かつ独立に分布していると思ふことが有益であろうということを暗示している。

ただし、個々の場合にはこの仮定からの推定を適用する場合には適当に判断することにする。

前記の条件で、表の数値の丸めによる誤差が±1/2 の間にある時に、誤差εは±1/2 の区間で一様な確率密度をもって分布すると仮定しよう。直ちに次のことが得られる。

$$\text{誤差の平均値} = \frac{1}{w} \int_{-\frac{w}{2}}^{+\frac{w}{2}} \epsilon d\epsilon = 0 \tag{20}$$

$$\sigma_{\epsilon}^2 = \text{誤差の分散} = \frac{1}{w} \int_{-\frac{w}{2}}^{+\frac{w}{2}} \epsilon^2 d\epsilon = \frac{w^2}{12} = 0.0833 w^2 \tag{21}$$

したがって、誤差の標準偏差は

$$\sigma_{\epsilon} = \frac{w}{\sqrt{12}} = 0.2887 w$$

この結果、丸めの誤差をこの統計的観点から眺めれば、方程式<sup>(22)</sup>は丸めには倚りかない、即ち、丸められた表値と関数の真値間の差の平均は0となるであろうということの意味している。この統計的観点から言えば、±1/2 以下で“正しい”K個の表値の誤差の和は、誤差の独立性の仮定から標準偏差 w/√K/12 で平均値0の周りに分布するであろう。さらに、この分布は長>4<sup>(23)</sup>の場合には近似的に正規分布 (gaussian) をする。

この結果を利用した例として p = π/6 について (p+q)<sup>3</sup> を展開した時の9個の数に関する小数点以下5桁まで正しいと思われる表を考察してみる。9個の値の和は 100003 である。真の値から隔り 0.00003 は、計算を誤りを犯したことを示しているのであろうか？ 許容できる最大の隔りは ±0.000045 の範囲内にあるから、計算が誤っていたという確実な証拠はない。0.00001 単位で測られる、観測された隔りは、近似的に

$$\frac{(3-0)}{\sqrt{9/12}} = 3.46$$

\* 詳細については、7節に示してある Barten, Hall, Levin, Riely の論文を参照のこと

の正規偏差に相当する。

正規偏差が0から2.576以上はなれる確率は0.01以下<sup>\*</sup>であるから 計算を吟味してみる必要がある。(恐らく和から始められる。)

Fisher と Wishart<sup>\*\*</sup> は自変数の値が再回帰の場合の補間値の誤差の分布を定めるために この統計的見解を用いた。

自変数の周囲を単位にとり、補間値を求めようとする自変数  $p$  の値を含む区間を  $0 \sim 1$  としよう。Lagrange の補間係数<sup>\*\*\*</sup>を用いて、隣差により常に補間が行なわれるならば、補間の誤差はそれを求めるために用いた表の数字で簡単に表わすことができる。要するに これは誤差の“補間” interpolate である。

一次形式の補間の誤差 (2点) =  $(1-p)E_0 + pE_1$

二次形式の補間の誤差 (3点)

$$= \frac{p(p-1)E_{-1} + 2(1-p^2)E_0 + p(p+1)E_1}{2} \quad (24)$$

$$\text{2m点の補間の誤差} = \sum_{K=-m+1}^m A_K^{2m}(p) \cdot E_K$$

$$\text{2m点の補間の誤差} = \sum_{K=-m}^m A_K^{2m+1}(p) \cdot E_K$$

\* このことは1章の1.1表から証明される。それは正規偏差が  $K \cdot 0.05$  以上となるか  $-K \cdot 0.05$  以下となる確率は  $2(0.005)$  であるからである。

\*\* Fisher and Wishart, "On the Distribution of the Error of an Interpolated Value."

\*\*\* 3点から11点の補間に対するこの係数の数値については Mathematical Tables Project, の Tables of Lagrangian Interpolation Coefficients を参照のこと。この係数の公式は この表の前巻に説明してある。

表の数字の誤差が、共通の分散  $\sigma^2$  をもつ独立な確率変数とみなされるならば、自変数  $p$  に対する  $n$  点補間は簡単に

$$V(p, r) = \sum_K [A_K^r(p)]^2 \sigma^2 \quad (25)$$

ここで 累計は  $r = 2m$  の時には  $-m+1 \sim m$  までの  $K$ 、 $r = 2m+1$  の時には、 $-m \sim +m$  までの  $K$  に対するものである。<sup>\*\*\*</sup>

$$V(p, 2) = \text{Lagrangian の二点補間の分散} \\ = \{(1-p)^2 + p^2\} \sigma^2 = \{1 - 2p(1-p)\} \sigma^2 \quad 0 \leq p \leq 1 \quad (26)$$

$$V(p, 3) = \frac{\{p^2(p-1)^2 + 4(1-p)^2 + p^2(p+1)^2\} \sigma^2}{4} \\ = \frac{\{6p^2(p^2-1) + 4\} \sigma^2}{4} \quad 0 \leq p \leq 1 \quad (27)$$

微分により、 $V(p, 3)$  の最小値は  $p = \pm 1/\sqrt{2}$  に対応するものでその値は  $\frac{5\sigma^2}{8} = 0.62500 \sigma^2$  であることが決定できるが、この値は  $p = 1/2$  に対応する  $V(p, 2)$  の最小値 即ち  $\frac{\sigma^2}{2} = 0.50000 \sigma^2$  より大きい。又  $0 \leq p \leq 1$  について その最大値は明らかに  $V(0, 2) = V(0, 3) = V(1, 2) = V(1, 3) = \sigma^2$  である。4.10表には  $(2m)$  点補間 ( $m=1, 2, 3, 4$ ) の場合の  $V(p, r)$  の最小値をだし、 $0 < p < 1$  と  $(2m+1)$  点補間の場合の  $-1/2 \leq p \leq 1/2$  に対する実際の最小値\*と平均値とが示してある

要約すれば、表値の誤差が共通の分散  $\sigma^2$  をもつ独立な確率変数とみなされ、自変数の値が単位区間において一律に分布してお

\* 公式 (26) は Fisher と Wishart (P. 914) の示しているものと同じである。複号は (27) の代りに、(27) の  $p$  が  $-1/2$  から  $+1/2$  に変るときに  $0$  から  $1$  まで変る変数  $p$  について対称の式を与えている。

\*\*  $1/2 < p < 1$  に対する  $(2m+1)$  点補間の場合には  $p=1$  を原点に選び、 $K=-m$  では表の数字を捨て、 $K=m+1$  では数字を加え、 $1-p$  を自変数として用いれば、もっと正確な補間を行うことができる。この便法によれば、 $V(p, 2m+1)$  は 実際には  $p = \pm p'$  (ただし  $1/p' > 1/2$ ) で最小値をとるが、 $p = \pm 1/2$  で実用的な最小値となるであろう。

り、 $Y$ が偶数であれば $0 < p < 1/2$ 、 $Y$ が奇数であれば $-1/2 < p < 1/2$ なる自変数 $p$ に対する期間として $Y$ 点補間を階差を用いずに行な  
ったならば、

(1) 補間値の確率誤差の分散は常に一つ一つの数値の分散より  
小さい。

(2) 補間値の確率誤差の分散は 一次形式(2点)の補間の場合  
に最小である。

(3)  $(2m+2)$ 点補間の確率誤差の分散は $(2m)$ 点補間の確  
率誤差の分散より大きいが、 $(2m+1)$ 点補間の確率誤差の  
分散より小さい。

(4)  $(2m+3)$ 点補間の確率誤差の分散は $(2m+1)$ 点補間  
の確率誤差の分散より小さい。

(3)と(4) から、 $(2m)$ 点補間で必要な正確度が得られず、

$(2m+1)$ 点又は $(2m+2)$ 点を得られるようであれば、精  
度の低下を最小にするために $(2m+1)$ 点補間より $(2m+2)$   
点を用いるのが得策であることを見る。

この結果は、連続した表値の誤差が、共通の分散をもって独立  
に分布しているとみなされることだけが必要としているのに注目しなけ  
ればならない。誤差はもつぱう丸めに原因するものであって、

$-1/2$  と  $+1/2$  の間で 一様な確率密度をもって分布していると  
は仮定されていない。もちろん、この結果は、独立性の仮定を主張  
できる場合には、(22) で示した  $\sigma^2 = 1/12$  を用いてこの場合に

に適用できる。しかし、Fisher と Wishart は、読者の場合につ  
いて、補間値の誤差の分布は幾分扱い難く、 $Y$ の増加につれて  
正規(Gaussian)分布に近づく(  $\beta_2$  は 2.2 に近き、

3とはならない)ことを指摘した。Tchelysheff や Camp, Meidell

\*  $(Y+1)$ 点、 $(Y+2)$ 点...補間が $Y$ 点補間より常に大きな正確度  
となると結論のなかに、読者は用心しなければならない。与えら  
れた区間を使用すべき点の数および $Y$ の増加に伴って精度が低下  
する簡単な例についてはSteffensenのInterpolation pp.34-35と参照されたい。

4.10表  $Y$ が偶数のときには0と1との間、 $Y$ が奇数の場合に  
は $+1/2$  と  $1/2$  との間にある自変数に対する $Y$ 点補間の分散  
の最小値と平均値、ただし自変数値の間隔は単位区間であり  
表値の誤差は共通の分散 $\sigma^2$ で独立に分布している。

補 間	最 小 分 散 <sup>⊕</sup> (単位、 $\sigma^2$ )	平 均 分 散 <sup>⊕</sup> (単位、 $\sigma^2$ )
1 点	1.00000	1.00000
2 点(一次)	0.50000	0.66666
3 点	0.71875	0.89375
4 点	0.64062	0.77566
5 点	0.74060	0.89574
6 点	0.70599	0.82244
7 点	0.76579	0.90291
8 点	0.74573	0.84942
-----		
∞ 点	1.00000	1.00000

注⊕  $(2m)$  点補間の場合には、ここに示してある値は  $p = 1/2$   
で生ずる実際の最小値であり、 $(2m+1)$ 点補間の場合には  
 $p = \pm 1/2$  で生ずる実用的な最小値である。この証明につ  
いては、テキストを参照のこと。

注⊕ Fisher と Wishart との文献から p.p. 914-915. から引  
用したものである。この平均は、 $(2m)$ 点補間では区間  
 $0 \leq p \leq 1$  について、 $(2m+1)$ 点補間では区間  
 $-1/2 \leq p \leq 1/2$  についてとられたものである。

の不等式\*は適用できるか、相関係数の標準誤差の測定としての標準偏差の有用性は幾分制約される。(24) から、相関係数の誤差は、相関係数によるものに行なわれる場合(即ち、Lagrange の相関係数を用いる)には、表値の誤差の一次関数であるから、相関係数の誤差が独立で、共通の分散をもって正規分布している場合には、相関係数の誤差は正規分布するであろう。したがって、正確な値より  $\sqrt{2}$  桁余分に印刷してある表は、数値を切り捨てた同じ表よりも、正確かつ精度のよい相関係数を与えるであろう。ただし、この場合、表値の標準偏差は与えられており、誤差は、共通の分散をもって、平均値の周りで、ほぼ正規かつ独立に分布しているものとする。

(Columbia University の統計調査グループ著  
Techniques of Statistical Analysis p.189~  
p.223 より ; 蕨屋)

\*例としては Shewhart の Economic Control of Quality pp. 176-177 を参照。

常数の標準誤差を求めるための正規方程式の解法  
A Solution of Normal Equations Giving the  
Standard Error of the Constants.  
by William Powell Baien

多くの統計家(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)達は観測資料に対する線形方程式を適合させる時用いられる正規方程式の解法を工夫した。Fisher (3, 99, 142 ~ 150) は彼のじなる値を使用する事によって常数の標準誤差を見つける事ができる解法を確立した。

本論文の目的は、どんなふうにして計算器を用いて常数を解くか、そして如何にして、その常数の標準誤差を決定するのに使う、という値を見つけるかを示すにある。

例として降雨量の緯度、経度、高度に対する関係を示すために Fisher によって使われた方法を実際に使用してみる。  
与えられた値  $X_1, X_2, X_3$  からの  $Y$  の推定値が次式で表わされると仮定すると

$$Y = b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3$$

最小二乗法から得られる正規方程式は

$$\sum X_1^2 b_1 + \sum X_1 X_2 b_2 + \sum X_1 X_3 b_3 = \sum X_1 Y$$

$$\sum X_1 X_2 b_1 + \sum X_2^2 b_2 + \sum X_2 X_3 b_3 = \sum X_2 Y$$

$$\sum X_1 X_3 b_1 + \sum X_2 X_3 b_2 + \sum X_3^2 b_3 = \sum X_3 Y$$

Fisher によって与えられた集計の値を使えば上記方程式は次の如くなる。

$$2) 1,834.1b_1 + 772.2b_2 + 924.1b_3 = 1,137.4 = \sum X_1 Y$$

$$3) -772.2b_1 + 2,889.5b_2 + 119.2b_3 = 547.9 = \sum X_2 Y$$

$$4) 924.1b_1 + 119.2b_2 + 1,750.8b_3 = 891.8 = \sum X_3 Y$$

方程式に於ける  $b_1$  の係数の絶対値で各方程式を割れば次式を得る。

$$5) b_1 - 0.399255b_2 + 0.497743b_3 = 0.595677$$

$$= 0.000517036 \sum X_1 y$$

$$6) -b_1 + 3.341906b_2 + 0.154892b_3 = -0.765806$$

$$= 0.00129500 \sum X_2 y$$

$$7) b_1 + 0.129423b_2 + 1.894600b_3 = 0.966027$$

$$= 0.00108213 \sum X_3 y$$

次の様にして  $b_1$  を消去する。

$$8) = 5) + 6) : 3.342423b_2 + 0.632678b_3 = -0.199727$$

$$+ 0.00129500 \sum X_2 y + 0.000517036 \sum X_1 y$$

$$9) = 6) + 7) : 2.271329b_2 + 2.049482b_3 = 0.197241$$

$$= 0.00129500 \sum X_2 y + 0.00108213 \sum X_3 y$$

と4に

$$10) b_2 + 0.189273b_3 = -0.6537684 = 0.000154678 \sum X_1 y$$

$$+ 0.000387417 \sum X_2 y$$

$$11) b_2 + 0.529400b_3 = 0.0509492 = 0.000354510 \sum X_2 y$$

$$+ 0.000279524 \sum X_3 y$$

$b_2$  を消去せば

$$0.340127b_3 = 0.104718$$

$$= -0.000154678 \sum X_1 y - 0.000052907 \sum X_2 y + 0.000279524 \sum X_3 y$$

換って

$$12) b_3 = 0.307878$$

$$= -0.000254965 \sum X_1 y - 0.00015555 \sum X_2 y$$

$$+ 0.000821822 \sum X_3 y$$

換言すれば

$$13) b_3 = C_{13} \sum X_1 y + C_{23} \sum X_2 y + C_{33} \sum X_3 y$$

そこで  $C_{13} = -0.000254977$

$$C_{23} = -0.00015555$$

$$C_{33} = 0.00082182$$

これは本質的に Fisher の得たものと同じである。

計算の吟味として  $b_3$  は  $C_{13}, C_{23}, C_{33}$  と  $\sum X_1 y, \sum X_2 y$

$\sum X_2 y$  の値を用いる事によって (13) より見出す事が出来る。これは次の如くなる。

$$b_3 = -0.00045477 (1137.4) - 0.00015555 (-592.9) + 0.00082182 (891.8)$$

故に  $b_3 = 0.507876 = 0.30788$

11) に  $b_3$  の値を代入して  $b_2$  について解けば

$$b_2 = -0.529400 (0.30788) + 0.0509492 = -0.11204$$

$$= 0.529400 \left\{ -0.00045477 \sum X_1 y - 0.00015555 \sum X_2 y + 0.00082182 \sum X_3 y \right\} + 0.000354510 \sum X_2 y + 0.000279524 \sum X_3 y$$

$$\text{故に } b_2 = +0.000240753 \sum X_1 y + 0.00041686 \sum X_2 y - 0.00015555 \sum X_3 y$$

故に

$$14) b_2 = C_{12} \sum X_1 y + C_{22} \sum X_2 y + C_{32} \sum X_3 y$$

此處で  $C_{12} = 0.00024075$

$$C_{22} = 0.00041686$$

$$C_{32} = -0.00015555$$

$b_2$  の値は (14) を用いる事で check 出来る。

これは次の如くなる

$$b_2 = -0.11204$$

$b_2$  及び  $b_3$  の値を代入する事により 方程式 7) は  $b_1$  を見つけるのに用いる事が出来る。

$$b_1 = -0.129423 (-0.11204) - 1.894600 (0.30788) + 0.966027 = 0.39624$$

$$= -0.129423 \left\{ 0.000240753 \sum X_1 y + 0.00041686 \sum X_2 y - 0.00015555 \sum X_3 y \right\} - 1.894600 \left\{ -0.00045477 \sum X_1 y - 0.00015555 \sum X_2 y + 0.00082182 \sum X_3 y \right\} + 0.000108213 \sum X_3 y$$

故に

$$b_1 = +0.000830439 \sum X_1 y + 0.000240756 \sum X_2 y$$

$$-0.000454766 \sum X_3 y$$

$$\text{又 } b_1 = C_{11} \sum X_1 y + C_{12} \sum X_2 y + C_{13} \sum X_3 y$$

$$\text{此處で } C_{11} = 0.00083044$$

$$C_{12} = 0.00024076$$

$$C_{13} = -0.00045477$$

$$15) \text{ より } b_1 = 0.29624$$

$b_i$  の標準誤差はこの方程式を普通式により 13) 14) 15) から定得られる。

例えは 13) は次の様に書き得る

$$b_3 = C_{13} (X_{11} y_1 + X_{12} y_2 + \dots + X_{1n} y_n) + C_{23} (X_{21} y_1 + X_{22} y_2 + \dots + X_{2n} y_n) + C_{33} (X_{31} y_1 + X_{32} y_2 + \dots + X_{3n} y_n)$$

$$\text{即ち } = (C_{13} X_{1i} + C_{23} X_{2i} + C_{33} X_{3i}) y_i$$

$$= \sum (C_{13} X_{1i} + C_{23} X_{2i} + C_{33} X_{3i}) y_i$$

$b_3$  の重は  $X$  の値が固定されている故  $y$  の値に直線的な関係にある。

$X$  のある値に対する  $y$  の値の標準偏差は  $X$  の各値に対するのと同じであると仮定される 即ち  $X$  の上に並んだ各  $y$  の値の標準偏差は同じある

$b_3$  の標準誤差はそれ故に

$$\sigma b_3 =$$

$$S_y \sqrt{C_{13}^2 \sum X_1^2 + C_{23}^2 \sum X_2^2 + C_{33}^2 \sum X_3^2 + 2C_{13} C_{23} \sum X_1 X_2 + 2C_{13} C_{33} \sum X_1 X_3 + 2C_{23} C_{33} \sum X_2 X_3}$$

此處で  $S_y$  は推定値の標準誤差である

行列式を使う事によって最後の式は次の如くまとめられる。

$$\sigma b_3 = S_y \sqrt{C_{33}}$$

$b_3$  の標準偏差は故に

$$\sigma b_3 = 4.3327 \sqrt{0.00082182} = 0.12421$$

同様にして  $b_1, b_2$  の標準偏差は夫々同様に示す事が出来る。

$$\sigma b_1 = S_y \sqrt{C_{11}} = 4.3327 \sqrt{0.00083044} = 0.12486$$

そして

$$\sigma b_2 = S_y \sqrt{C_{22}} = 4.3327 \sqrt{0.00041686} = 0.08546$$

標準誤差を持つた常数の値は

$$b_1 = 0.29624 \pm 0.12486$$

$$b_2 = -0.11204 \pm 0.08546$$

$$b_3 = 0.20788 \pm 0.12421$$

上記の方法は如何にしてこの値や又回帰常数を出すかと言う事を示しており、そして数値式計算機を使う事が出来る事を示している。この方法は理解するのに容易なばかりでなく計算者に教える事も容易である。

### 引用文献

- 1) BATES WILAM D 1938  
Elementary Mathematical Statistics 508 pp  
New York.
- 2) DAVIS HAROLD, and NELSON, W. F. C. 1935  
Elements of Statistics with Applications to  
Economic Data 424 pp illus. Bloomington Ind.
- 3) Fisher, R. A. 1932  
Statistical Methods for Research Workers. Ed.  
4th ed and end. 307 pp. illus. Edinburgh and  
London (Ed. 359 pp 1936)
- 4) GOULDEN, C. H. 1938  
Methods of Statistical Analysis. 207 pp.  
New York.
- 5) MERRIMAN, MANSFIELD 1911  
A Text-Book on the method of Least Squares.  
Ed. 8, rev. 230 pp. illus. New York.

