低質広葉樹林の材積推定の簡略化について

西　沢　正　久[(1)]

1. まえがき

従来の標準地法による低質広葉樹林の材積推定は，標準地設定のために調査時間が多くかかると同時に，客観的に標本誤差を評価できないという欠点があるので，標準地を設定しないで標本点から i 番目に近い立木の平均距離を用いてhaあたり本数を推定し，標本点付近の数本の立木の直径，樹高の測定値から単木平均材積を推定し，これらの積としてhaあたり材積を推定する方法を試みた。今回は用材1類，2類はこの調査と併行して毎木調査を行なうという立場をとったが，標本点付近でこれらも含めて調査を行なえば，薪材材積と同様に客観的にこれらの材積も推定できるであろう。

2. 理論と方法

立木がランダムに分布している林内の一点から i 番目に近い立木までの距離の分布法則は ESSED[1] の方法の別証として鈴木[2] によって与えられた。かれは3番目に近い立木までの平均距離（$\bar{x}_3$）からhaあたり本数の推定および68% の信頼限界を次のように導いた。

haあたり本数：$N=8789/\bar{x}^2_3$ ……………………………………………………（1）

$$\text{信頼限界}\quad :\frac{10^4}{\bar{x}^2_3}\left\{\frac{15}{16}-\sqrt{\frac{3-(15/16)^2\pi}{k\pi}}\right\}^2<N$$

$$<\frac{10^4}{\bar{x}^2_3}\left\{\frac{15}{16}+\sqrt{\frac{3-(15/16)^2\pi}{k\pi}}\right\}^2 \quad \cdots\cdots(2)$$

ここに k は標本点数である。

立木を点に置きかえた場合，同じ研究はすでに森下[3] が行なっている。これらの著者はいずれも一定面積内の点の数が POISSON 分布に従うことを利用しているが，熊谷[4] は i 番目に近い木までの距離の確率分布を計算して，これに到着する方法を与えた。

かれは i 番目に近い木までの距離の平均値および分散として次のような結果を得た。

$$\bar{x}_i=\frac{\Gamma(i+1/2)}{\Gamma(i)}\sqrt{\frac{1}{\pi m}}$$

$$\sigma^2_{\bar{x}_i}=\left\{i-\frac{\Gamma^2(i+1/2)}{\Gamma^2(i)}\right\}\frac{1}{\pi m}$$

ここに m は単位面積あたり本数である。この結果を用いると k 個の標本点をとって i 番目に近い立木までの平均距離（$\bar{x}_i$）を推定した場合，haあたり本数（N_i）の推定および95% 信頼限界は次式のようになる。

$$N_i=\left(\frac{\Gamma(i+1/2)}{\Gamma(i)}\Big/\sqrt{\pi}\right)^2\times 10^4\times\frac{1}{\bar{x}^2_i}=\frac{C_i}{\bar{x}^2_i} \quad \cdots\cdots(3)$$

1969年10月20日受理

（1） 経営部経営第二科測定研究室長・農学博士

第1表　第 i 至近木までの平均距離（$\bar{x}_i$）からのhaあたり本数（N_i）
Table 1.　The number of stems per ha（N_i）and 95% confidence point to the i-th nearest tree（k is the number of