- 6) MILLS, FREDERICK CECIL. 1924  
*Statistical Method Applied to Economics and Business* 604 pp New York.
- 7) WALLACE, H.A. and SNEDECOR, GEORGE W  
 1931.  
*Correlation and Machine Calculation*. Iowa State Col. of Agr., No. 4. 71 pp.
- 8) WHITTAKER, E.T., and ROBINSON, G. 1932  
*Calculus of Observations, A Treatise on Numerical Mathematics*, Ed. 2, 395 pp. London and Glasgow.
- 9) YULE, G. UDEN 1932  
*An Introduction to the theory of Statistics*. Ed. 10, 434 pp illus. London.

(*Journal of Agricultural Research August* 1940. vol 61 No. 3 pp 237より ; 栗屋)

樹幹断面の幾何学について  
*On the Geometry of the Cross-Section of a Stem*

by Bertil Matern

目 次

I	領域の凸包	113
II	周囲測定	114
III	直径の表示法	114
IV	Orbiform	115
V	ランダムな方向で測定した直径	118
VI	最大および最小直径の測定	120
VII	数値例	122
VIII	ヒッテルリッヒの "Winkeleahl" 法	126
IX	測樹学における関連する問題についての注意	127
X	要約と結論	128
附 録		131

参考文献

一般の測樹学の方法ではすべて樹幹の水平断面 (Horizontal section) が用ゐると仮定している。しかしこの断面は決して正確な円ではない。断面が完全な円でないことについてはこれまでに多くの説明がなされている。これらの詳細については Tischendorf 1843 年の文献表を参照されたい。

横断面が円形でないことから、横断面面積の誤差が生ずるから、従つて枚積計算にも誤差が生ずる。これらの誤差を研究する際、ある人々は楕円断面 (elliptical cross-section)、あるいは二つの半楕円 (semi-ellipses) からなる断面の場合について調べている。例えば、Blattner 1926, Tischendorf 1927, 1943 年, Heikkilä 1927, Jirón 1929, Stoffels 1948, Matusita 1955 等を見よ。これらの論文のあるものは、これまでの研究についても言及している。これらの研究方法が妥当と思われる理由は、大部分の樹幹が、色々な方向で色々な直径を有し、最大径と最小径の方向が大体直角になることが多いことによるものである。しかし著者は断面の真の形状を研究している文献を見たことがない。従つて楕円又は二つの半楕円が樹幹断面の真の模型 (model) としてよいかどうかという問題は未解決と考へなければならぬ。楕円と考へる研究方法の欠点は Jirón 1929 (pp. 245, 248 を見よ) に強調されている。

次に断面の形を全然仮定せずに通用できる色々な測樹法の誤差について、どのようなことがいえるかを調べることも重要と思われる。そのような研究は断面の形状を実験的にどのように研究すればよいかということの手かかりをも与えるであろう。

Ch. 1 において後述するように、適切な出発点は“凸領域” (Convex Region) の理論である。幸い凸領域については多くの明確な定理 (Statement) が証明されている。Blaschke (1920, p. 146) 参照。特に Convexity の条件から華麗かつ深淵な討論が豊

富に算みかけられるということは特に注目すべきことである。(“Deshalb ist es besonders merkwürdig, dass sich aus der schwachen Forderung der Konvexität eine solche Fülle schöner und tiefliegender Folgerungen ziehen lässt”)

楕円の適合に用ゐられる結論の幾つかは、一般条件の場合にもあてはまることか証明されるであろう。

我々は断面の幾何学的性質から生ずる誤差のみを研究することにするから、測定誤差は考慮しない。

本文においてはこの問題の数学的処理の結果のみを述べることにする。数学的証明は附録にあげる。しかし幾つかの幾何学的概念は問題の一般的な意味を論ずる上で有用と思われるから、本文で論ずることにする。我々はこのような概念の一つから始めることにする。

I 領域の凸包 (The convex closure of a region)

樹幹断面の周囲は樹皮の隆起や亀裂等のために平滑であることは殆んどない。更に幹の各部、特に樹幹の下部には凹部または起伏が見られるものである。従つて樹幹はゴム製のバンドをめぐらせると、バンドの内側の面積は、横断面積より大きくなるのが普通である。このゴムバンドで囲まれる輪郭即ちその内側の領域は幾何学において領域の凸包 (the convex closure of a region) とよばれるものである。Fig 1 参照。

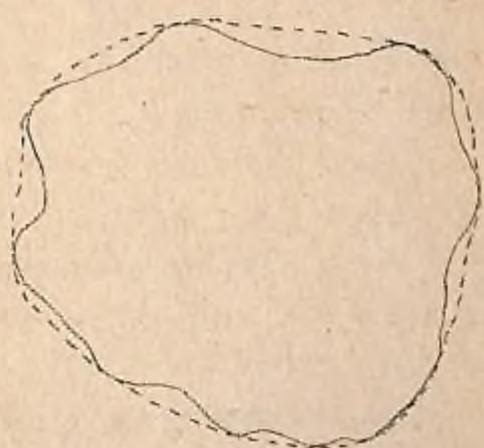


Fig 1 領域の凸包

この概念はこれから考へていく問題に対して有用と思われる。というのは、輪尺や周囲巻尺の読みは断面の凸包の形状のみ左右されるからである。これと同じことがピッチェルリッヒの

“Winkelzahl”法についてもいえる。

どのような凸でない領域 (non-convex region) でも面積は凸の凸包よりも小さく、また周囲は凸包よりも大きい。横断面の凸包の面積と真の断面積との差をこの横断面の convex deficit という。

以下凸包の面積を  $g$  で表わす。

### II 周囲測定 (Girth measurements)

樹幹にまいた巻尺によって我々は横断面積の凸包の周囲、(例えば)  $C$  を読みとる。さうして次の公式を用いて直径および断面積を計算する。

直径:  $D_0 = C/\pi$

面積:  $g_0 = C^2/4\pi$

従って  $g_0$  は  $C$  なる周囲を有する円の内積である。円の“等周性” (iso-perimetric property) とよばれる性質の故に、 $g_0$  は断面が円形でない限り  $g$  よりも大きい。差  $g_0 - g$  を等周差 (isoperimetric deficit) という。

### III 直径の表示法 (Notation for diameter)

我々の目的には横断面の直径をこの断面の凸包に対する二つの平行な切線間の距離として定義すると便利である。このことは普通の輪尺で直径を読みとることに対応する。

従って我々は、輪尺の尺度板 (bar) が平面上の一定方向となす角  $\psi$  の各法に対して、一つの直径  $D(\psi)$  を得ることとなる。

Fig 2 参照

我々はこの横断面の直径をすべての角度について測定した  $D(\psi)$  の算術平均値として定義する。Cauchy が 1841 年に発表した (Blaschke, P. 1 参照) 基本公式によれば、この平均直径は  $C/\pi$  に等しい。但し前と同じように  $C$  は凸包の周囲である。この点については既に Ch. II において記号  $D_0$  を導入した。

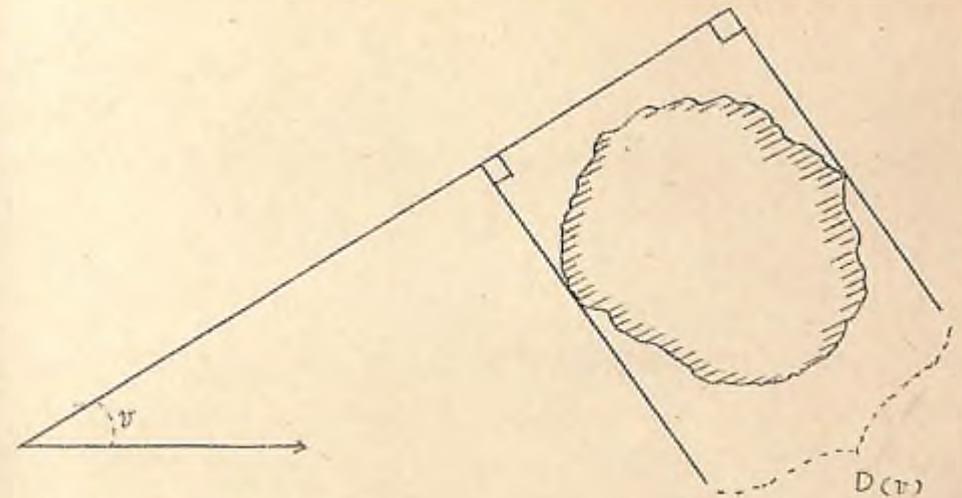


Fig 2 平行な二つの切線間の距離として定義した直径

ついでに Cauchy の定理の意味が次の様に系統的に述べられることを注意しておこう。即ち、もし  $\bar{D}$  をランダムな方向で測定した数の樹の直径の算術平均値とすれば、抽出誤差および測定誤差を無視すると  $\pi \bar{D}$  は巻尺で測定したときの多数の樹の平均周囲に等しい。これは断面の形状の如何にかかわらず成立する。断面の色々な直径についての、それらの平均直径  $D_0$  のまわりの分散を記号  $\sigma^2$  で表わす。また我々には直用方向で測定した二つの直径間の相関係数の記号も必要である。この係数を  $\gamma$  で表わす。

### IV Orbiform

すべての直径の測定値が同じ値となる場合があるが、このときは Cauchy の定理によってそれは周囲測定値から得られる値  $D_0$  に等しくならなければならない。これは勿論分散  $\sigma^2$  が 0 の場合に生ずるものである。

従ってはじめには凸包が円であると考えられるかもしれない。しかし円は凸曲線族 (a family of convex curve) の中で、平行な二切線間の距離がすべての方向について等しいという性質によって特徴づけられる一つの曲線にすぎない。これらの曲線に対して

1778年 Euler は orbiform<sup>1)</sup>なる用語を提案した。

Tiercy 1920 および Buchheim 1938 を参照のこと。

orbiform の三つの例を Fig 3 に示す。3a は Reuleaux の三角形とよばれるもので  $120^\circ$  で交る三つの等しい円弧によって作られるものである。3b および 3c の解析的な取扱は附録で与える。三つの曲線の等周差 (*isoperimetric deficits*) の大きさは 11.4% (3a), 4.2% (3b), 1.6% (3c) である。この場合の *deficits* は実面積のパーセントとして表わしたものである。Reuleaux 三角形は、等周差 (*isoperimetric deficit*) が最大となる orbiform である。

ここで次のような結論が得られる。

樹幹断面が凸で、すべての方向で同一の直径  $D_0$  を有する場合でも、断面積が対応する円面積  $\pi D_0^2/4$  より小さくなることもある。

更に我々は次のような結論を述べることもできる。

各方向における断面直径がわかっている場合でも、一般には断面積の形状や面積について正確な推論を行なうことはできない。

1. Strubelcher 1955, p. 54 に従って、ドイツにおいては "Gleichdick" なる用語が用いられる。

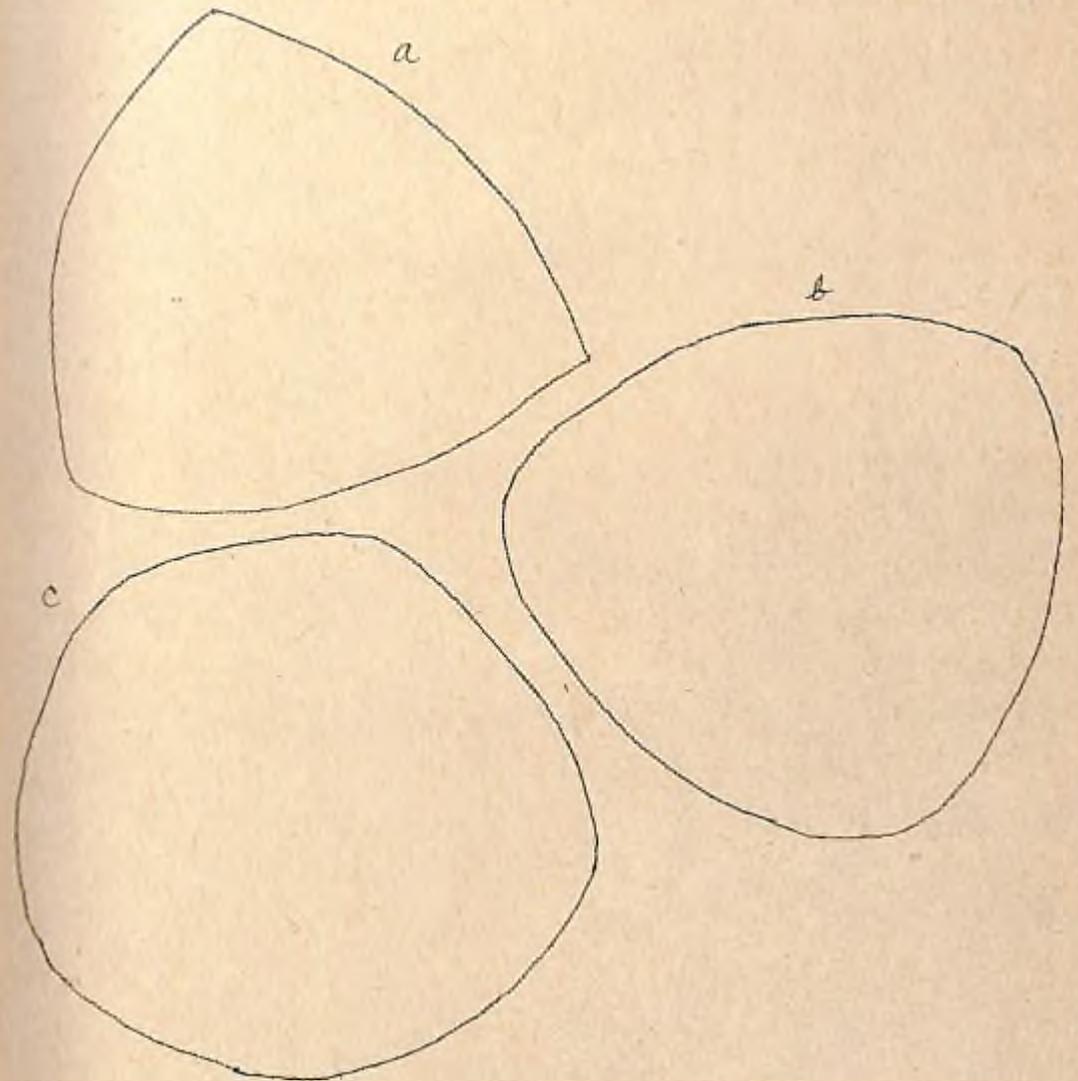


Fig 2 orbiform の三つの例

▽ ランダムな方向で測定した直径 (Diameters calipered in random directions)

我々は直径測定値から

$$\pi D^2/4$$

なる形で断面積を推定する問題のみを考えることにする。ここでDは一つまたは二つの直径測定から色々な方法で計算された直径である。ここでは次の4つの方法を考察することにする。

- 1) Dはランダムな一方向で測定された直径である。
- 2) Dはランダムな方向で測定した直径D(u)と、D(v)に直交な方向で測定した直径との平均値である。
- 3) uと同じであるが、Dは二直径の幾何平均である。
- 4) Dは独立に選んだランダムな二方向で測定した二直径の幾何平均である。

この章では系統的誤差 (Systematic error)のみを取扱うことにする。従って我々は推定した面積の数学的期待値、即ち可能なすべての方向での平均値を研究しなければならない。上記の4方法で推定した断面積の期待値をそれぞれ  $g_1, g_2, g_3, g_4$  で表わす。抽出誤差 (Sampling error)は Ch. III で数値例によって論ずることにする。

Ch. III で導入した記号を用い周知の統計学の公式を適用すると

$$g_1 = g_0 + \frac{\pi}{4} \sigma^2$$

$$g_2 = g_0 + \frac{\pi}{8} \sigma^2 (1+Y)$$

$$g_3 = g_0 + \frac{\pi}{4} \sigma^2 Y$$

$$g_4 = g_0$$

このように上記の4の方法は平均的にすれば同円測定値による断面積推定と同等になる。それは実際には用いられないけれども、この同等性のためにここにあげられたのである。

更に我々は  $g_2$  が  $g_1$  と  $g_3$  の算術平均であることに注意しよう。

$g_1, g_2, g_3$  を相互に比較し、また  $g_0$  (即ち  $g_4$ ) と比較することは、前に Ch. IV で取扱れた  $\sigma^2 = 0$  の場合には簡単である。これらの方法の順位は、ある程度までの  $Y$  の値に依存することかわかる。ここで  $Y$  は  $-1$  から  $+1$  の間にある相関係数となっている。従って我々は次のような比較表を作ることもできる。

$Y = -1$	$g_0 < g_3 = g_2 < g_1$
$-1 < Y < 0$	$g_0 < g_3 = g_2 < g_1$
$Y = 0$	$g_3 = g_0 < g_2 < g_1$
$0 < Y < 1$	$g_0 = g_3 < g_2 < g_1$
$Y = +1$	$g_0 < g_3 = g_2 = g_1$

これから、一般に  $g_1$  が最も適大な推定値を与え、 $g_2$  がこれに次ぐことかわかる。また  $Y$  が正なる  $g_0$  は  $g_0$  より大きい。ここで Ch. I および II で示したように、 $g_0$  は "Convex deficit" + 等周差 (isoperimetric deficit) に等しい適大な推定値を与えるということに注意しなければならない。

しかし、もし  $Y$  が負なる、その方法、即ち直交な二直径の幾何平均を用いる方法が平均して  $g_0$  より小さい値を与える。

$\sigma$  を一定とするとき、 $g_3$  の可能な最小の値は  $Y = -1$  のときに得られ、その大きさは  $g_0 - (\pi/4)\sigma^2$  となる。それでも  $g_3$  は凸包の面積  $g$  以下とはなり得ない。附録で我々は次の不等式

$$g_0 \geq g + \frac{3\pi}{4} \sigma^2$$

を証明するが、これを用いると

$$g_3 \geq g_0 - \frac{\pi}{4} \sigma^2 \geq g + \frac{\pi}{2} \sigma^2$$

が得られる。この不等式から我々はまた次のような結論を導くことができる。

断面の形状の如何にかかわらず、"最悪" ( $g_1$ ) と "最良" ( $g_0, g_4$ 、あるいは  $g_3$ ) 推定値間の平均的な差は、"最良" 推定値と凸包の面積の間の平均差より大きくなることはない。

Ch. IV の *California* の場合から明らかなるように、この4方法間の差は、凸領域の面積からの、それらに共通する超過面積よりはるかに小さい。

文献中には同図測定による面積を直径測定から推定した面積と比較するとき、非常に大きい過大推定値の得られることを報告しているものが見られる。例えば *Miller 1915, P. 82* を見よ。この過大推定は測定誤差、測定器具の誤差、あるいは測定器具の位置を主観的に調節したことによるものに違いない。 *Chalmers 1926 P. 11* 以下参照。また *Assmann 1956* を見よ。

$Y = -1$  の場合は特に注意する価値がある。中位の離心率を有する楕円では、 $Y$  は  $-1$  に非常に近い値となる。例えば輪角の比が  $0.8$  の楕円では  $Y = -0.9985$  である。 *Jirón 1929* 年はこの場合について4つの方法の数値的な比較を行った。これらの方法の順位は  $Y = -1$  なる場合の上述の比較と非常によく一致している。(後述のオノ表を見よ)。楕円の場合における各方向間の差は、実面積に対するそれらの超過面積に比べて割合に大きい。

もう一つの極端な場合は  $Y = +1$  のときである。この場合には、1, 2, 3 の方法は同等であるが、同図巻天の方が幾分よい値を与える。オノ表参照。

結論としてこの章(およびこれ、II)の方法は断面が正確に円形でない限り歪の偏りをもつことがわかった。

### VI 最大および最小直径の測定 (Measuring maximum and minimum diameters)

さて我々は断面積が最大と最小の直径測定値から計算される場合に進むことにする。この場合にも直径は凸包に対する平行な二切線間の距離と解釈する。即ち輪尺測定によって得られた値である。

我々はここまでにあげた方法に更に次のものを追加する。即ち

公式 (5/2)  $D^2$  における  $D$  は

- 5) 最大と最小直径の算術平均
- 6) 最大と最小直径の幾何平均
- 7) 最大直径と、これと直角な方向で測った直径との算術平均
- 8) 7) の直径の幾何平均
- 9) 最小直径と、これと直角な方向で測った直径との算術平均
- 10) 9) の直径の幾何平均

として計算される。

注意しなければならないのはある場合には5) - 10) の方法で得られる推定値が明確に定められないことがあるということである。

例えば二つの異なる方向に最大直径があつて、対応する直角方向の直径が存しくない場合などである。しかし以下の説明では、このような場合は現れない。

人によっては上記のリストにもっと別の方法を追加したかもしれない。例えば 観測された二つの直径の二乗の平均をとるような方法などある。しかし恒等式

$$\frac{D_1^2 + D_2^2}{2} - \left( \frac{D_1 + D_2}{2} \right)^2 = \left( \frac{D_1 - D_2}{2} \right)^2 - D_1 D_2$$

によって、二乗平均の  $D$  を用いて計算した面積は、算術平均および幾何平均から推定した面積から容易に求めることができる。

5) - 10) の方法にもどって考えると、もし凸包が対称、例えば楕円であれば、5, 7 および 9) の各方法は同等となりまた 6, 8, 10) の方法も同等となることわかる。楕円の場合には 6, 8, 10) の方法は凸包の正しい面積を与える。また 5, 7, 9) の方法は  $g$  および  $g_1$  の算術平均を与える。Ch. V を参照。しかし他の形の凸領域については、この6つの方法はそれぞれ異なる結果を与える。我々はこれらの方法で求めた断面積の値をそれぞれ  $g_5, g_6, \dots, g_{10}$  で表わす。

幾何平均は算術平均より大きくなることはないということから次の不等式が導かれる。

$$g_5 \geq g_6 \quad g_7 \geq g_8 \quad g_9 \geq g_{10}$$

更にこれらの方法の定義から直接

$$g_7 \geq g_5 \geq g_9, \quad g_8 \geq g_6 \geq g_{10}$$

なることがわかる。Ch. VII の例からわかるように、これらの不斉式は一般の場合を臺している。更に、この節の方法で得られる値およびこれまでの章で取扱った推定値の間はこれ以外の一般的な不斉式を見出すことは不可能である。

ランダムな方向で繰戻測定した直径を用いる方法と対照的に、ここで述べた方法は次の例から明らかなるように何れも凸包の面積の最少推定値を与える。

一辺が  $\sqrt{2}$  の正方形と、これの外接円の二つの向き合った円弧から作られる凸図形を考える。この場合には

$$g = 1 + \frac{\pi}{2} = 2.57$$
$$g_7 = \frac{\pi}{4} \left( \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right)^2 = 2.29$$

である。従つてこの特別な例では、

$$g_{10} = g_1 = g_8 < g_7 = g_5 = g_9 < g$$

となる。

これらの方法については次章で更に幾つかの説明を手えることにする。

### Ⅷ 数値例 (Numerical illustrations)

ここでは上に示した方法を6つの異なる凸領域(即ち“卵形”)に適用することにする。

この領域はそれらの支持線函数 (Supporting function, 概語で“Stützfunktion”) によつて定義される。即ち領域内の固定された点から、周囲の曲線に対して色々な傾斜で下した直線の長さを与える函数  $p(\nu)$  によつて定義されるのである。

Fig. 4 を見よ。検討した曲線は次のものである。

a) 
$$p(\nu) = \sqrt{100 \cos^2 \nu + 64 \sin^2 \nu}$$

これは Viviani が 1924 年に数値例を手えるために用いた短径長径の  $\frac{4}{5}$  がそれぞれ 8 および 10 の楕円である。

b) 
$$p(\nu) = 9 + \cos 2\nu$$

この図形は a) と非常によく似ていて、これの最大直径と最小直径は a) と同じである。

c) 
$$p(\nu) = 16 + \cos 2\nu + \cos 3\nu$$

d) 
$$p(\nu) = 32 + 2 \cos 2\nu + \cos 3\nu + \cos 4\nu$$

この二つは“卵形”をしており、異なる離心率をもつ二つの半楕円から合成される曲線に似ている。

e) 
$$p(\nu) = 35 + 2 \cos 2\nu + 2 \sin 4\nu$$

Fig. 4 凸領域の支持線函数

これは“角をまるめた変形”ということができる。最大直径と最小直径は直角には交わらない。

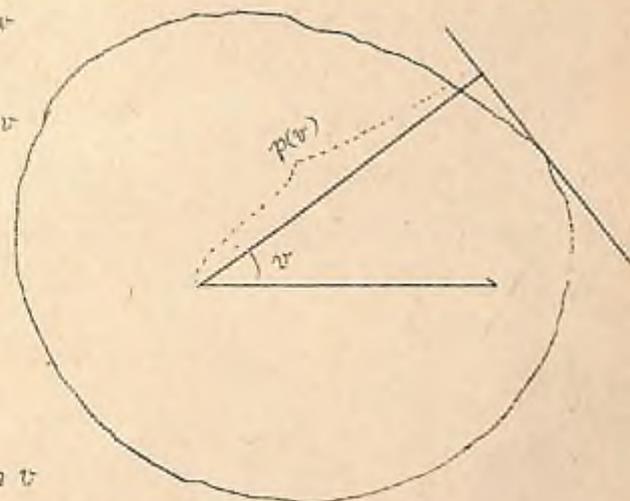
f) 
$$p(\nu) = 16 + \cos 4\nu$$

これは“角をまるめた正方形”のような形をしている。正方形と同じく最大直径と最小直径は  $45^\circ$  で交わる。

これらの6つの曲線を Fig. 5 に示す。

これらの曲線の他の特性を更にオノ表にかかげる。この表には簡単な方法で推定した面積も一語に載せてある。

上にあげた6つの場合は単なる例にすぎないから、オノ表から一般的な結論を導びくことはできない。しかしこれらの例においては、Ch. II (周囲測定,  $g_0$ ) および Ch. V (ランダムな直径  $g_1, \dots, g_4$ ) の方法は、Ch. VII (最大および最小直径,  $g_5, \dots, g_{10}$ ) の各方法より安定した結果を手えることが観察される。オノ表の Ch. V の方法に関する数値は、可能なすべての方向で繰戻測定した直径全係についての“数学的期待値”であるこ



とを忘れてはならない。

この表には、Orbiform の場合は含まれていない。その理由は、それか必ずしも凸図形の面積の良好な推定値を手えるということではないか。この場合には、ノズ通りの方はすべて同等となるからである。

上記の定義から見られる通り、例  $e \sim f$  の函数  $\varphi(x)$  は三角函数の和となっている。附録の §3 において、我々は任意の閉じた凸曲線の支持線函数がこの形の和で近似的に表示できることを証明するであろう。

ここで、上記の 6 例を用いて、幾つかの推定方法に関する相出誤差 (Sampling error) を説明してみよう。

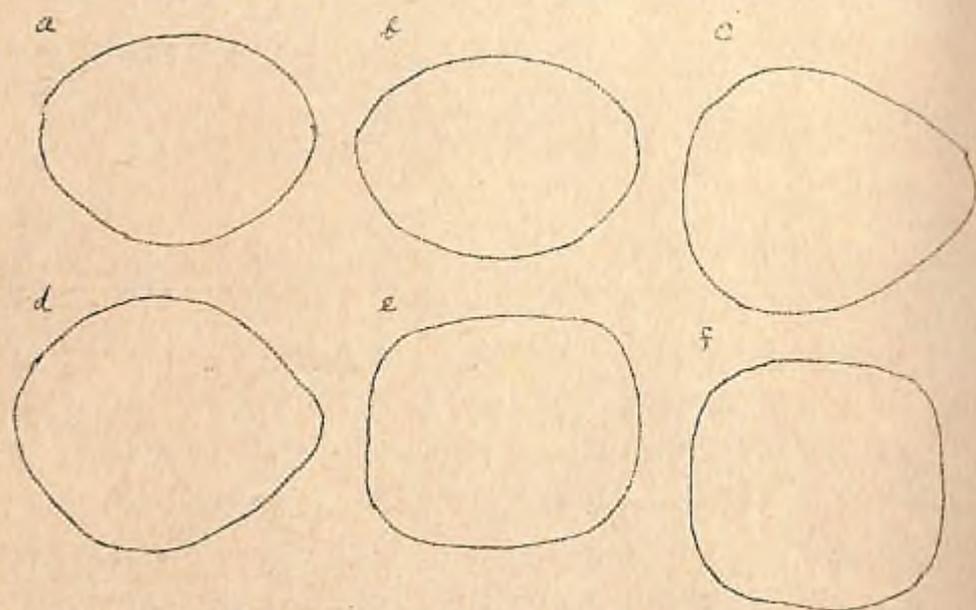


Fig 5 凸領域の 6 つの例

オノ表 凸領域の 6 つの例、領域の特徴、種々方法による面積推定値

例	a	b	c	d	e	f
変動係数 (100%)	2.92	2.96	4.42	2.94	5.71	4.42
最小直径 / 最大直径	0.800	0.800	0.582	0.877	0.817	0.592
異なる二直径間の相関係数 (r)	-0.9935	-1.0000	-1.0000	-0.6200	0.0000	1.0000
真の面積を 1000 で表わしたときの推定値の誤差						
$g_0 (= g_4)$	1019	1019	1022	1017	1030	1030
$g_1$	1025	1025	1024	1020	1034	1032
$g_2$	1019	1019	1022	1018	1032	1032
$g_3$	1013	1013	1020	1016	1030	1032
$g_5$	1012	1019	1022	1066	1030	1030
$g_6$	1000	1006	1018	1061	1026	1026
$g_7$	1012	1019	1022	1032	1146	1163
$g_8$	1000	1006	1018	1078	1144	1163
$g_9$	1012	1019	1022	986	921	905
$g_{10}$	1000	1006	1018	985	917	905
最大の値が得られる方法	1	1	1	7	7	7, 8
最小の値が得られる方法	6, 8, 10	6, 8, 10	6, 8, 10	10	10	9, 10

これらの誤差は、測定されるべき直径の方向をランダムに選ぶ方法の場合に現われるものである。従ってこれらは Ch. V の方法のみを生ずるもので、周囲測定 (Ch. II) および最大・最小直径を測定する方法 (Ch. VI) はこの誤差と無関係である。

もし凸包が Orbiform (Ch. IV) なら相出誤差がないことは明らかである。何故ならこの場合にはどのようにして最大測定を行っても  $D_0$  の値が得られるからである。

我々は相出誤差の大きさを、色々な面積推定値の標準誤差 (Standard error) によって表わすことにある。Ch. V の 1-4 の推定値の標準誤差をそれぞれ  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$  で表わすことにする。

6つの例に対するこれらの標準誤差の値をオ2表にあげる。

オ1表の数値と比較するため、標準誤差は凸領域の真の面積  $g$  を1000としたときの値で表わしてある。

これらの標準誤差は種々なる方向の直径変動を待数かける二つの量  $\sigma$  および  $\gamma$  に依存することは明白である。Cramér (1945) の着書の § 27.7 に与えられた一般的方法によって求めた次の近似的な関係はオ2表の数値と非常によく一致した値を与えることがわかる。

$$\begin{aligned} \sigma_1/g_0 &\approx 25/100 \\ \sigma_2 &\approx \sigma_3 \approx \sigma_1 \sqrt{\frac{1+\gamma}{2}} \\ \sigma_4 &\approx \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

オ2表 凸領域の6つの例、種々の面積推定値の(真の面積を1000としたときの)標準誤差

例	a	b	c	d	e	f
$\sigma_1$	158	160	90	101	118	91
$\sigma_2$	2	0	0	45	35	91
$\sigma_3$	7	2	1	44	83	91
$\sigma_4$	113	113	64	71	93	64

### VIII ビッテルリッヒの "Winkelzahl" 法

林分胸高断面積を推定する "Winkelzahl" 法はその発明の発見以来非常に注目をおびてきた。(Bitterlich 1948)。Kaen 1950, Grosenbaugh 1952, Seip 1952 参照。

我々はこの方法を土地が平坦な場合に限定して考察してみよう。このとき胸高におけるすべての樹幹断面は同一水平面 H 上にある。この方法を通用する場合、H 内のランダムに選んだ点から覗いて、一定の角  $\alpha$  に再びいかまたはそれより大きい角度に対応するような胸高断面を有する樹幹をすべて数えあげる。この数えあげは数個の標本木について繰返えさえる。

このようにして数えた樹幹本数の平均値に "乗数 (Zahlfaktor)"  $(100 \sin \alpha/2)^2$  を乗ずると林分胸高断面積の推定値が  $h$  当りの  $h^2$  で得られる。  $\alpha$  が小さいときにはこの乗数を  $(50 \alpha)^2$  にとることができる。

この場所から特定の樹幹が  $\alpha$  なる角度で見られる H 内の領域の面積を  $G_\alpha$  とする。我々は  $G_\alpha$  をこの樹幹の胸高断面積を含むように定義する。とらして我

$$g(\alpha) = g_\alpha \sin^2(\alpha/2)$$

を推る。 "Winkelzahl" 法は断面が円なる  $g(\alpha)$  が樹幹の真の胸高断面積  $g$  に等しいという事実を基とするものである。胸高断面が円でないことによって生ずるこの方法の如何なる誤りも、それ自身  $g(\alpha)$  の  $g$  からの偏差となつて現われる。

ここで附録の § 4 で示すように、極限においては  $g(\infty) = g/2$  となる。ここで  $g/2$  はランダムに選んだ一方向で胸高測定を待たつて得られる平均胸高断面である (Ch. V)。  $\alpha$  が小さい場合  $g(\alpha)$  は  $g/2$  に非常に近い値となる。実際の場合  $\alpha$  の大きさは  $10^\circ$  のオーダーであるから、次のような推論が導かれる。

断面の形状が円形でないということに関する限り、"Winkelzahl" 法は、ランダムに選んだ一方向で各樹幹を胸高測定する方法と同様な誤りを与える。 しかしこの誤差は地面が水平であるとして得られたものであることを記憶しなければならぬ。

最後に1953年補出によって提案されたこれと関連する方法は、胸高断面が凸であるという唯一の条件から断面積の不偏推定値を与えることを注意しておく。増出の方法は与えられた凸曲線に平行な曲線の面積に対する Steiner の公式から導かれたものである。(Blaschke 1936, 公式 150, p. 26)。

### IX 測樹学における関連する問題についての注意

(A remark about some related problems in forest mensuration)

樹幹の断面積を計算する際に差着する問題は、断面を“外側から”測定するということから生ずるものである。これを言いかえれば、混乱のもとはいわゆる測定するのか、Ch. IIIの意味における直径であって、半径ではないということである。

凸であろうとなかろうと楕円か、もしその内部の定點かゝり半径で一處に決定され、またこれらの半径を測定することかゝりならこの面積の不偏誤差を減らすことかゝりできる。即ち簡単な式で求めることかゝりできる。ここにランダムな方向での半径の長さである（附録5を参照）。もし幾個所の半径例えば、 $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$  を測定したとすれば、不偏値は

$$\frac{\pi}{4} (Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2)$$

なる形であらう。故にこの式を $\pi r^2$ と替へることにすれば、 $r$ は4つの半径の二乗平均値となる。

この注意は最大の木口断面積の測定値および樹幹投影面積の測定値等にもあてはまる。

### V 要約と結論

植物学で普通に用いられる方法は、樹幹断面の形状が円形であると仮定している。しかし断面は多少とも常に円形とはなっていない。この食い違ひによって断面積の評価に誤差を生ずる。この研究において、著者は幾何学的概念と普遍的な性質を有する定理を適用し、これから樹幹の欠行についての一般的な命題を導こうとした。著者は関連する幾何学の分野に一層進歩している数学者であれば更に豊富かつ深刻な知識を導き得たであろうことを熟知している。

樹幹の輪尺測定とか周圍測定、あるいは、これらと類似の“外側からの”測定法、例えば“ビッテルリッヒ”法による本数の数え上げなどを実行する場合は、単に断面の凸包に含まれるにすぎない。Fig 1 および2を参照。真の断面積は一般にその凸包の面積よりも小で“Convex deficit”を有する。

いわゆる“等周差 (isoperimetric deficit)” とよばれるものは、凸包の面積がこの凸包と同一直径を有する円の面積より小さいことによって生ずるものである。等周差 (isoperimetric deficit) は普通直径がすべての方向で一定であるような場合でさえも生ずるものである。これは円が orbiform 即ち一定直径を有する曲線にすぎないことによる。Fig 3 を見よ。

上述の概念は Ch. I と IV において導入されたものである。Ch.

II, III, V, においては断面積の推定に普通に用いられる方法、例えば周圍測定およびランダムな方向での直径測定による方法を考察した。これらの方法から導かれる面積は凸包の真の面積に比べて、円形の場合を除いて正の偏りを有することかゝりわかつた。凸領域を二つの主要タイプに分類すると、それぞれのタイプについて、偏りの大きさに従って色々な方法に順位をつけることかゝりできる。凸包が“楕円のようなもの”であるような特別な場合を除いて、凸包の面積に対する超過面積に比べて、これらの方法の平均値は互いによく一致している。

最大直径または最小直径、およびこの両者を用いる方法は、これらの断面形に対して与えられる仮定に一層左右され易いという意味で、安定性に欠けているように思われる。これらについては Ch. VI において取扱った。

凸領域の支持線函数 (Fig 4 の  $p(\theta)$ ) を Fourier 級数に展開して、色々な面積推定値間に幾つかの一般的な不等式を導くことかゝりできた。この方法によって更に凸領域を数値的に表現することかゝりできた。Ch. VII の Fig 5 に例をあげたが、これは理論的——及小論議しているが——に円形からの色々なかけ離れを例示したものである。この例はまた、直径測定を行なう方向をランダムに選ぶような方法に対する抽出誤差を説明するのに用いた。

Ch. VIII において取扱ったビッテルリッヒの“Wankelhal”法は胸高断面が円形であるという仮定に従うものである。しかしこの点ではビッテルリッヒの方法は、各樹幹についてランダムに

直径の一方方向で輪尺測定を行なって断面積を推定する方法と同様である。

もし多少とも円に近い領域を幾つかの半径を測定することによって“内側”から観測すれば、“外側”から測定する場合に生ずる偏りを避けることができる。Ch. III 参照

“断面の幾何学”は、測距法の実行を研究するに必要とされる知識の一部のみを与えるにすぎない。断面積のように具体的な量を測定する際には、正確な定義の疑わしさや不完全な指示の影響、あるいは主観的判断による偏り等を克服しなければならない。従って以下の議論は着者の見解を暫定的に表現するにすぎないと考えてほしい。これは我々が高い正確度を必要とする場合には同心をかくだろう。とりようなどときにはこの立場での幾何学が重要な役割を演ずるのである。というのは我々は他の擾乱因子の影響を可能な限り減少しようとするからである。

二つの直径測定から断面積を推定する場合、算術平均を用いても幾何平均を用いても実際にこの重要な差は生じない。

最大および最小直径にもとづく推定値は、実際の樹幹断面形を調べない限りは推定できない。

この幾何学的研究から、輪尺の代りに筒筒巻尺を用いることの影響が与えられる。しかし若くは輪尺の論議には他にも多くの因子を考慮しなければならない。従ってこのような疑問の多い問題について明確な結論を得ようとするのは早計にすぎよう。

ここで論じた誤差の実際の大きさについての知識を得るためには、伐倒木の断面の標本を調べなければならない。観測値は常に正確な方法で求めなければならない。従って測定誤差は樹幹断面の幾何学的性質から生ずる誤差とは分離することができる。Convex deficit, 非同差 (isoperimetric deficit) 直径の分散等の方面から測定を怠れば、断面の幾何学が色々な測距方法の実行にどのような影響を与えるかをよく

1) このような因子についての論議は Tjurin (1929) による基本的な論文をみよ。

理解することができるとある。

快く原稿に目を通され、有益な批判を与えられた Lazo Tjurin 教授および計算をしていただいた Greta Nilsson 嬢、図を複製していただいた Anneliese Neuschel 夫人にも感謝を捧げるものである。最後に英文を訂正していただいた Oxford 大学数学研究所の John T. Lewis 博士にお礼を申し上げる。

附 録

§ 1 閉じた凸領域に対する一般公式

(Some general formulas for a closed convex region)  
原点は有界な閉じた凸領域Cの内点であるものとする。支持線函数 (Line supporting function)  $p(v)$  は Fig. 4 に示した様に定義される。