i	N_i	$k=9$		$k=16$		$k=25$		$k=$
		下　限	上　限	下　限	上　限	下　限	上　限	下　限
1	$2500/\bar{x}^2_1$	$918/\bar{x}^2_1$	$4859/\bar{x}^2_1$	$1307/\bar{x}^2_1$	$4077/\bar{x}^2_1$	$1539/\bar{x}^2_1$	$3693/\bar{x}^2_1$	$1695/\bar{x}^2_1$
2	$5625/\bar{x}^2_2$	$2967/\bar{x}^2_2$	$9126/\bar{x}^2_2$	$3669/\bar{x}^2_2$	$7998/\bar{x}^2_2$	$4068/\bar{x}^2_2$	$7433/\bar{x}^2_2$	$4329/\bar{x}^2_2$
3	$8789/\bar{x}^2_3$	$5323/\bar{x}^2_3$	$13119/\bar{x}^2_3$	$6263/\bar{x}^2_3$	$11743/\bar{x}^2_3$	$6788/\bar{x}^2_3$	$11048/\bar{x}^2_3$	$7129/\bar{x}^2_3$
4	$11963/\bar{x}^2_4$	$7825/\bar{x}^2_4$	$16976/\bar{x}^2_4$	$8963/\bar{x}^2_4$	$15395/\bar{x}^2_4$	$9593/\bar{x}^2_4$	$14594/\bar{x}^2_4$	$10000/\bar{x}^2_4$
5	$15140/\bar{x}^2_5$	$10416/\bar{x}^2_5$	$20747/\bar{x}^2_5$	$11727/\bar{x}^2_5$	$18989/\bar{x}^2_5$	$12450/\bar{x}^2_5$	$18095/\bar{x}^2_5$	$12913/\bar{x}^2_5$
6	$18320/\bar{x}^2_6$	$13067/\bar{x}^2_6$	$24458/\bar{x}^2_6$	$14535/\bar{x}^2_6$	$22542/\bar{x}^2_6$	$15340/\bar{x}^2_6$	$21564/\bar{x}^2_6$	$15856/\bar{x}^2_6$
7	$21501/\bar{x}^2_7$	$15765/\bar{x}^2_7$	$28124/\bar{x}^2_7$	$17376/\bar{x}^2_7$	$26064/\bar{x}^2_7$	$18256/\bar{x}^2_7$	$25010/\bar{x}^2_7$	$18820/\bar{x}^2_7$
8	$24682/\bar{x}^2_8$	$18498/\bar{x}^2_8$	$31756/\bar{x}^2_8$	$20242/\bar{x}^2_8$	$29561/\bar{x}^2_8$	$21192/\bar{x}^2_8$	$28437/\bar{x}^2_8$	$21800/\bar{x}^2_8$
9	$27863/\bar{x}^2_9$	$21259/\bar{x}^2_9$	$35359/\bar{x}^2_9$	$23128/\bar{x}^2_9$	$33039/\bar{x}^2_9$	$24144/\bar{x}^2_9$	$31849/\bar{x}^2_9$	$24793/\bar{x}^2_9$
10	$31045/\bar{x}^2_{10}$	$24045/\bar{x}^2_{10}$	$38939/\bar{x}^2_{10}$	$26031/\bar{x}^2_{10}$	$36501/\bar{x}^2_{10}$	$27109/\bar{x}^2_{10}$	$35248/\bar{x}^2_{10}$	$27797/\bar{x}^2_{10}$

注）鈴木の公式

haあたり本数の推定　$N=8789/\bar{x}^2_3$

95%信頼限界　$$\frac{10^4}{\bar{x}^2_3}\left\{\frac{15}{16}-t\sqrt{\frac{3-(15/16)^2\pi}{k\pi}}\right\}^2<N<\frac{10^4}{\bar{x}^2_3}\left\{\frac{15}{16}+t\sqrt{\frac{3-(15/16)^2\pi}{k\pi}}\right\}^2$$

$$\frac{10^4}{\pi}\left\{\frac{A_i-t\sqrt{B_i/k}}{\bar{x}_i}\right\}^2<N_i<\frac{10^4}{\pi}\left\{\frac{A_i+t\sqrt{B_i/k}}{\bar{x}_i}\right\}^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

ここに

$$A_i=\frac{\Gamma(i+1/2)}{\Gamma(i)},\quad B_i=\left\{i-\frac{\Gamma^2(i+1/2)}{\Gamma^2(i)}\right\},\quad C_i=\left(\frac{A_i}{\sqrt{\pi}}\right)^2\times10^4$$

いま k を一定において

$$D_i=\frac{10^4}{\pi}\,(A_i-t\sqrt{B_i/k})^2$$

$$E_i=\frac{10^4}{\pi}\,(A_i+t\sqrt{B_i/k})^2$$　（ただし，t は Student 分布の5％点の値）

とおけば，C_i，D_i，E_i はそれぞれ一定となり，信頼限界は

$$\frac{D_i}{\bar{x}^2_i}<N_i<\frac{E_i}{\bar{x}^2_i} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

のように簡単な形になる。i に応じて N_i および95%信頼限界の下限および上限を計算したものを第1表にかかげてある。第1表（注）の鈴木の公式から計算した $i=3$ の計算結果は第1表のものと完全に一致する。

この表を用いれば，i 番目に近い木までの平均距離を k 個の標本点から知れば，haあたり本数およびその信頼限界を容易に求めることができる。

距離測定を行なう標本点付近で数本の立木の材積を測定し，単木平均材積 $\bar{v}$ を推定し，i 番目に近い立木までの平均距離（$\bar{x}_i$）から第1表を用いてhaあたり本数（N）を推定すれば，haあたり材積（V）およびその分散は次のように与えられる。

$$V=N\bar{v} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

および標本点数（k）に応ずる95％信頼度での上限および下限計算表
limits estimated from the mean distance ($\bar{x}_i$) from a sampling
sampling points)