$p(v)$  が二回微分可能であると仮定すれば、凸 (Convexity) なるための条件は

$$p(v) + p''(v) \geq 0 \quad \text{すべての } v \text{ に対して} \quad (1)$$

C の外周 (Contour) の直交座標について次のパラメーター表示が得られる。

$$x = p(v) \cos v - p'(v) \sin v$$

$$y = p(v) \sin v + p'(v) \cos v$$

v は右方向の直径；

$$D(v) = p(v) + p''(v) \quad (2)$$

C の (平均) 直径 (Ch. III 参照) :

$$D_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D(v) dv = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p(v) dv \quad (3)$$

C の面積 :

$$g = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p^2 - p'^2) dv \quad (4)$$

C の周長 c については Ch. III に参照した Cauchy の公式を用いる。

$$C = \int_0^{2\pi} p(r) d\psi = \int_0^{2\pi} D(\psi) d(\psi) = \pi D_0 \quad (5)$$

Cの直径の分散は

$$\sigma^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (D - D_0)^2 d\psi \quad (6)$$

角 $\psi$ で交わる直径間の相関係数 $Y_x$ は公式

$$\sigma^2 Y_x = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (D(\psi) - D_0) (D(\psi + \alpha) - D_0) d\psi \quad (7)$$

から求められる。

Ch. IIIおよびIVにおいては簡単のために $Y_x/2$ を $Y$ で表わした。

(2)によつて我々は $D_0$ ,  $\sigma^2$ ,  $Y$ を $p(\psi)$ の函数として表わすことができる。

反折線函数についての是れ公式は微分幾何の著作にある。公式(2)-(7)は $p(\psi)$ が有限個の点で不連続でも成立つことを注意しておく。

### §2 閉じた凸領域の例

$p(\psi)$ を周角が $2\pi$ の色々な函数に選ぶことによつて種々の型式の閉じた凸領域が得られる。Ch. IV およびVIIIにおいて我々は

$$p(\psi) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\psi + A_k) \quad (8)$$

なる形の式を用いた。ここで有限個の $a_k$ のみが非零であり、また係数は公式(1)を満足するように選ばれる。

この場合には

$$D(\psi) = 2a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \cos(2k\psi + A_{2k}) \quad (9)$$

が得られる。

もし $a_0$ を除くすべての偶数番目の $a_k$ が0なり、Ch. IIのorbiform が得られる。Fig 3の二つのorbiform およびCは

$$p(\psi) = 10 + \cos 3\psi \quad (36)$$

$$p(\psi) = 32 + \cos(3\psi + \frac{\pi}{4}) \quad (37)$$

なる式で表わされる。

周囲の直交座標は

$$x = a_0 \cos \psi + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \{ (k+1) \cos[(k-1)\psi + A_k] - (k-1) \cos[(k+1)\psi + A_k] \}$$

$$y = a_0 \sin \psi - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \{ (k+1) \sin[(k-1)\psi + A_k] + (k-1) \sin[(k+1)\psi + A_k] \}$$

から得ることが出来る。

(3)-(7)の公式に(8)または(9)を代入すると

$$D_0 = 2a_0 \quad (10)$$

$$g = \pi a_0^2 - \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 - 1) a_k^2 \quad (11)$$

$$C = 2\pi a_0 \quad (12)$$

$$\sigma^2 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}^2 \quad (13)$$

$$\sigma^2 Y_x = 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}^2 \cos(2k\alpha) \quad (14)$$

となる。

従つて $\alpha = \pi/2$ に替へては:

$$Y = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}^2 (-1)^k}{\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}^2} \quad (15)$$

(15)からすべての $\sigma^2 > 0$ に対して、希望する $Y$ の値を具する曲線を依り得ることがわかる。

これらの式をCh. IIおよびVの公式に代入すれば $g_0, \dots, g_n$ を(8)の係数で表わすことができる。

しかしCh. VIの面積極大値は三角方程式を解くことによつてそれぞれの場合について別々に求めなければならぬ。Fig 3の例の場合にはこれらの方程式の解は容易に求まるが、一般の場合には非常に複雑である。

Ch. Vの面積極大値の標準誤差を求めるにはまず規定された面積を三角函数の一次式で表わす。

例としてCh. VIIIの各例についてその方法を用いて我々は

れた面積をとると、それは

$$\pi(9 + \cos 2v)(9 - \cos 2v) = \frac{\pi}{2}(161 - \cos 4v)$$

となる。従って(13)における $\sigma^2$ と同様な方法で導かれる誤差分数 $\sigma^2$ は(9)から導かれる。

楕円の場合 — Ch. VIII の例 — の数値的な取扱いに因する事項は Tijen 1929 を参照せよ。

### § 3 Ch. V の不等式の証明

平面上の任意の有界かつ閉じた凸領域は、面積  $g$ 、周囲  $C$ 、直径分数  $\sigma^2$  および公式 (3) - (5) の左辺に現われる他のすべての特性を、与えられた領域に対応する特性に任意に近くなるようにした凸多角形によって近似することができる。

従って、これらの重を含む凸多角形について成立するような方程式、および不等式は一般の場合にもすべて成立するであろう。

このとき凸多角形では  $p(\alpha)$  は有限個の不連続点を有し、またそれは有界変動である。従ってこの場合公式 (3) - (5) が成立する。更に Jordan の検定 (Titchmarsh 1939, § 13.23) によって、 $p(\alpha)$  は  $\alpha$  と  $\alpha + \pi$  の平均値  $\frac{1}{2}[p(\alpha - 0) + p(\alpha + 0)]$  に収束する Fourier 級数は展開することができる。項別積分によって導かれる  $p(\alpha)$  の Fourier 展開を得る。この展開式を用いると公式 (5) の一つを得るが、この場合には無限級数と見做すものとする。従って

$$\int_0^{2\pi} p(\alpha) \overline{p(\alpha + \alpha)} d\alpha = \int_0^{2\pi} [p(\alpha)]^2 d\alpha$$

などのような積分は Parseval の変換によって級数 (5) の乗数で表わすことかできる。

それ故公式 (4) - (5) は凸多角形に対しても成立す。

(1) (2) (3) および Ch. II の定義  $g_0 = C^2/4\pi$  を用いれば

$$g_0 - \frac{3\pi}{4}\sigma^2 - g = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 - 1) a_k^2 + 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) a_{k+1}^2$$

が得られる。

ここで右辺の式はすべて負にはならない。従って結局 Ch. V

の不等式

$$g_0 \geq g + \frac{3\pi}{4}\sigma^2$$

が得られる。(16)式の等号は Fig 56 の“楕円に似た”曲線に示されるような  $p(\alpha)$  の場合、即ち  $h > 2$  なるすべての  $h$  が 0 となる場合にのみ成立する。

等周差 (isoperimetric deficit)、与えられた最大および最小直径を有する凸領域の面積等に関する各不等式は文献中に見出すことかできる。

Bonnesen & Fenchel 1934, pp. 74 以下, Santaló 1953, pp 37 以下参照せよ。

### § 4. ビツテルリッヒの方法に関する公式

(Formulas for Bitterlich's method)

ビツテルリッヒの方法を研究する場合にまず必要なことは、 $C$  をみたときその角度が  $\alpha$  となるような  $C$  の平面内の面積  $G_\alpha$  を表わす式を求めることである。(Ch. VIII を参見)

それらに対する原点からの垂線が傾斜角  $\alpha$  および  $\pi + \alpha$  であるような二つの切線は座標

$$x = (\frac{1}{\sin \alpha}) (p(v) \sin(v - \alpha) + p(v + \pi - \alpha) \sin v)$$

$$y = (\frac{1}{\sin \alpha}) (p(v) \cos(v - \alpha) + p(v + \pi - \alpha) \cos v)$$

で交わる。従って直接的な計算から

$$G_\alpha = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x y' - y x') d v$$

$$= (\frac{1}{\sin^2 \alpha}) \int_0^{2\pi} p(v) (p(v) \cos \alpha + p(v + \pi - \alpha) \sin \alpha) p'(v + \pi - \alpha) d v \quad (17)$$

この公式によって  $G_\alpha$  には  $C$  の面積も含まれる。

次に我々は Ch. VIII において導入された積

$$g(\alpha) = \sin^2(\frac{\alpha}{2}) \cdot G_\alpha \quad (18)$$

を考える。もし  $C$  が円なら、 $g(\alpha)$  はすべての  $\alpha$  の値に対して  $C$  の面積  $g$  に等しい。一般の場合には幾何学的考察から次の極値値が得られる。

$$g(0) = g', \quad g(\pi) = g \quad (19)$$

ここで  $g_1$  は前と同じランダムな方向で輪尺測定を行なって得た平均値である。  $\alpha$  が  $0$  から  $\pi$  まで動くときの  $g(\alpha)$  の平均値は Crofton の公式から求められる (Santaló, 1953, p. 21 公式 4.6 を参照)。

$$\pi g + \iint (\alpha - \sin \alpha) dx dy = c^2/2 \quad (20)$$

ここで  $\alpha$  は点  $(x, y)$  から  $c$  を見た角度である。積分は  $c$  の外側のすべての点の上でとる。(20) に  $G_\alpha$  を代入すると公式は

$$\pi g + \int_0^\pi (\sin \alpha - \alpha) dG_\alpha = c^2/2$$

と書くことができる。(18) と (19) を用いると

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (\sin \alpha - \alpha) \cdot G_\alpha = g_1 \lim_{\alpha \rightarrow 0} [(\sin \alpha - \alpha) / \sin^2(\alpha/2)] = 0$$

なることがわかる。従って部分積分から

$$\int_0^\pi G (1 - \cos \alpha) d\alpha = c^2/2$$

あるいは

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(\alpha) d\alpha = c^2/2\pi = g_0 \quad (21)$$

ここでは  $g_0$  は周長測定で得られた推定面積である (Ch II)。

公式 (19) および (21) は、 $\alpha$  の函数  $g(\alpha)$  の値についての知識を与えるものである。Fig 6 に  $3b, 5b, 5f$  図の三つの領域に対する  $g(\alpha)$  を示す。Fig 6 からわかるように、 $\alpha$  が小さいとき  $g(\alpha)$  は  $g_1$  より小さくもまた大きくもなる。

$p(\alpha)$  が (8) で与えられるとき  $g(\alpha)$  について

$$g(\alpha) = g_0 + \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \cos \alpha \cdot \cos(k\alpha + k\pi) + k \sin \alpha \cdot \sin(k\alpha + k\pi)}{1 + \cos \alpha} \quad (22)$$

なる式を得る。

微分冗長ではあるが、自明な計算によって、我々は (22) から次の不等式を得ることが出来る。

$$|g(\alpha) - g_0| \leq g_0 - g \quad (23)$$

$$|g(\alpha) - g_1| \leq (g_0 - g) \eta^2(\alpha/2) \quad (24)$$

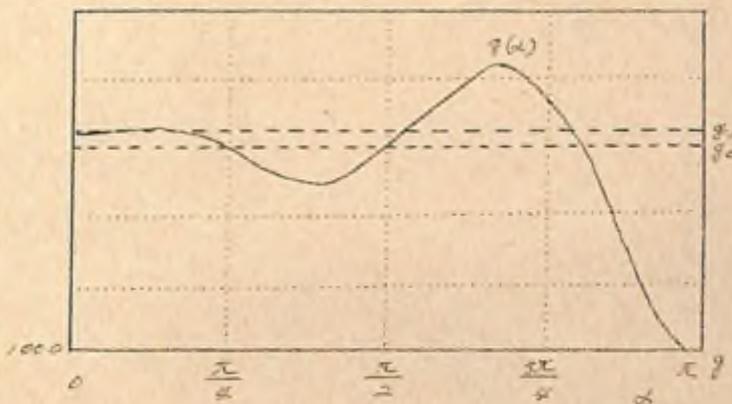
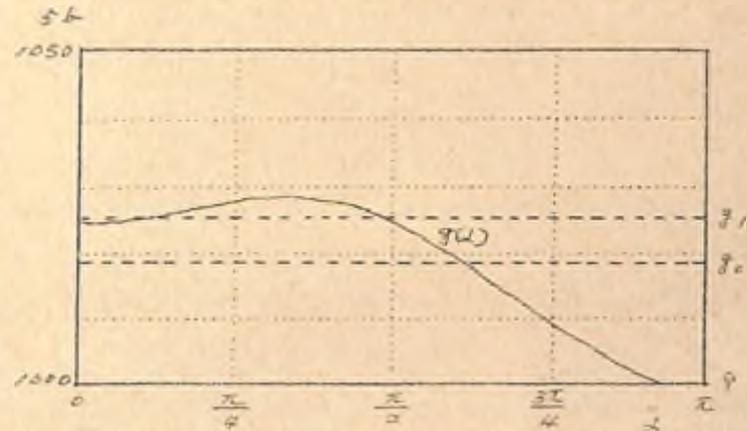
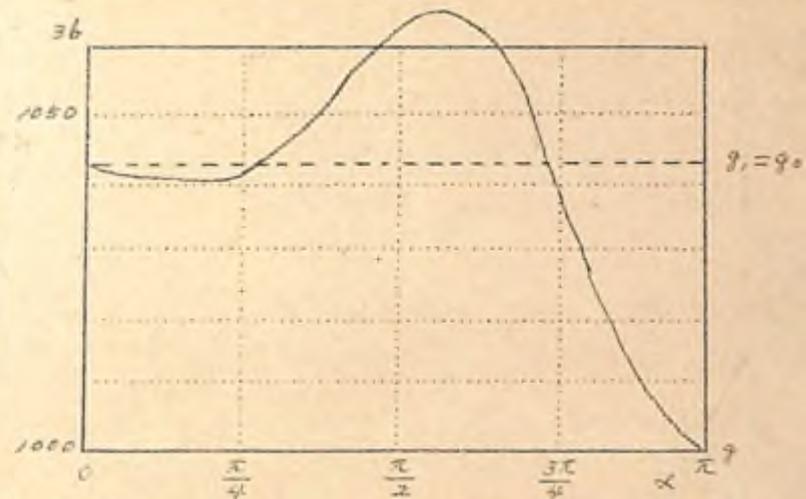


Fig 6 3b, 5b, 5f 図の凸域に対する函数  $g(\alpha)$

(23) 式から、 $g(x)$  は領域  $C$  の実の面積  $g$  より小さくならないことかわかる。実際に用いられるような小さい  $x$  については、  
 (24) から  $g(x)$  は Ch. VIII を述べたように  $g_1$  に非常に近いことかわかる。

§ 5 “内側から”の面積測定

(Measuring the area “from the inside”)

Ch. IX の説明は領域の面積についての極座標で表わされた公式の直接の結果である。

原点が有界な領域  $C$  の内点であるものとし、更にすべての  $\theta$  について、 $r$  なる方向の半径が、原点から  $r(\theta)$  なる距離にある一点で領域の境界と交わるものとする。このとき領域の面積は積分学の書物にみられる通り

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2(\theta) d\theta$$

である。これを言葉でいうと、領域の面積は、半径の“二乗平均”を二乗し (Square “quadratic mean” of radii) 2 をかけたものに等しいということである。

References

Assmann, E., 1956: Wie kann der Grundflächenzuwachs auf Dauer-Versuchsflächen genauer bestimmt werden? - Paper presented at the 12th Congress of the International Union of Forest Research Organizations, Oxford 1956.

Bitterlich, W., 1948: Die Winkeljählprobe. - Allgemeine Forst- und Holzwirtschaftliche Zeitung, 59: 4-5.

Blaschke, W., 1920: Kreis und Kugel. - Leipzig.

— 1936: Vorlesungen über Integralgeometrie. I. Zweite Aufl. - Hamburg.

Bonnesen, T. & Fenchel, W., 1934: Theorie der konvexen Körper. - Berlin. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, III: I)

Bachheim, W., 1938: Klappung und Kreisform des Stammquerschnittes. Über Stammquerschnitte gleicher Breite in allen Richtungen. - Zeitschrift für Forst- und Jagdwesen, 70: 556-658.

Chaturvedi, M. D., 1926: Measurements of the cubical contents of forest crops. - Oxford Forestry Memoirs, 4.

Cramér, H., 1945: Mathematical methods of statistics. - Uppsala.

Grosenbaugh, L. R., 1952: Plotless timber estimates. New, fast, easy. - Journal of Forestry, 50: 32-37.

Heikkilä, T., 1927: Über die Ermittlung der Querfläche eines Stammes. - Acta forestali fennica, 32: 3.

forestalia fennica, 32: 3.

Keen, E. A., 1950: The relascope. - Empire Forestry Review, 29: 253-264.

Maanyama, M., 1953: A rapid method of estimating

basal area in timber survey - an application of integral geometry to areal sampling problems. - *Sankhyā*, The Indian Journal of Statistics, 12: 291-302.

Matsuda, K., et al., 1955: Some problems of sampling in the forest survey. - *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Tokyo, 7: 1-23.

Müller, D., 1915: *Lehrbuch der Holzmesskunde*, Zweite Aufl. - Berlin.

Santaló, L. A., 1953: *Introduction to integral geometry*. - Paris. (Actualités scientifiques et industrielles, 1959.)

Seig, H. K., 1932: Relasogut. - *Tidsskrift for Skogvækst*, 60: 22-26.

Stoffels, A., 1948: De berekening van het totale grondvlak, --- (The determination of the total basal area ---) - *Nederlandsch Bosbouw - Tijdschrift*, 20: 371-381, 382-388.

Steubecker, K., 1955: *Differentialgeometrie. I. Kurventheorie der Ebene und des Raumes*. - Berlin. (Sammlung Grötsch, Band 1113/1113 a.)

Tärray, G., 1920: *Sur les courbes orbiformes. Leur utilisation en mécanique*. - *Tōhoku Mathematical Journal*, 18: 90-115.

Tizón, L., 1929: *Über Grundflächenberechnung und ihre Genauigkeit*. - *Meddelanden från Statens skogsforsöksanstalt*, 25: 5.

Tischendorf, W., 1927: *Lehrbuch der Holzmassenermittlung*. Berlin.

— 1943 a: *Über Gestyrigkeit und Ursache der Exzentrizität von Baumquerschnitten*. - *Centralblatt für das gesamte Forstwesen*, 69: 33-34.

— 1943 b: *Der Einfluss der Exzentrizität der Schaftquerschnitten auf das Messungsergebnis bei Bestandesmassemessungen durch Klappung*. - *Centralblatt für das gesamte Forstwesen*, 69: 87-94.

Titchmarsh, E. C., 1929: *The theory of functions*. Second edition. - Oxford.

(Report of the forest research institute of Sweden Vol 46) (no. 11 5); 52

インドネシアにおけるメルクシ松の成長と収穫  
*Growth and Yield of Pinus Merkusii in Indonesia*  
 by J. H. A. Ferguson

*Pinus merkusii* JUNGH. & DE VR. は、北スマトラ固有のものであるが、ジャバ、スマトラを通じて広範囲に植栽されるにいたった。(戦争の影響により完全とは言えないが)、火山の植荒地より得られた資料により、収穫表は、35年まで、同令単純林により5箇の地位級について計算された。3×3mの普通の植栽間隔の平均の地位で、連年平均成長量は、25年の時に最大となり、樹皮を除いて皮内材積 (chick wood volume) を毎ヘクタール22.4立方米 (エーカー当たり320立方フィート) 有する。毎年の生産は、最初の植栽間隔次第であり、2×2mの間隔では、20年の時に毎ヘクタール2.6 m<sup>3</sup> より4×4mの間隔では、25年の時に1.9 m<sup>3</sup> に達する。

### 1. 序 論

*Pinus merkusii* JUNGH & DE VR. は、スマトラ北部の固有のものであって、453 m (英音: 453 m) または、455 m なる俗名によって知られている。20世紀の当初より、この樹種は、*P. khasya* ROYLE, *P. insularis* ENDL. や *P. caribea* MORELET のような種々他々の外国松と一緒に、ジャバ、スマトラにおいて植栽が試みられた。彼等は、多分フロリダが原産であろう。概して、453 m は、よりよい樹幹形とより迅速な成長を示す。1951年から進歩した 453 m *Pinus* は、スマトラ、ジャバ、バリ、ヤ、セレベス島の種々な地方で広範囲に植栽された。数千ヘクタールの松林分は、広葉樹と混交した純栽培地として、荒廃した地帯で産物林と土地保全を兼ねて造成された。この刊行物は、林野庁の造林地帯での二つの主要中心地での調査の結果を取扱う。その中心地は、歴史的にも、地域的にも、北スマ

トラの Toba Lake 地方の Aek ma uli - forest である。海抜高は、約 1,100 m、年降水量約 2,500 mm、若干の乾燥季(60 mm 以下の)は、平均して約 2ヶ月、若干の雨季(100 mm 以上)は約 8 $\frac{1}{2}$  月、Schmidt & Ferguson による葉展型 B である。Lipam は、概して、3x3m の間隔で、単なる穴植で、丈の高い草やシダや灌木を有する荒れ果てた土地に植えられる。最初の年における旺盛な成長は、最小の手入れのみを必要としたが、厳しい防火計画を立てることが義務づけられている。これらの造林の直接の目的は、重要な流域の保護だった、もう一つの調査の中心地は、西ジャバのバンドンの北 Tangkuluan Perahu mountain の南斜面にある Lembang の近くにある。Aek ma uli forest とほぼ同じ葉展型と気候である。Lembang の造林地は、以前は短伐期の *Wassle* (*Acacia decurrens* Walld.) と人工の混交広葉樹林であった。伐期は、Aek ma uli におけるものよりも面積は広くないが、手入れはよくされている。林業研究所による利んどの研究は、この中心地で始まった。もし、何処かの中心地で、十分なパルプ材が生産されるならば、林野庁は、パルプ産業の進歩の望みをもてるだろう。

1952年に、5,000 ha の松林分を有する Toba-Lake 地方や、少なくとも、30,000 ha の可能な地域は、此の目的のために特に良い条件にあると思われる。成長と収穫に関する研究は、早速く、最初の造林地で始め、結局、多数の固定標準地の増加とともに、ますます重要になった。この報告の最初の暫定的収穫表。もう一つの収穫表は、1950年に作られた。その結果は、この報告書の収穫表の地位中と比較される。もう一つの収穫表は1941年に Oosterling により(発表はされなかったが)北スマトラの Atjeh の Pine-balsam 地方で一部は、天然生の復生林分より、一部は、広範囲に散在している盛林地より集められた資料により作られた。この収穫表は林野庁の用材林分より作られた収穫表とは全然比較することはできない。50個の固定標準地の結果は、研究のために利用出来る。これらの多くは、後で述べられる理由で、

あらゆる段階の収穫の研究のために利用出来ない。1949年に、戦後最初の再調査が行なわれ、多くの標準地は、初めて尚伐された。1952年10月と11月に、標準地は、再び測定され、尚伐された。現在十分な資料は——暫定であるかも知れぬが——収穫表に利用出来るだろう。その時までの固定標準地の林分は、

27年生の標準地	1ヶ
23年生の標準地	2ヶ
20年生の標準地	5ヶ
16~17年生の標準地	3ヶ
13~15年生の標準地	11ヶ
10~11年生の標準地	28ヶ

林野庁は、暫定的に30年に輪伐期を決定したので、早くとも35年の林分まで表を拡張することが望ましかった。それ故、いわば、或る外挿法が必要であることは、明らかである。

著者は、この収穫表を作るための業務を遂行することを依頼されたインドネシア林野庁長官と、後者の親切な協力者としての森林計画課と林業研究所の職員に謝意を表したい。

### 利用し得る資料

計算は、次の資料にもとずいた。

1. 林業研究所の50ヶの固定標準地は、次のように識別される。
  - a. Lembang 地方には、32ヶの標準地があり、最も古い標準地は、1932年(1931年に植栽された)と1936年(1924年に植栽された)に始まり、10ヶの標準地は、1935年から1938年までに植栽された林分で1941年に設立された。17ヶの標準地は、1942年に設立された。3ヶは、1949年に設立された。両方とも種々な植栽間隔(“間隔試験”)で、1941年の造林地に設立された。
  - b. 東ジャバにおける4標準地は、1938年から1941年の造林地で、1951年に設立された。

C. *Aek na Uli Forest* の14の標準地のすべては、別に同  
期におかれたか普通3×3mで1928年から1940年に對  
つて、造林地に1952年に設立された。

2. 林野方の計画課によつて、1948年と1949年に実行され  
た *Lembang* や *Aek na Uli forest* における層状毎木調査か  
らの資料だ。帯状地は、10mの広さで、記録は、100m毎に  
とつた。100m毎の単純同令樹木の資料は、別々のカードに  
写された。それらは、標準地の記録に對し、貴重な補足になるこ  
とがわかつた。

戦争や、政治紛争の結果として、その級森林は、正當に取扱わ  
れなかつた。標準地における間伐は、1940年から1949年  
までの間になされたものもあり、なされなかつたものもある。そ  
してそれは、成木の早い木の幼令林にとつては、この10年は、  
むしろ長い期間である。*Lembang* 地帯のすべての標準地で無差別  
な伐採が行なわれた。すべての林木は、常に番号を附せられ、個  
々に記録されているので、多くの場合、林木の成長を考慮したり、  
なくなった林木の枝橋を計算することは、可能であつた。林分は  
けっして被打されなかつたということを符にあげておこう。

### 3. 地位表

最初の仕事は、地位表を作ることであつた。極端に、選定や選  
取でない林分における主林木の樹高成長は、立木度に割割されな  
くて、必然的に、土壌や気候の差によるということが、一般的に  
認識せられる。インドネシアにおける次の一般的な慣例は、林分を  
通じて平均にばらまかれていて、 $n$  当り100本の最も高い木  
の平均樹高である“上層高”は、地位の指標として用いられる。  
すべての標準地上層高や、すべての帯状毎木調査カードよりの上  
層高は、林分に對して四に記入された。あらゆる標準地の連続す  
る期定点は、直線によつて結ばれた。この方法によつて、曲線の  
連続を作ることは可能であり、その各々は、異なる地位級に對す

る上層高の成長傾向と表わしている。この推定は、*Oshorne &*  
*Schmacher* の原理による。或る林分における上層高に對する一般  
的な平均四等曲線が引かれ、樹高の標準偏差が各令改毎に計算さ  
れ、林分を通じて平滑化される。最終的に、種々な地位級の曲線  
は、平滑化された標準偏差に比例して、一般的な平均曲線からそ  
の偏差をとることによつて引かれる。しかしながら、この方法は、  
両端、特に最も低い地位級に對する連年成長量の不規則性を生じ  
やすい。それ故、連年成長量曲線は、再び平滑化され、最初の地  
位曲線は、それに依つて修正される。どのくらいの地位級に令改  
されねばならないかということが必要とされるかも知れない。林  
分は、代期令で、樹高で3mの差があれば、違った地位級の林分  
として一般に認めていざらう。アメリカにおける一般的方法是、  
想定された伐期よりも多少低い林分のところで、10フィートの  
倍數で級を引き、相當する地位の指標としてこれらの樹高を用い  
る。同様な方法は、ジャバチークに對して、*Wolff von Wilffing*  
によつてなされた。*Pinus merkusii* に對しては、我々は、指標  
級令を20年で、級の間の間隔を3mで決定した。その結果、上  
層高の成長曲線は、3mの倍數を20年でおるよりに引かれね  
ばならなかつた。各曲線は、地位級を表わしている。國際的には、  
最初級の地位を最良級と呼ぶことは普通である。しかし、インドネ  
シアでは、最良の地位は、最も高い級字により指摘される。とし  
てオノも地位に、最も低い、誤解を避けるために、地位級は常に  
その指標により、呼ぶのがよいようである。上層高の変動が大き  
いので、アノの地位を分ける必要があつた。平均地位 (IV) は、  
指標27である。一表において知られるようには、低い地位級と、  
悪い地位級の曲線は、大々ⅧとIである。(指標26と18)は、1850  
年に著者によつて設立したものとより幾分違つている。しかしなが  
ら相違は、森林計画課の前の仕事に重大な影響を与えないだろう。

表1. *Pinus merkensii* に対する地位級

林分	地位級						
	1	2	3	4	5	6	7
	地位指数						
	13	21	24	27	30	33	36
	上層高 (meters)						
5	32	46	60	74	86	101	116
6	41	57	73	89	104	122	139
7	50	68	85	104	121	142	161
8	60	79	98	119	138	161	182
9	70	91	111	133	154	189	202
10	80	102	123	147	170	196	220
11	90	113	136	161	185	212	237
12	100	123	148	175	200	227	253
13	110	136	161	188	214	242	268
14	120	147	174	201	229	256	283
15	130	158	186	214	241	270	297
16	140	169	199	226	254	283	311
17	150	180	209	238	266	296	324
18	160	190	220	249	278	308	337
19	170	200	230	260	289	319	349
20	180	210	240	270	300	330	360
21	18.9	21.7	24.7	28.0	31.0	34.0	37.1
22	19.7	22.8	25.8	28.9	32.0	35.0	38.1
23	20.3	23.6	26.6	29.8	32.9	35.9	39.1
24	21.2	24.4	27.4	30.6	33.7	36.8	40.1
25	21.9	25.1	28.1	31.4	34.5	37.6	40.7
26	22.5	25.8	28.8	32.1	35.3	38.4	41.7
27	23.1	26.4	29.5	32.8	36.0	39.2	42.5
28	23.6	27.0	30.1	33.4	36.7	39.9	43.2

林分	地位級						
	1	2	3	4	5	6	7
	19	21	24	27	30	33	36
	上層高 (meters)						
29	24.1	27.5	30.7	34.0	37.3	40.6	43.9
30	24.6	28.0	31.2	34.6	37.9	41.2	44.6
31	25.0	28.4	31.7	35.1	38.5	41.8	45.2
32	25.4	28.8	32.2	35.6	39.0	42.4	45.9
33	25.8	29.2	32.7	36.1	39.5	43.0	46.4
34	26.2	29.6	33.1	36.6	40.0	43.5	47.0
35	26.5	30.0	33.5	37.0	40.5	44.0	47.5

4. 主林分における木数と間伐、間隔

主林分の木数は、年令とともに変化するばかりでなく、更に最初の植栽間隔および、間伐の強さ(度合)によっても変る。インドネシアでは、間伐を相対的間隔 (relative space) "S%" 即ち

$$S = 100 S_m / o_l$$

によって数値的に表わしている。ここで  $o_l$  は林分の上層高で、 $S_m$  は、三角形の位置にあると考えられる林木間の主要距離である。 $S_m$  は、 $h_a$  当りの木数 (N) から

$$S_m = 107.5 / \sqrt{N}$$

のように計算される。上層高のまだ低い幼齢林分においては、Sは高い値を有するが林木が成長するにつれて、Sは減少する。次に劣勢木は、優勢な隣接木に破圧されて枯死する。もし林分を全然間伐しなければ、この枯損は、その後の林分の成長と平衡を保つだろうから相対的な間隔は、最小の値に達するだろう。この発表(1950)で著者は、枯死木や破死木を除いた場合この最小値が、19%になると考えた。しかしながら最近のデータに

よれば、*Pinus merkusii* でもっと狭い間隔の林分が出現するかも知れない。これまで種々の植栽間隔が試みられ、推薦されてきたが、最近の間伐度合に対する意見についてもまた違いがある。この論説に加えられているような、収穫表は、非常に屡々用いられているところの3x3mの植栽間隔にもとずいている。この場合の林分は、かなり良好な外観を呈する。4x4m間隔の林分では、普通曲木や及枝木等の不伐木が生ずる。植栽間隔を狭くするとあまり経済的でないかも知れない。間伐度合に同じくは、収穫表は、林分のSが20%の値に減少する時、何時でもSを25%に戻すように間伐を進行するという仮定にもとずいている。オニの表(オ2, オ5, およびオと表)に、間伐度合と、植栽間隔の違いに対する修正因子を与える。

5. 主林分の平均胸高直径

平均胸高直径は、地上1.30mにおける平均断面積に相当する直径として、標準地で計算される。主林分の平均直径は、間伐の強さに左右される。二つの理由によって、まずオーには、概して小さい林木が伐倒されて大きい林木は残されるといふ事実のためには、間伐されるにつれて平均直径は増加する。オニに、強度間伐に際した林分の直径成長は、弱度の間伐林分の直径成長より大きい。一般に収穫研究のための固定標準地は、特定の原則あるいは一定の方式に従って間伐される。このような場合、平滑化された直径成長曲線は、直接、標準地の直径と対応させる。全く経験的な方法で見いだされる。もし、種々の間伐方式が通用されるならば、収穫表はどの各々に対して作ることもできる。この一般的規則に反して、我々の標準地の多くは、あらかじめ決定された方式によらず、むしろ任意に間伐された。それ等の大部分は、*Section 2* に述べられているように、幾分無断的な伐採が加えられていた。種々の標準地は、1952年に一度だけ間伐された。現段階の研究に適応する標準地を造れば結局2/1標準地となるが、その中、6ヶ所は、それぞれ1948/49と1952

年の二回にわたって間伐され、その他は、1952年に、一度だけ間伐された。これは、すべて多少定期的に間伐された林分に加工していて3ヶ組の資料と供給する。しかしながら、間伐度合は、24%から28%にわたっている。この資料から、主林分の平均直径の間伐後の相対的間隔(S%)と上層高に対する重回帰を決定した。関式方法が適用された。直径-上層高の偏回帰は、資料が併べられたかぎりにおいては直線的であった。老齢林分における上層高の増加は、直径成長よりも早くおとろえることが予想されるか。我々の資料では、このことは、まだ現われていなかった。殆んどどの樹種でも、直線的傾向のあるのは、直径対林分の回帰である。必然的に、直径対樹高の回帰は、凸状である。しかし、松では、直径と、樹高の間の直線的関係は不規則でない。例えば *Wiedemann (1950)* を見よ。最終間伐後の相対的間隔に対する直径の偏回帰は、回線的であることがわかった。この方法を適用すれば、理論的間伐強度に対する収穫表を作成することが可能である。この強さは、丁度25%に決められた。これは、経験的な平均とそう大きく違っていない。

表2

種々の間伐度に対する主林分直径の修正

間伐後の相対的間隔 S%	21%	22%	23%	24%	25%	26%	27%	28%
直径に対する修正 $C_m$	-1.4	-1.2	-0.9	-0.5	0	+0.6	+1.7	+2.9

種々の間伐度合に対する修正は、表2から推論される。26%を超えるSの値に対する修正は、もっと低い値のSとは完全には一致しないことが明らかである。これらを用いるときは多少安全度をみた方がよいと思われる。

6. 形 数

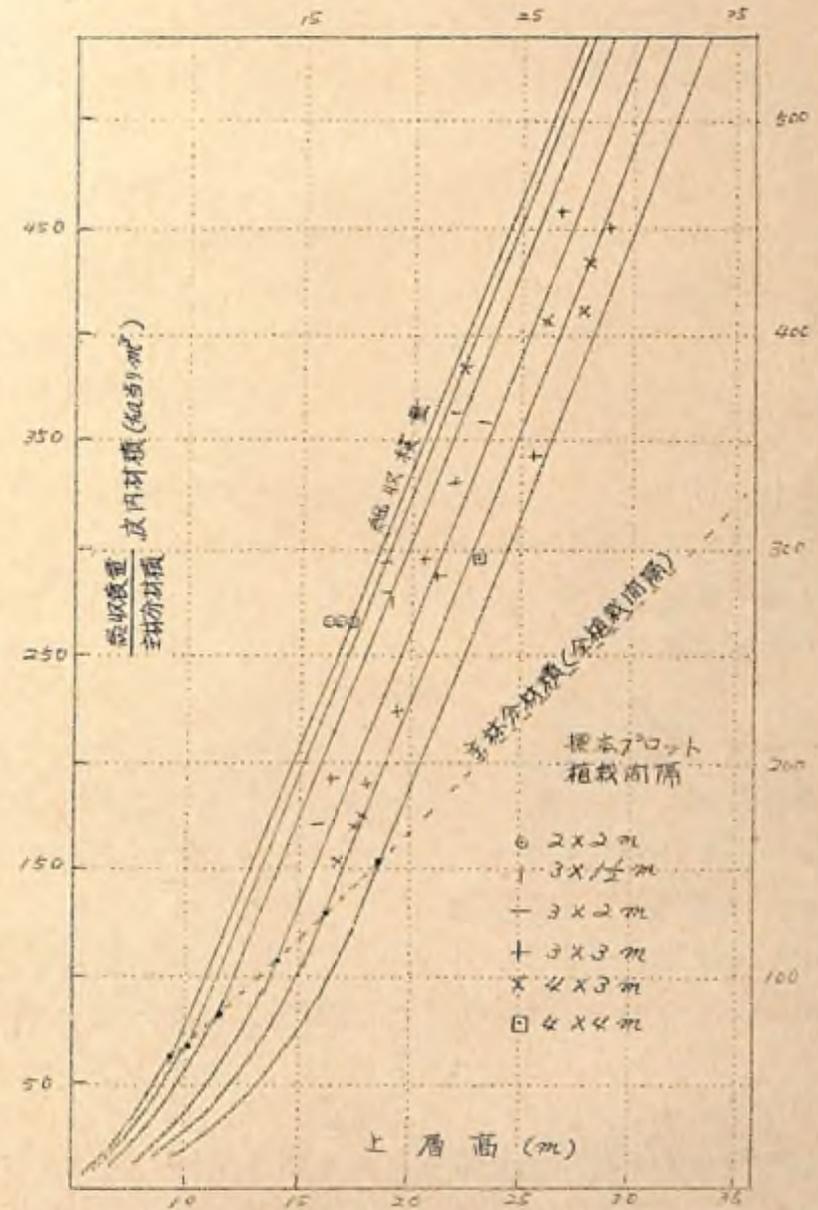
この報告書に加えられた収穫表における材積は、樹皮を除いた主幹(*trunks*)と材積である“皮肉材積(*chickwood volume without*

bark)" 即ち皮付材 以上の全材木の材積と近似する。

*Pinus merkusii* の樹皮材積は、平均して皮付材積の20%より幾分多い目であるが、これは、大部分の樹皮のものより多い。この厚い皮のためにこれらの松は、山火事にあえることが出来る。林木の形数は、樹高と断面積の積で、材積を割った向である。(断面積は、地上1.30mの胸高における幹の横断面積である)。林分の総材積を、平均樹高と総断面積(断面積の合計)の積で割ったものは“林分形数”と呼ばれる。皮内材積より誘導された形数の一般的傾向は、最初、樹高の伸びとともに大きくなり、最大値に達してから、樹高の増加とともに再びゆっくり減少する。この傾向は、よく知られているように理論的に説明することから出来る。それ故、上層高は、収穫表作成のみならず、このものに対する林分形数の曲線回帰を見出すには必要ならなかった。しかし、我々の困難は、材積測定を行った全標草地の上層高が15mと20mの間に分布していたということである。それ故、収穫表は、より小さい上層高のみならず、より大きい値(約40mまで)に対しても外挿しなければならなかった。幸い、特に大きな値では、形数がむしろ一定になるので、大きい危険はない。低い値の場合には、より多くの困難があるが、しかし、この場合にも対応する林積がそれほど大きくないから、総収穫量には大きく影響しない。収穫表を完成されている他の何種類かの松および木松表の *lejum* マツの材積と樹形に関する研究の結果とを比較すると、Table 3 のようになる。我々は、すべてをひっくり返した平均的形数 0.34 の代りに、全然経験的でないこの回帰を用いることにする。

表3 上層高(一部省略)の如何による皮内材積に対する林分形数

上層高	6	7	8	10	15	20	30	40
形数	0.30	0.336	0.343	0.354	0.349	0.343	0.334	0.338



種々の植栽間隔に対する総収穫量の回帰と上層高についての平均材積。一歩挿するには上層高が1m増すごとに総収穫量は2.26 m<sup>3</sup>を加える。

7. 主林分の総断面積と枚積

総断面積は、林分の平均直径と本数の函数である。而して計算された後(4項、5項)主林分の総断面積を、平方メートル単位で計算した。主林分の枚積は、総断面積、平均樹高および林分形数の積である。平均樹高は、上層高に対する単純回帰から導かれ、これによつて主林木枚積と上層高の関係を、直ちに計算される。この関係は、殆んど直線で、図に(点線)示されている。枚積には林分が丁度間伐されたと仮定して、この年の相対的間隔に対する主林木の総断面積と枚積の両方が与えられている。もし、色別の間伐の方法を用いなければならぬとき、例えば、25%を基礎とすると、主林分の断面積と枚積は、他の数値を示すであろう。これらの数値は、表2にかつたような自然林に対する修正を適用して他の5%に対応する本数から導かれる。まだ完全に用いていないで、相対的間隔が25%以上になっている幼齢林においては、断面積および枚積は、上にのべた関係で示されるよりも更に小さい値をとる。これは、次の項で考察することにする。

8. 総収獲量

総枚積は、主林木の枚積と、過去の数々の間伐枚積との合計である。各国で種々の樹種について行なわれた研究から、単純な林分の定数場を扱った収獲量は、枚積があまり極端に濃密にならないように十分頻りに間伐を施した場合には、実際には、間伐量と無関係であることが明らかになった。この結果は予期されなかった。木材の生産は、同化の結果であつて、林冠と根の組合せが日光と土壌を十分利用している限り、この生産は、本数と無関係である。総収獲量の他の特色は、一般的に、これは林分の樹高と直線的相関を示すということである。樹高成長は止つても、直径成長によつて枚積が増加しているような幼齢林分においては、この関係は永続しないが、規制された林分では、この段階に到達する前と以前に、伐採が行なわれるべきである。

固定標準地の収獲量を算定するためには、無説明に間伐された枚積や消滅した林木を推定し考慮することが必要である。これらの枚積が10%以上となるような標準地は、捨てられねばならない。一方では無断一な間伐のために、主林木における研究に不適当なような幾つかの標準地を現在用いることができた。総収獲量は、最初の植栽間隔に非常に大きく影響されることも直ちに明らかとなる。最初の本数が、正常な本数とあまり大きくかけ離れている標準地も、捨てなければならなかつた。正常な造林のための妥当な基準は、85%の相対的間隔に対応する本数である。この標準で使用出来る標準地の数は表4から読みとることができる。

表4. 総収獲量の調査に用いられた標準地の数

植 栽 間 隔 (m)	2x2	3x1.5	3x2	3x3	4x3	4x4
	用いられた固定標準地の数					
<i>demang district</i>	1	2	5	4	7	11
<i>Ashna Uli forest</i>	2	0	0	7	0	0
合 計	3	2	5	11	7	11

4x4の標準地は、他の林分と比較できないので棄却した。樹木は屈曲しかつて多岐であつて林分は全く満足すべき状態にあるとは思われなかつた。それ故、上層高と植栽間隔を相対枚積とし、総収獲量を総枚積とする。固着研究のために設けられたのは28箇の標準地となつた。この数は、おそろしく間隔が曲線であつた及び全く不十分なものであろうが、しかし、項にのべたように、一般的な経験から、直線回帰の全く適当であることが予感された。しかしながら、考慮を要する重要な問題がある。これまでに間伐されなかつた幼齢林分における総収獲量は、現在枚積と同じである。造林地が成長しても相対的間隔が25%以下になるまではこの関係が成立する。それ以後は林分に隠れた間伐枚積が出現することになるか、それにもかかわらず主林分の収獲は前に述べ

た通り、コナダの相対的間隔をもととして、丁度同伐を行ったばかりの時の枝積であると定義されている。植栽間隔が異なれば、25%の相対的間隔に達するまでの上層高は違ってくる。これは表5にそれぞれ場合が計算されている。

a: 植栽間隔, cm

b: 対応する理論的本数

c: 現実本数、即ち、理論的本数の95%

d:  $k_n$  当りの現実本数に対する林木の平均距離

$$(S_m = 1.075 : \sqrt{N})$$

e: 25%の相対的間隔 ( $Oh = 110 S_m : 25$ ) に対応する上層高 (cm) の値

f: その時の枝積

表5 様々な植栽間隔に対する資料

a. 植栽間隔	2x2	3x1.5	3x2	3x3	4x3	4x4
b. 理論的本数	2500	2222	1667	1111	833	625
c. 現実の本数	2125	1988	1420	945	709	521
d. 距離 $S_m$	2.33	2.47	2.75	3.50	4.09	4.66
e. $h = 25\%$ に対する $Oh$	9.3	9.9	13.4	14.0	16.2	18.6
f. 枝積 $W^2$	61	67	82	128	136	154

7歳でのべたように、 $f$  樹の枝積は、上層高と主林分の枝積との関係から誘導された。前述のように、この関係は林分がコナダの相対的間隔を丁度同伐されたという仮定にもとずいている。若い林分における本数は、勿論表5の(c)欄に示されたものと同じである。しかし、上層高は、(e)に示されるより小であるから結局はコナダより大きくなる。このような若い時期での枝積は、当初の本数(c)欄の)と与えられた上層高のコナダの相対的間隔に対応する立木本数との比を用いて、上層高—枝積の回帰—から求めた枝積を修正すれば計算できる。その結果、コナダの相対的間隔に達した時以後は、総収穫量と主林分枝積に対する回帰直線

は相違する。その時までにはこの二つは等しい。これらの時期の枝積および上層高の値を表5の(f)欄と(e)欄に示す。これらの値(コナダ植栽間隔の各々に対するもの)に、はっきりした点としてグラフに表わし、総収穫量の直線に対する起点として用いた。このグラフに、表4でのべたコナダの標準地の総収穫量を対応する上層高の値についてプロットした。植栽距離は、表5で区別してある。下方の直線の曲った部分は、6つ違った植栽間隔に対するまだ適用していない(相対的間隔がコナダを越えている)林分の枝積を示す。点線は、コナダの相対的間隔に対する主林分枝積をすべてこの間隔について一つの直線と表わしている。最後に、6つの急勾配の直線は、各植栽間隔に一つ応の上層高に対する総収穫量の回帰を表わしている。4x4の間隔に対する直線は完全に示すために加えであるが、前にのべたように、これは現実なものではない。総収穫量に対する直線が一般的な方向を、主として4x3と3x3の間隔から導かれた。直線間の間隔は、主林分枝積曲線の“理論的起点”にもとずいている。更に経験的検証を行なうと、もし、“起点”を考慮せずに計算を行えば、直線間の間隔が僅かに変わって、総収穫量がさほど変化することかわかる。この違いは、有意でないことは明らかである。総収穫量は、枝も重要な特徴である。この総収穫量の積戻は、

$$S_{\bar{y} \cdot x} = \frac{\sum (y - y^*)^2}{(n-3)}$$

から計算される推定値の標準誤差によって表わされる。

ここで、 $Y$  は総収穫量の観測値、 $y^*$  は推定値、 $n$  は観測数である。28個の標準地に対するこの標準誤差は  $2.66 \text{ t ha}^{-1}$  である。外挿された値は、勿論、余り確実でない。収穫量、(表4)の総収穫量は、3x3の植栽間隔に対するものである。グラフから読みとった他の植栽間隔に適用すべき修正は表6に示される。

表6. 種々な植栽間隔に対する総収獲量の修正値

植栽間隔 (m)	2x2	3x1.5	3x3	3x3	4x2	4x4
修正値 (m <sup>3</sup> )	+25	+62	+42	0	-25	(-30)

9. 収穫量の最終的仮定

論 察

今まで収集されたデータから、最終的収穫量を推定することが可能である。この論文に記された表7は、5年から30年までの5年間の間隔で、21, 24, 27, 30, 33の樹齢を持つ3つの地位級について仮定された。上層高は、3期でのべた植栽表から誘導された。他の資料は、上層高に関する同僚から提供されたかまたは計算された。間伐材積累計は総収穫量と主林分収穫力基として計算されたから最近5ヶ年間の間伐材積は、二つの連続した間伐材積累計の差である。平均連年成長量は、総収穫量を株数で除して得られる。最後に表8に、3つの植栽間隔に対する平均連年成長量と総収穫量をまとめている。上層高が30mを超える林分に関するすべての資料は、外挿法から得られたものであることを再び強調していかねばならない。従って正常な条件で使用されねばならない。この理由のために、これらの表は、暫定的な表と考へねばならない。しかし、主要な項目、すなわち総収穫量と平均連年成長量とは上層高に対する同僚同僚によつて再び検定されたものであつて、一般的な経験により、或る経済的な輪伐期にまで有効であるといふことが確信できるのである。

表7. 表内 Thichwood - Volume の収穫表 植栽間隔 3 x 3 m  
25%の相対的間隔における間伐

樹齢	Upper height m.	主 林 分					枝 積			
		本数 株/ha	平均直径 cm	平均樹高 m	断面積 m <sup>2</sup> /ha	材積 m <sup>3</sup> /ha	間伐材積 m <sup>3</sup> /ha	間伐材積累計 m <sup>3</sup> /ha	総収穫量 m <sup>3</sup> /ha	平均連年成長量 m <sup>3</sup> /ha
地位級 2 - 地位指数 21										
5	21	245	6.3	8.0	12	0	-	-	-	-
10	16.2	245	12.6	9.0	118	37	-	-	37	3.7
15	15.1	240	20.9	14.3	264	121	28	28	154	10.3
20	21.9	217	23.6	17.4	264	178	53	111	229	11.4
25	28.1	223	24.6	23.5	226	219	16	177	396	15.9
30	28.0	236	28.9	26.4	23.1	248	46	223	471	15.7
35	26.0	215	41.9	24.5	23.3	270	30	253	523	14.9
地位級 3 - 地位指数 24										
5	20	245	6.4	5.1	3.0	0	-	-	-	-
10	12.3	245	15.7	11.0	18.3	71	-	-	71	5.1
15	13.6	233	20.0	13.0	26.3	154	23	23	277	18.1
20	24.0	221	32.0	22.2	22.4	203	86	159	367	13.4
25	28.1	234	34.1	26.5	23.1	249	66	225	434	13.9
30	21.2	189	43.7	23.8	23.4	233	46	271	524	17.5
35	23.5	165	47.1	22.3	23.7	209	34	305	614	17.5
地位級 4 - 地位指数 27										
5	24	245	3.2	6.4	3.5	11	-	-	11	2.2
10	14.7	257	12.2	12.2	25.1	115	10	10	125	12.5
15	24.4	403	23.1	13.3	26.3	192	107	117	299	13.9
20	22.0	253	37.5	25.4	23.9	233	40	207	445	22.2
25	21.4	187	44.0	20.0	23.4	236	66	273	559	22.4
30	24.6	154	48.7	23.5	23.7	322	48	321	643	21.4
35	22.0	135	52.3	24.0	24.0	307	35	356	715	20.1

林 令	Type- light on	主 株 办				栽 種					
		本 数 (株)	平均 直径 cm	平均 樹高 m	总 断 面积 m <sup>2</sup>	株 数	间 伐 株 数	株 高 m	断 面积 m <sup>2</sup>	总 断 面积 m <sup>2</sup>	平均 直径 cm
地位 級 5 - 地位 指数 30											
5	8.6	445	10.2	25	37	21	-	-	20	10	10
10	15.6	637	12.7	124	13.8	125	47	49	105	12.1	12.1
15	24.1	718	13.2	225	17.5	167	114	111	154	14.9	14.9
20	31.0	215	14.7	235	13.3	270	24	270	623	16.2	16.2
25	14.5	155	13.6	324	20.7	321	56	217	640	15.6	15.6
30	32.7	127	13.6	332	28.0	360	47	313	707	16.3	16.3
35	20.5	113	12.4	204	24.2	317	37	287	776	15.9	15.9
地位 級 6 - 地位 指数 33											
5	10.1	843	12.4	37	114	36	-	-	26	12	12
10	12.6	481	14.3	10.0	16.6	164	87	37	253	12.3	12.3
15	22.0	253	15.4	25.4	22.3	232	117	267	445	13.7	13.7
20	35.0	170	16.3	31.7	22.6	302	41	292	601	14.0	14.0
25	27.6	131	13.1	36.9	22.7	356	17	345	721	14.1	14.1
30	41.2	107	13.6	41.1	22.2	377	52	417	810	14.1	14.1
35	24.0	95	12.6	44.0	22.4	427	41	468	837	14.1	14.1

表 8 根及在根枝同所における断収獲量 (P) と平均直径成長量 (A.A.I) (40.90 m<sup>2</sup>)

林 令	地位 級:										
	2		3		4		5		6		
令	地位 指数:										
	21		24		27		30		33		
	P.	A.A.I	P.	A.A.I	P.	A.A.I	P.	A.A.I	P.	A.A.I	
植 栽 間 隔 2 x 2 m											
10	50	7	136	14	200	20	260	26	329	33	
15	229	15	302	20	374	26	445	30	510	34	
20	364	18	442	22	520	26	592	30	676	34	
25	471	19	547	22	624	28	715	29	796	32	
30	546	18	629	21	717	24	803	27	897	30	
35	578	17	687	20	770	22	871	25	962	28	
植 栽 間 隔 3 x 3 m											
10	17	4	71	7	125	12	175	14	223	22	
15	154	10	227	15	297	20	390	25	495	26	
20	289	14	367	18	445	22	523	26	611	28	
25	376	16	474	19	557	22	640	26	721	29	
30	471	16	534	18	613	21	727	24	814	27	
35	523	15	614	18	705	20	796	23	897	25	
植 栽 間 隔 4 x 4 m											
10	21	2	40	4	72	7	114	11	177	16	
15	90	6	154	10	225	15	296	20	371	25	
20	215	11	293	15	397	18	449	22	527	26	
25	322	13	400	16	485	19	566	23	647	28	
30	397	13	480	16	567	19	654	22	740	28	
35	447	13	540	15	621	18	722	21	773	28	

参考文献

Berking, H. J. - 1950 - Schweiz. Zeitschr. Forstw. 101<sup>o</sup>: 191-191.  
 Bottinguy, M. van & A. Govers - 1921 - Tectona 34: 523-578.  
 Brandt's buyo, C., C. Japung & D. Fernandes - 1928 - Meded. Bosbouwpr. 19.  
 Ferguson, J. H. A. - 1950 - Rapport Bosbouwpr. 24.  
 Oosterling, H. - 1942 - Ophoengst-tabellen van het Hars-en Terpoulijzheidsrijf in de Gajdlanden (manuscript).  
 Osborn & Schomacher - 1915 - Jour. Agric. Res. 51.  
 Roeloffs, J. W. - 1930 - Tectona 23: 274-287.  
 Schrade F. H. & J. H. A. Ferguson (editors) - 1951 - Rainfall types based on wet and dry period ratios for Indonesia with Western New Guinea Verhandlungen 42. Djawatar Meteorologi dan Geofisik, Djakarta.  
 Wiedemann, E. - 1950 - Ertragskundliche und waldbauliche Grundlagen der Forstwirtschaft. I

(Communication of the Forest Research Institute)  
 (NR 43 より; 節衆)

Lodgepole Pine の同令林分における  
 部分的伐採の効果  
 The Effect of Partial Cutting in Even-aged  
 Lodgepole Pine Stands  
 Project A. 28  
 by  
 A. W. Blyth

序 論

Lodgepole pine (*Pinus contorta* Dougl var *latifolia* Engelm) は、Alberta の林野面積の殆んど4分の1に生育している。mountain subalpine 地方(5)において、殆んど純林として大面積を占めているが、一方東乃至北の方に行くにしたがって、この樹種はポプラや、black spruce や white spruce やカナダバルサムノキや、時にはカバと混交している。Lodgepole pine の成長が、恐らくその最適の状態に達するのは、この後者の地方であり、元来し得る林分の殆んどが見出されるのも又この地方である。このような分布区域を通じて、マツ林分は違った性格を示す。subalpine 地方か又はその近くでは、本数密度の高いのが常態であり、そうして、他の場所と同じ位の材積収穫があるかも知れないとはいえ、個々の木の直径は、小さいであろう。北方地区においては、林分密度は小さくなる傾向があり、その結果、個々の木は、より早い割合で成長し、より多くの産物が生産される。疎開したマツが常態である地方に、松の伐採が、長年の間集中されてきた。

Edson と Alberta の町は、大半の松が過去において収穫され、現在も収穫されている地方の大体の中心にある。その主産物は、バルブ材、用材(梁にする材、板)、枕木、杭木、電柱用材であり、建築材、構材のような少量の副産物も産する。バルブ材を除いて、実際にはすべての産物は、部分的伐採の或る型によって収穫される。

### 研究の目的

この研究の目的は、残存林分の直径成長、材積成長におよぼす *Lodgepole pine* の部分的伐採の効果を決定的にすることであった。伐採後の更新も、部分的伐採を、赤松林分を永続させるための方法として評価するために研究された。この研究をのべる前に、この報告書でしばしば見られる幾つかの術語を定義する必要がある。これらの術語とその定義は、次のとおりである。

- 部分的伐採：林分の取引可能な部分が除去される伐採。それは普通このような伐採の連続を意味する。
- 原林分：伐採の直前に存在していた林分
- 伐採：伐採期間に除去される原林分の部分
- 残存林分：伐採の直後に存在している林分。原林分から伐採量を減じたものである。
- 現在林分：測定時に存在している林分。残存林分は伐採後経過した期間の純成長量を加えたもの。
- 枯死：伐採以後枯死した残存林分の部分

### 伐採方法

*Alberta* における松林分の初期の伐採は、経済的な直径限界だけで管理されていた。各経営者は、取引可能であり、利益の得られることが経験から判っていたこれらの林木を伐採した。時がたつにつれて、より厳格な管理が、最小樹幹直径限界の形で導入された。この管理方法は、なお、多くの地域において有効であり、経営者は山林局によって定められた、特定の樹幹直径より小さい木を伐採することを許されていない。この最小直径は、個々の林分の状態により10から14インチに変わっている。最近のある種の小丸太作業では、小丸太限の林木だけが伐採され、内部に火傷のおぼろげの小丸太は板材等に製造される。これらの伐採管理の真の効果は、程度之差こそあれ、林分の最大かつ最良の木が伐採され、比較的になが木は、将来の伐採

に備えて残されるということにおいて同じである。*Edson* 地区には、過去40年間に2回、3回或は4回以上も伐採された林分が沢山ある。

### 林分の特性

標本調査は、主として松の純林で、1回だけ部分伐採された林分に限定された。偶々林冠の一部を構成するトウヒと一緒にあって *black spruce* や *white spruce* のまばらな下木が時々出現している。大部分の林地には、ハコヤナギ、黒ポプラ、カバが林冠に表われている。標本調査林分は、12年から30年前、平均22年の経過期間で伐採されていた。

表 1

伐採後の経過年数による標本の分布

伐採後の経過年数	標本数
11 ~ 15	4
16 ~ 20	13
21 ~ 25	18
26 ~ 30	10
	45

伐期令は、可能な時は何時でも、山林局の記録から決定された。伐倒木に傷をつけたり、個々のトウヒについて伐採後に成長をした輪生枝の数を数えることによって吟味された。幾らかは、用材や建築用材として伐採されたが、この林地の大半は枕木として切り出された。伐採時の林分の平均林令は84年であった。伐採時林令範囲のかなり狭いことは2表から分る。即ち、標本の80%が80年と90年の令限に入っている。

表 2

伐採時の林令による標本の分布

伐採時における林分の令限	標本数
50	1
60	1
70	3
80	18
90	18
100	3
110	1

原林分が復元された時の最も著しい特徴の一つは、立木密度が低いということである。

Ackerman (1) は、Alberta の B 19 地区のアカマツ収穫表を調製した際、80年と90年の令限における平均本数は、それぞれ1030と925であることを発見した。この研究でとった45標本の伐採前の平均本数は、84年の平均林令で330本であった。Ackerman の収穫表の資料と、この計画に対して収集した資料の平均値との完全な比較は、表3に示してある。

表 3

収穫表の資料と伐採前の林分の資料の平均値との比較

	収穫表	標本の平均
林 令	84	84
本 数	988	330
断 面 積	159	95.2
合計幹材積(立方フィート)	4271	2805
平均直径	5.5	7.3

この比較は、収穫表の平均地位と比較される標本の地位との差のために、必ずしも正しくはないであろう。しかしながら、最も重要な相違は、標本の平均直径が大きいことであり、経営者がこの林分

に関心をもたしたものは、此の因子である。収穫表によれば、普通の状態では、平均直径7.3インチに達するには、125年かかるだろう。標本の本数が少ないのは、幼令時に取引可能な木材が生産されたためである、と考えられる。

### 調 査 資 料

大きさ2.4エーカーの総計45個の標本プロットが、定められた。これらの大部分は、2 chain 平方メートルであったが、条件がこのような大きさを許さないときには、1 chain x 4 chain のプロットが用いられた。各々のプロットは、4つの等しい大きさのプロットに細分され、各プロットの毎木直径が、別々に記録された。各プロットにおける各直径限で記録された最初の木は、成長量および樹高測定木として印がつけられ、各標準地で最小25本の林木がこのような印をつけられた。

樹高における成長量調査は、成長量測定木毎に行なわれ、半径は伐採時と一期間を5年とし、伐採前は4期間前まで、伐採後5年間毎について記録された。現在の半径や直径も又記録された。単木の樹高は、地形測量用の頭と Abney の hand level を用いて測られた。更新樹は、標準地ごとに2つの帯状地に組合わされた 40 milacre の quadrat で記録された。地表植生、湿度や土壌に関する簡潔な説明も又、プロットごとに記載された。

伐採後に生じた枯損の推定がなされ、枯損木は直径級別に記録された。この推定値は、伐採跡のものと同連させた倒木の状態および伐跡の「クサレ」と枯死木の「クサレ」の程度の比較によるものである。

### 結 果

#### 直 径 成 長

この研究の主な目的の一つは、若し、残存したマツが、部分的に伐採される時に解放に答えて、成長するかどうかを発見すること

あった。伐採による成長の割合は、残存林分の或る密度の測定値と関係づけ得ると期待された。これらの伐採前の松林分は、疎林であったので、林木の大部分は特定の地位に対する最大限、或は、その近い成長率で成長していた。しかしながら小径級の林木は、適度に被圧されており、そして林分が部分伐採された時に、直径成長が促進される形で解放されることが期待された。表4は、伐採前後の5年間毎の林木の直径を示す。資料は、伐採時の直径で分類されている。

表 4

Lodgepole pine の残存木に対する直径予測表

伐採時におけるインチ単位の直径	伐採前後5年間隔のインチ単位の直径										
	-20	-15	-10	-5	伐採	+5	+10	+15	+20	+25	+30
2	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.5	2.7	2.9	3.0
3	2.1	2.3	2.4	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.2
4	3.0	3.3	3.5	3.8	4.0	4.2	4.5	4.7	4.9	5.2	5.4
5	3.9	4.2	4.5	4.7	5.0	5.3	5.5	5.8	6.1	6.3	6.6
6	4.8	5.1	5.4	5.7	6.0	6.3	6.6	6.9	7.2	7.5	7.8
7	5.7	6.0	6.4	6.7	7.0	7.3	7.6	8.0	8.3	8.6	8.9
8	6.6	7.0	7.3	7.7	8.0	8.3	8.7	9.0	9.4	9.7	10.1
9	7.5	7.9	8.3	8.7	9.0	9.4	9.7	10.1	10.5	10.8	11.2
10	8.3	8.8	9.2	9.6	10.0	10.4	10.8	11.2	11.6	12.0	12.3
11	9.2	9.7	10.2	10.6	11.0	11.4	11.8	12.2	12.5	12.9	13.3
12	10.1	10.7	11.2	11.6	12.0	12.4	12.8	13.2	13.6	14.0	14.4

伐採後の直径成長には見るべき増加はなく、樹木は、それらが伐採前に示していたのと同様な一定の割合で、成長を続けているだけであることが、表4からはっきりする。解放の効果がないという事実は、標本調査された林分が幼齢であるという点からいって、不思議である。残存木について3つの近い材積級別に成長表を作る試み

なされた。しかし、直径成長と此の材積成長の変化の間には、相関はなかった。残存林分の密度指標級で資料を分類した時にも、同様な否定的な結果が得られた。単木間の直径成長の一様性を検定をするために、推定値の標準誤差は、伐採後10年、20年、30年のインチ級について計算された。その結果は、表5で与えられる。

表 5

10年 20年 30年について試みられた胸高直径フィンの残存林木の推定値の標準誤差

伐採後の年数	推定値の標準誤差
10	± .40 (インチ)
20	± .75
30	± 1.32

5表の資料は、時の経過とともに誤差は増加するが、伐採後の或る時点における直径は、かなり正確に推定できるということを示すのに役立つ。フィングラスは、残存林分の平均直径に近い数に、試験されたのである。

### 材積成長

共通度数直径成長図表(8)が、各標準地ごとに作られ、伐採時における現在林分の直径分布が決定された。現在林分の材積と将来の林分の材積が、それから計算され、将来林分材積から現在林分材積を差引いて、粗成長量が標準地ごとに求められた。伐採後の経過年数によって、粗成長量を割ると、伐採後の平均連年粗成長量が得られる。次に伐採後の枯死木の推定材積が、各標準地ごとに計算された。平均連年枯損量が決定された。平均連年粗成長量からこの数字を差引くと、伐採後の平均連年純成長量が得られる。粗成長量と純成長量を用いて、種々な関係が検定された。最初に粗連年成長量が、現在生育している林木の残存材積に対してプロットされた(オノ図

を見よ) 直線関係が示され、最小自乗法を用いて、図のような線が引かれる。同様に、粗連年成長量と純連年成長量は、残存材積に対してプロットされ、その残存材積は、現在林分の残存材積に、枯損量を加えたものに等しい) 回帰直線が引かれた。(才又図を見よ) 才又図、才又図の曲線に対する推定値の標準偏差、標準誤差、相関係数は、表6で与えられる。

表 6

回 帰	標準偏差 (立方フィート)	推定値の標準誤差 (立方フィート)	相 関 係 数
現在生育している林木の残存材積の粗連年成長量(才又図)	± 15.30	± 12.17	.618
残存材積に対する粗連年成長量(才又図)	± 15.30	± 13.49	.489
残存材積に対する純連年成長量(才又図)	± 20.31	± 20.22	.175

表6は、残存材積と純成長量の間の相関は極めて小さく、データを通る回帰直線は、その推定値の標準誤差が、標準偏差に比べ余り小さくならないことを示す。残存材積に対してプロットされた粗成長量は、1%水準で有意な相関を示すが、純成長量を得るために枯損量を導入すると、この相関は事実上壊される。才又図の粗成長量曲線と純成長量曲線の間の隔りは、ある特定の残存材積に対する連年枯損量を示している。しかし才又図の正確度は、只1回の試験で推定されたから、枯損量には固有の誤差があるから、疑問を生じがちである。又、違った経営者によって伐採された林分では、枯損量は、伐採木の被害量と共に変り、真実の平均の数字を求めることは困難である。しかし枯損量は、最も大きな残存材積を有する林分では増大するという一定の傾向がある。標本調査された林地には、伐採機の極端な根返り(風倒木)の形跡がないということは注目値する。

更 新

表7は、各種の針葉樹別、一般には針葉別に *milacre quadrats* による立木度を示す。胸高で6インチよりも小さい木は、少数の針葉樹は確かに伐採前から成立しているが、更新木として一応分類した) これらは、すべてのデータに対する平均値であり、伐採後22年の平均経過年数をもつ1800の *quadrats* にもとづいている。

表 7

樹種別の *Milacre Quadrats* による立木度

種	立 木 度 %
ロジフ <sup>o</sup> ロバイン	6.6
White spruce	7.6
Black spruce	2.0
全 針 葉 樹	14.6
全 広 葉 樹 材	28.8

マツの更新は、全く不十分なものであり、失敗であると考えなければならぬ。(表7) 同様なことは、すべての針葉樹を一括した時についても言える。広葉樹の数値は、多くの標草地において、伐採後侵入してきたハコヤギは今では直径が1乃至2インチあり、更新樹として記録されなかつたので、非常に控えめな数値である。伐採後に侵入し、現在も或る直径級に現われているマツの更新木は微々たるものである。

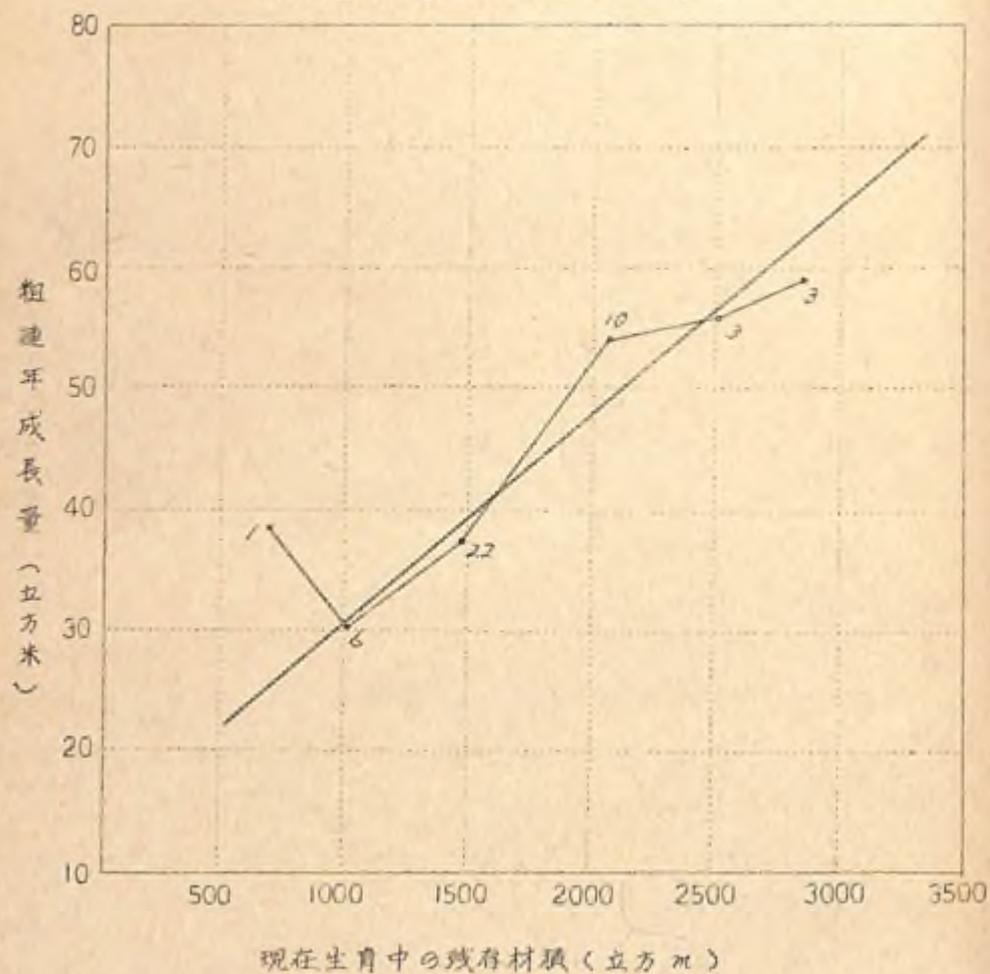
結 果 に 関 する 考 察

部分的伐採の結果、残存林分の直径成長は殆んど、いかなる促進されなかつた。また、立木本数が減少するの故、連年材積成長は、原林分よりも多少少ないであろう。純成長量と、残存材積との間の相関は小さいので、すべての資料が一階にされた、標準地の林分状態別の平均値は、表8に示してある。

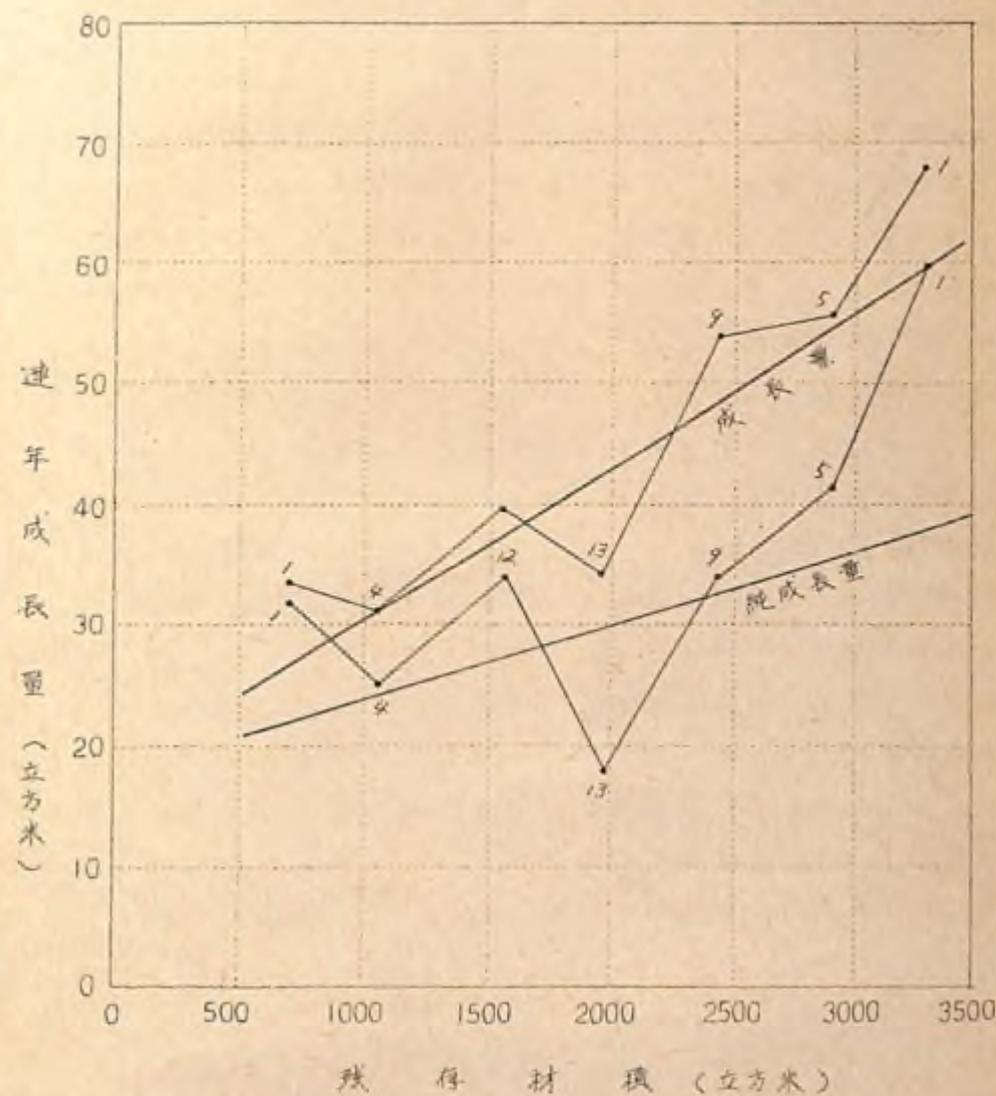
表 8 /エーカー当り全標準地の平均値

	原林分	伐採	残存材積	現在材積
林 畝	84	84	84	106
本 数	330	73	257	220
断 面 積 (平方フィート)	95.2	26.8	68.4	84.9
材 積 (立方フィート)	2805	832	1973	2658

1 図 現在生育中の残存材積の上に落された連年粗成長量と連年純成長量 (45標準地を基とした)



2 図 残存材積の上に落された連年粗成長量と連年純成長量 (45標準地にもとづく)



106年生で、表8に示されている林分の純生産力は、エーカー当りの伐採材積に現在材積を加えた合計材積、すなわち  $832 + 2,658 = 3,490$  立方フィートである。もし部分的伐採をしなかったならば、原林分は106年生でどのくらいの材積を生産するだろうか、という質問が起る。プレスラー公式から、表8の残存林分の成長率は

$$\frac{(2,658 - 1,973)}{(2,658 + 1,973)} \times \frac{200}{22} = 1.345\%$$

である。残存林分における直径成長は全然促進されなかったから、この成長率は同じ22ヶ年の期間後の材積を推定するために、たいした誤差なしに、原林分に適用されるであろう。このことから、原林分は、もし、そのまま残されるならば、106年生で3,870立方フィートの材積となるであろう。最大で成長の最も早い木が、伐採によって取られるので、この推定値は恐らく控え目の数値であり、予測に用いられる成長率は、原林分の粗悪な部分に基づいている。この計算をもととして、部分的伐採は、22年間にエーカー当りの  $3,780 - 3,490 = 290$  立方フィートの材積の総損失に陥っている。ここに示されるすべての結果は、1回の部分的伐採にもとづいているが、林分には松の更新樹がないから、2回目、3回目の伐採は、蓄積をひどく減らすことになるのは明らかである。成長や更新の見地から、松に対する部分的伐採の正当性は、少いように思われる。このような伐採方針の最終的結果は、残念ながら数多くの伐採によって、広大な地域で事実上マツがなくなり、林分が望ましくない広葉樹林に悪化している。Edson地方において明らかにされておる。

摘 要

Lodgepole pine における部分的伐採の結果を確かめるために Alberta の Edson 地方の伐採林分で研究が行なわれた。45個の0.4エーカーのプロットが、12年から30年前に伐採された林分内に設けられた。直径成長、材積成長、更新におよぼす、伐採の

影響を決めるため解析が行なわれた。

- 1 部分的伐採によって、残存林分として残された林木の直径成長率は認められる程に増加しなかった。
- 2 残存林分の純材積成長量は少く、もし林分が伐採されずに成長することができるときに比べて、成長量の小さいことを示している。
- 3 松の更新樹は非常に少く、林分の再生には全く不十分である。或る林分には、伐採後、カバノキヤボプラカ更新する結果、広葉樹林分になるという林分構成上の明らかな変化を生ずる。
- 4 部分的伐採の続行により、マツの蓄積は急激に低下し、最終には林分からマツは殆んど完全に除かれてしまう。

参 考 文 献

- 1 Ackerman, R. F. 1954. Yield of lodgepole pine in Foothills or B 19 Region of Alberta, Canada. Dept. of Northern Affairs and National Resources, Forestry Branch Unpublished M.S.
- 2 Blyth, A. W. 1954. Standard volume table for lodgepole pine, Canada, Dept. of Northern Affairs and National Resources, Forestry Branch, Unpublished M.S.
- 3 Chaiken, L. F. 1937. The approach of loblolly and virginia pine stand towards normal stocking I. For. 37 (11)
- 4 Charman, H. H. and W. H. Meyer 1949. Forest mensuration McGraw-Hill Book Company Inc.
- 5 Halliday, W. E. D. 1937. A forest classification for Canada. Dept. of Mines and Resources, Dominion Forest Service, Bulletin, No. 89.
- 6 Hornibrook, E. M. 1940. A preliminary yield

table for selecting cut lodgepole pine stand. *J. For* 38 (8)

- 7 Meyer, W. H. 1934. Growth in selecting cut ponderosa pine forests of the Pacific Northwest U.S. Dept. of Agriculture, Tech. Bulletin No. 407.
- 8 Smithers, L. A. 1947. The cofrequency principle of diameter growth analysis. Canada Dept. of Mines and Resources, Silv. Res. Note No. 91.
- 9 Snedecor, G. W. 1948. Statistical methods. The Iowa States College, Press.

英国における日本カラマツの一般材積表

General Volume Tables for Japanese Larch in Great Britain By F. C. Nummel, J. W. Irvine, and J. Jeffers.

この日本カラマツ (*Larix leptolepis* Gord.) に関する材積表は、山林集報として分冊刊行中の一般材積表 (集) の中の一つである。

カシ、ブナ、カンバ、欧州アカマツ、コルシカ松、欧州カラマツ、欧州トーチの材積表は、既にこの集の中に発表し、米松については調製中である。

この日本カラマツ材積表を含む針葉樹の材積表は、胸高四分間 (略 B. H. Q. G.) と総樹高によって与えられる皮付平均ホツプス (又は四分間立方フィート) 材積を示す。

胸高は地点 (樹と地面が斜面の上側で交る点) から4フィート3インチの処を測り、材積は地点から皮付最大直径が3インチのところ迄の長さを一区分として測定した。

根林と枝葉の材積は全然考慮に入れてない。この日本カラマツ材積表は三つの大きな基礎の上に作製された。

- (1) 林業委員会報 163 (林業委員会 1920) で発表された 暫定収獲表を調製する為に、主として 1917 年から 1919 年にかけて設定された暫定標準地
- (2) 我々の仕事のために快く資料を提供された木材供給局、林業委員会及び大学研究者の方々によって第一次、第二次の世界大戦で採採が行われていた間に実行された測定
- (3) 林業委員会によって設けられた固定標準地

上端直径3インチに至る迄の材積を示す主表 (第1表) に幾つかの補助表が加えてある。第2、第3表はそれぞれ上端直径6インチ、9インチ迄の材積を示し、第4表は第1表 (上端直径3インチ迄) の総材積に対するこれらの材積の%を示す。

第5、第6、第7表は上端直径3インチ、6インチ、9インチに至る平均材長を、第8表は樹皮材積の皮付材積に対する%を表わす。

上述した三つの因子のすべては主表の作成に用いられたが、これは補助表を専ら固定標準地の資料から調製した事から適当と考えられる。

即ち固定標準地では、ただ各単木について最初は5フィート後は10フィートの間隔で周囲と樹皮の厚さの必要寸法を測定した式である。

樹皮の厚さはスエーデン式の樹皮計によって測定したものを平均した。

樹皮率はすべて、樹高の中央の位置の樹皮の厚さを基礎としていゝが、これは僅かに過少な見積を与えていゝと思われ。

何故なら樹高の中央部の樹皮率は基部及梢端部に於けるよりも過少な値を与えるからである。(J. Macdonald 1933)

この材積表の調製に当っては、非常に多くの問題について共同作業が行われた。

即ち F. C. Hummel が使用法の記述、仕事の構成、並びに表の取まとめに責任を持ち、T. W. Irvine が全資料を取まとめ、上述の樹皮率に關するものを含む補助表の幾つかを取纏め、J. Jeffers は主表の計算を担当した。

これらの日本カラマツに關する材積表は英国でこの樹種が生育しているすべての地位から、適当な割合で抜き出された1389本の資料木に基礎を置いている。

周囲級及び樹高級に属する木の本数は附表に記載してある。

主表によって与えられる材積からの各資料木の材積の差異係数は1%で、本表の作成に當ってその様な木も含めていゝことから、本表は非常に異様な木についてもあてはまる。

林業委員会によって設けられた45個の日本カラマツ固定標準地の全部について精度の検定を行った。

これらの各標準地の材積は、標準地の平均周囲と樹高に対する材

積を此の材積表より求め、それに標準地の本数を乘じて得られた。

この様にして計算された45個の標準地の全材積は、標準的な林業委員会の標準地法によって直接測定から算出されたものより25%少なかった。

材積表より推定した平均材積に対する測定材積の差異係数は約6%である。

参 考 林 業 委 員 会 1920年  
 英国諸島に於ける針葉樹の成長率  
 林業委員会々報 第3号  
 H. M. Stationary of fire  
 ロンドン 1920年(絶版)  
 James Macdonald 1933  
 針葉樹の幹形  
 Forestry Ⅷ (2), 1933年 121~129頁

### 材積表応用上の注意

材積表は林業家や山林所有者等が立木の立方容積を見積る時に使用する。

この為には材積表の使用法と使用上の限界をはっきり理解して置く事が必要である。

同一の胸高周囲と高さの木であっても細りはそれぞれ異なるであろう。故に材積表は個々の単木材積を正確に見積る事は出来ないが、一団の樹木や全林分の合計材積は充分見積ることが出来る。

普通程度はあつても、全林でさえ幹形が相互に異なるものだから、最初与えられた状態の下で一般材積表を使用する場合には、この状態の下に成長した多数の伐採木の幹についてテストする事が常に必要である。

もし表がはつきりした偏倚を示す様であれば、その地位における立木の材積表による見積りは、適当に修正しなければならない。

もし林分が非常に小さなものでなければ普通には単木について材積表を適用する必要はない。

老齢広葉樹林に於ては、毎年毎目毎の木の高さ四分間を測定し材積を推定するのが最もよく、その値はその様な木が少くとも100本位ある様に定めるべきである。

例えば500本の木があれば5本目毎に測る。そうすれば、林分材積はこの標本として測られた材積の合計にこれを求めて得られる。

幼齢広葉樹林や全林齢を含む様な林分で幹長の誤差が殆どない様な場合には、全林分について周囲を測って平均周囲(林分の平均断面積に対する周囲)を求め、又平均樹高は平均周囲に近い若干の木の高さを測って求めるのが良い。

この平均周囲及び樹高から材積表によって材積を導き本数を乗じて収穫される立木材積を算出する。

大林分や全林の立木用材材積を推定する場合、これ等の又はこれらと類似した方法が全面積について大でなく、代表的標本についてもよく用いられるであろう。

どんな特殊な場合でも、最も有効な標本調査の技術を見出す為には、標本調査の理論や地方的条件の知識を必要とする。

然し多くの実用上の目的や施業案への特殊な応用については、 $\frac{1}{2}$ ヘクタールの広さの平行帯、又は全面積に一定間隔をとった、小さな円形の標草地の何れかを10%の標草地をとれば充分な精度で有効且つ不偏な推定値が得られる。

円形の標本抽出単位を用いる場合、半径37フィート3インチの $\frac{1}{10}$ エーカーの区域又は半径58フィート10インチの $\frac{1}{20}$ エーカーの区域をとるのが一般に最も便利と思われる。

(Forestry commission, Forest Record Number 14, 1951. より: 真辺)



B.H.Q.G	陰						
	36	37	38	39	40	41	42
2 女 女 女	.22	.22	.23	.23	.23	.23	.23
	.43	.44	.44	.45	.46	.47	.48
	.65	.66	.68	.70	.72	.74	.76
3 女 女 女 女	.86	.88	.91	.93	.96	.98	1.00
	1.06	1.10	1.13	1.16	1.20	1.23	1.26
	1.28	1.32	1.36	1.41	1.45	1.49	1.53
	1.51	1.56	1.61	1.66	1.71	1.76	1.81
4 女 女 女 女	1.75	1.80	1.85	1.91	1.96	2.02	2.08
	2.00	2.06	2.12	2.18	2.24	2.30	2.37
	2.29	2.35	2.42	2.49	2.55	2.62	2.70
	2.58	2.65	2.72	2.80	2.87	2.95	3.02
5 女 女 女 女	2.89	2.96	3.04	3.12	3.21	3.29	3.37
	3.19	3.28	3.36	3.45	3.54	3.63	3.72
	3.54	3.63	3.72	3.82	3.91	4.01	4.11
	3.90	4.00	4.10	4.20	4.31	4.41	4.52
6 女 女 女 女	4.26	4.37	4.48	4.59	4.70	4.82	4.93
	4.64	4.76	4.88	5.00	5.12	5.24	5.36
	5.04	5.17	5.29	5.42	5.55	5.68	5.81
	5.46	5.59	5.73	5.89	6.00	6.14	6.28
7 女 女 女 女	5.89	6.04	6.18	6.33	6.48	6.63	6.78
	6.35	6.50	6.65	6.81	6.97	7.13	7.29
	6.82	6.98	7.15	7.31	7.48	7.65	7.82
	7.29	7.46	7.64	7.82	7.99	8.17	8.36
8 女 女 女 女	7.78	7.96	8.15	8.34	8.53	8.72	8.91
	8.30	8.50	8.70	8.90	9.10	9.30	9.50
	8.83	9.03	9.24	9.46	9.67	9.88	10.1
	9.37	9.59	9.81	10.0	10.3	10.5	10.7
9 女 女 女 女							
10 女 女 女 女							

樹	高 (71-ト)							
	43	44	45	46	47	48	49	50
2	.24	.24						
	.49	.50						
	.79	.80						
3	1.03	1.05	1.07	1.09	1.11	1.13	1.15	1.18
	1.30	1.33	1.36	1.39	1.42	1.45	1.49	1.52
	1.56	1.60	1.64	1.69	1.74	1.79	1.84	1.88
	1.86	1.90	1.95	2.01	2.07	2.13	2.19	2.25
4	2.13	2.18	2.25	2.32	2.39	2.45	2.52	2.59
	2.43	2.50	2.57	2.64	2.71	2.79	2.86	2.94
	2.77	2.84	2.92	3.00	3.07	3.15	3.24	3.32
	3.10	3.18	3.27	3.35	3.43	3.52	3.61	3.70
5	3.46	3.55	3.63	3.73	3.82	3.91	4.01	4.10
	3.81	3.91	4.00	4.10	4.20	4.30	4.40	4.50
	4.21	4.31	4.42	4.52	4.63	4.74	4.84	4.96
	4.63	4.74	4.85	4.96	5.08	5.19	5.31	5.43
6	5.05	5.17	5.28	5.41	5.53	5.65	5.78	5.90
	5.49	5.61	5.74	5.87	6.00	6.13	6.27	6.40
	5.95	6.08	6.22	6.36	6.49	6.64	6.78	6.92
	6.43	6.57	6.72	6.86	7.01	7.16	7.31	7.47
7	6.93	7.08	7.24	7.39	7.55	7.71	7.87	8.04
	7.45	7.62	7.78	7.95	8.12	8.29	8.46	8.63
	8.00	8.17	8.35	8.52	8.70	8.88	9.06	9.25
	8.54	8.72	8.91	9.10	9.29	9.48	9.67	9.86
8	9.10	9.30	9.50	9.69	9.89	10.1	10.3	10.5
	9.71	9.92	10.1	10.3	10.5	10.8	11.0	11.2
	10.3	10.5	10.8	11.0	11.2	11.4	11.6	11.9
	10.9	11.2	11.4	11.6	11.9	12.1	12.3	12.6
9			12.1	12.3	12.6	12.8	13.1	13.3
			12.8	13.0	13.3	13.5	13.8	14.1
			13.5	13.7	14.0	14.3	14.6	14.8
			14.2	14.5	14.8	15.0	15.3	15.6
10			14.9	15.2	15.5	15.8	16.1	16.4
			15.7	16.0	16.3	16.6	17.0	17.3
			16.5	16.8	17.1	17.5	17.8	18.1
			17.3	17.6	18.0	18.3	18.7	19.0

B.H.Q.G	能						
	51	52	53	54	55	56	57
3 樹高	1.20	1.22	1.24	1.27			
	1.56	1.59	1.62	1.66			
	1.92	1.96	2.01	2.06			
	2.31	2.37	2.43	2.49			
4 樹高	2.66	2.72	2.80	2.88	2.96	3.03	3.10
	3.02	3.10	3.18	3.26	3.34	3.42	3.50
	3.40	3.49	3.58	3.67	3.76	3.85	3.94
	3.79	3.88	3.98	4.07	4.17	4.27	4.36
5 樹高	4.20	4.30	4.40	4.50	4.60	4.71	4.82
	4.61	4.72	4.82	4.93	5.04	5.15	5.27
	5.07	5.18	5.30	5.41	5.53	5.65	5.77
	5.55	5.67	5.79	5.92	6.04	6.17	6.30
6 樹高	6.03	6.16	6.29	6.42	6.56	6.69	6.83
	6.54	6.68	6.81	6.96	7.10	7.24	7.39
	7.07	7.21	7.36	7.51	7.66	7.82	7.97
	7.62	7.78	7.94	8.09	8.25	8.42	8.58
7 樹高	8.20	8.37	8.53	8.70	8.87	9.04	9.22
	8.80	8.98	9.16	9.33	9.51	9.69	9.88
	9.43	9.62	9.80	9.99	10.2	10.4	10.6
	10.1	10.3	10.5	10.6	10.9	11.1	11.3
8 樹高	10.7	10.9	11.1	11.3	11.5	11.8	12.0
	11.4	11.6	11.8	12.1	12.3	12.5	12.7
	12.1	12.3	12.6	12.8	13.0	13.3	13.5
	12.8	12.1	12.3	12.6	12.8	13.1	13.3
9 樹高	13.6	13.8	14.1	14.3	14.6	14.9	15.1
	14.3	14.6	14.9	15.1	15.4	15.7	15.9
	15.1	15.4	15.7	16.0	16.2	16.5	16.8
	15.9	16.2	16.5	16.8	17.1	17.4	17.7
10 樹高	16.7	17.0	17.3	17.7	18.0	18.3	18.6
	17.6	17.9	18.2	18.6	18.9	19.2	19.6
	18.5	18.8	19.1	19.5	19.8	20.2	20.5
	19.4	19.7	20.1	20.4	20.8	21.1	21.5
11 樹高					21.7	22.1	22.5
					22.7	23.1	23.5
					23.7	24.1	24.5
					24.8	25.2	25.6

樹		高							
		58	59	60	61	62	63	64	65
		3.17	3.26	3.34	3.44	3.54	3.65	3.75	
		3.60	3.69	3.78	3.88	3.97	4.07	4.16	
		4.04	4.13	4.23	4.33	4.43	4.53	4.63	
		4.47	4.57	4.67	4.78	4.88	4.99	5.10	
		4.92	5.03	5.14	5.26	5.37	5.48	5.60	
		5.38	5.50	5.61	5.73	5.85	5.98	6.10	
		5.89	6.02	6.14	6.27	6.40	6.52	6.66	
		6.43	6.56	6.69	6.83	6.97	7.10	7.24	
		6.97	7.11	7.25	7.39	7.54	7.68	7.83	7.98
		7.53	7.68	7.83	7.98	8.13	8.29	8.44	8.60
		8.12	8.28	8.44	8.60	8.76	8.92	9.09	9.25
		8.74	8.91	9.08	9.25	9.42	9.59	9.76	9.94
		9.39	9.57	9.74	9.92	10.1	10.3	10.5	10.6
		10.1	10.2	10.4	10.6	10.8	11.0	11.2	11.4
		10.8	11.0	11.2	11.4	11.6	11.8	12.0	12.2
		11.5	11.7	11.9	12.1	12.3	12.5	12.7	12.9
		12.2	12.4	12.6	12.8	13.1	13.3	13.5	13.7
		13.0	13.2	13.4	13.7	13.9	14.1	14.4	14.6
		13.7	14.0	14.2	14.5	14.7	15.0	15.2	15.5
		14.6	14.8	15.1	15.3	15.6	15.8	16.1	16.4
		15.4	15.7	15.9	16.2	16.5	16.7	17.0	17.3
		16.2	16.5	16.8	17.1	17.3	17.6	17.9	18.2
		17.1	17.4	17.7	18.0	18.3	18.6	18.9	19.2
		18.0	18.3	18.6	18.9	19.2	19.5	19.8	20.2
		18.9	19.2	19.5	19.9	20.2	20.5	20.8	21.2
		19.9	20.2	20.5	20.9	21.2	21.6	21.9	22.2
		20.8	21.2	21.5	21.9	22.2	22.6	22.9	23.3
		21.8	22.2	22.6	22.9	23.3	23.7	24.0	24.4
		22.8	23.2	23.6	24.0	24.4	24.7	25.1	25.5
		23.9	24.3	24.7	25.1	25.5	25.9	26.3	26.7
		24.9	25.3	25.8	26.2	26.6	27.0	27.4	27.8
		26.0	26.5	26.9	27.3	27.7	28.2	28.6	29.0

B.H. 29	徑						
	66	67	68	69	70	71	72
6	8.13	8.28	8.43	8.58	8.74	8.90	9.06
$\frac{1}{4}$	8.76	8.92	9.08	9.24	9.41	9.57	9.74
$\frac{1}{2}$	9.42	9.59	9.76	9.93	10.1	10.3	10.5
$\frac{3}{4}$	10.1	10.3	10.5	10.6	10.8	11.0	11.2
7	10.8	11.0	11.2	11.4	11.6	11.8	12.0
$\frac{1}{4}$	11.6	11.8	12.0	12.2	12.4	12.6	12.8
$\frac{1}{2}$	12.4	12.6	12.8	13.0	13.2	13.4	13.6
$\frac{3}{4}$	13.2	13.4	13.6	13.8	14.0	14.3	14.5
8	14.0	14.2	14.4	14.7	14.9	15.1	15.4
$\frac{1}{4}$	14.8	15.1	15.3	15.6	15.8	16.1	16.3
$\frac{1}{2}$	15.7	16.0	16.2	16.5	16.7	17.0	17.2
$\frac{3}{4}$	16.6	16.9	17.1	17.4	17.7	17.9	18.2
9	17.5	17.8	18.1	18.4	18.7	18.9	19.2
$\frac{1}{4}$	18.5	18.8	19.1	19.4	19.6	19.9	20.2
$\frac{1}{2}$	19.5	19.8	20.1	20.4	20.7	21.0	21.3
$\frac{3}{4}$	20.5	20.8	21.1	21.4	21.7	22.1	22.4
10	21.5	21.8	22.2	22.5	22.8	23.1	23.5
$\frac{1}{4}$	22.6	22.9	23.3	23.6	24.0	24.3	24.7
$\frac{1}{2}$	23.7	24.0	24.4	24.7	25.1	25.5	25.8
$\frac{3}{4}$	24.8	25.1	25.5	25.9	26.3	26.6	27.0
11	25.9	26.3	26.7	27.1	27.4	27.8	28.2
$\frac{1}{4}$	27.1	27.5	27.9	28.3	28.7	29.1	29.5
$\frac{1}{2}$	28.2	28.7	29.1	29.5	29.9	30.3	30.8
$\frac{3}{4}$	29.5	29.9	30.3	30.8	31.2	31.7	32.1

樹	高							
	73	74	75	76	77	78	79	80
9.21	9.38							
9.91	10.1							
10.6	10.8							
11.4	11.6							
12.2	12.4							
13.0	13.2							
13.9	14.1							
14.7	14.9							
15.6	15.8	16.1	16.3	16.6	16.8	17.1	17.3	
16.6	16.8	17.1	17.3	17.6	17.8	18.1	18.3	
17.5	17.8	18.0	18.3	18.6	18.8	19.1	19.4	
18.5	18.8	19.0	19.3	19.6	19.9	20.2	20.4	
19.5	19.8	20.1	20.4	20.7	21.0	21.3	21.5	
20.5	20.8	21.1	21.4	21.7	22.0	22.3	22.7	
21.6	21.9	22.2	22.6	22.9	23.2	23.5	23.8	
22.7	23.0	23.4	23.7	24.0	24.3	24.7	25.0	
23.8	24.2	24.5	24.8	25.2	25.5	25.9	26.2	
25.0	25.4	25.7	26.1	26.4	26.8	27.1	27.5	
26.2	26.6	26.9	27.3	27.7	28.0	28.4	28.8	
27.4	27.8	28.2	28.6	28.9	29.3	29.7	30.1	
28.6	29.0	29.4	29.8	30.2	30.6	31.0	31.4	
29.9	30.3	30.7	31.2	31.6	32.0	32.4	32.8	
31.1	31.6	32.1	32.5	32.9	33.3	33.8	34.2	
32.5	33.0	33.4	33.9	34.3	34.8	35.2	35.7	

第2表 上端皮付直径6インチ迄の材積(最低樹高6フィート)  
皮付ホップス材積

B.H.Q.G. (インチ)	総 樹 高 (71-ト)					
	30	40	50	60	70	80
5	0.81	1.06	1.35	1.70		
6	2.37	3.06	3.84	4.71	5.68	
7		5.31	6.59	7.99	9.51	
8			9.45	11.3	13.4	15.6
9			12.5	15.0	17.6	20.2
10			15.7	18.7	21.9	25.2

第3表 上端皮付直径9インチ迄の材積(最低樹高10フィート)  
皮付ホップス材積

B.H.Q.G.	総 樹 高					
	30	40	50	60	70	80
8			4.83	5.80	6.85	7.96
9			8.91	10.7	12.5	14.4
10			12.6	15.0	17.6	20.2

第4表 第1表の材積に対する比率を表した種々の  
上端直径限界に対する材積

B.H.Q.G. (インチ)	上端直径3インチ迄	上端直径6インチ迄	上端直径9インチ迄
5	100 %	33 %	
6	100	65	
7	100	82	
8	100	90	46
9	100	94	67
10	100	96	77

備考 上端直径3インチ迄の材積は第1表に掲げてある。

第5表 皮付上端直径3インチ迄の長さ(71-ト)  
フィートで表した長さ

B.H.Q.G.	総 樹 高				
	30	40	50	60	70
3	15	19	25		
4	18	23	32	40	48
5	20	27	36	45	54
6	21	29	38	47	56
7		31	39	48	57
8			40	49	58
9				50	58
10				50	59

第6表 皮付直径6インチ迄の長さ(最低樹高6フィート)  
フィートで表した長さ

B.H.Q.G.	総 樹 高 (71-ト)				
	30	40	50	60	70
5	6	7	8	9	12
6	11	14	19	25	32
7		20	24	31	41
8			28	36	46
9				38	48
10				40	50

第7表 皮付直径9インチ迄の長さ(最低樹高10フィート)  
フィートで表した長さ

B.H.Q.G.	総 樹 高 (71-ト)				
	30	40	50	60	70
8			11	12	15
9				20	27
10				25	31

第6表 伐付材積に対するパーセントで表した樹高率

周回階 (4分間イナ)	樹 高 階						測定本数
	30	40	50	60	70	80	
3	17	17	17				36
4	17	17	17	17			201
5	17	17	17	17			251
6	17	16	16	16	16		229
7		16	16	16	16		143
8			15	15	15		48
9				14	14	14	18
10				14	14		2
測定本数	69	247	333	214	64	1	928

附表 本材積表作成に用いた各周回 樹高階に対する本数

B.H.R.G (イナ)	樹 高 階 (71-ト)							計
	20	30	40	50	60	70	80	
3	15	146	56	2				219
4		100	187	53	6			346
5		35	129	135	30			329
6		6	53	128	76	9		272
7			5	50	74	25		154
8				2	26	20		48
9					8	9	1	18
10				1	1	1		3
計	15	287	430	371	221	64	1	1389