36	k =49		k =64		k =81		k=100	
上　限	下　限	上　限	下　限	上　限	下　限	上　限	下　限	上　限
$3461/\bar{x}^2_1$	$1806/\bar{x}^2_1$	$3306/\bar{x}^2_1$	$1890/\bar{x}^2_1$	$3195/\bar{x}^2_1$	$1955/\bar{x}^2_1$	$3111/\bar{x}^2_1$	$2008/\bar{x}^2_1$	$3045/\bar{x}^2_1$
$7090/\bar{x}^2_2$	$4514/\bar{x}^2_2$	$6858/\bar{x}^2_2$	$4651/\bar{x}^2_2$	$6691/\bar{x}^2_2$	$4758/\bar{x}^2_2$	$6564/\bar{x}^2_2$	$4844/\bar{x}^2_2$	$6464/\bar{x}^2_2$
$10623/\bar{x}^2_3$	$7368/\bar{x}^2_3$	$10335/\bar{x}^2_3$	$7545/\bar{x}^2_3$	$10128/\bar{x}^2_3$	$7683/\bar{x}^2_3$	$9969/\bar{x}^2_3$	$7793/\bar{x}^2_3$	$9845/\bar{x}^2_3$
$14102/\bar{x}^2_4$	$10285/\bar{x}^2_4$	$13768/\bar{x}^2_4$	$10495/\bar{x}^2_4$	$13526/\bar{x}^2_4$	$10659/\bar{x}^2_4$	$13342/\bar{x}^2_4$	$10789/\bar{x}^2_4$	$13197/\bar{x}^2_4$
$17545/\bar{x}^2_5$	$13238/\bar{x}^2_5$	$17171/\bar{x}^2_5$	$13478/\bar{x}^2_5$	$16900/\bar{x}^2_5$	$13664/\bar{x}^2_5$	$16693/\bar{x}^2_5$	$13812/\bar{x}^2_5$	$16530/\bar{x}^2_5$
$20962/\bar{x}^2_6$	$16216/\bar{x}^2_6$	$20552/\bar{x}^2_6$	$16482/\bar{x}^2_6$	$20255/\bar{x}^2_6$	$16688/\bar{x}^2_6$	$20028/\bar{x}^2_6$	$16852/\bar{x}^2_6$	$19849/\bar{x}^2_6$
$24360/\bar{x}^2_7$	$19213/\bar{x}^2_7$	$23917/\bar{x}^2_7$	$19502/\bar{x}^2_7$	$23596/\bar{x}^2_7$	$19727/\bar{x}^2_7$	$23351/\bar{x}^2_7$	$19905/\bar{x}^2_7$	$23157/\bar{x}^2_7$
$27743/\bar{x}^2_8$	$22223/\bar{x}^2_8$	$27270/\bar{x}^2_8$	$22535/\bar{x}^2_8$	$26926/\bar{x}^2_8$	$22776/\bar{x}^2_8$	$26664/\bar{x}^2_8$	$22968/\bar{x}^2_8$	$26457/\bar{x}^2_8$
$31113/\bar{x}^2_9$	$25244/\bar{x}^2_9$	$30612/\bar{x}^2_9$	$25577/\bar{x}^2_9$	$30248/\bar{x}^2_9$	$25834/\bar{x}^2_9$	$29969/\bar{x}^2_9$	$26039/\bar{x}^2_9$	$29749/\bar{x}^2_9$
$34473/\bar{x}^2_{10}$	$28275/\bar{x}^2_{10}$	$33945/\bar{x}^2_{10}$	$28628/\bar{x}^2_{10}$	$33561/\bar{x}^2_{10}$	$28900/\bar{x}^2_{10}$	$33268/\bar{x}^2_{10}$	$29117/\bar{x}^2_{10}$	$33036/\bar{x}^2_{10}$

より計算した下限，上限は上表の $i=3$ の欄の数字と完全に一致する。

$$\sigma^2_V = N^2\sigma^2_{\bar{v}} + \bar{v}^2\sigma^2_N \qquad \cdots\cdots(7)$$

ここに　$\sigma^2_{\bar{v}} = \dfrac{t^2\Sigma(v-\bar{v})^2}{f(f-1)}$　（95％信頼度，f は測定本数）

σ^2_N は k に応じて第1表から求められる。簡単には，$\bar{v}$，N および V の標本誤差の百分率をそれぞれ $P_{\bar{v}}$ P_N，P_V とすれば

$$P_V = \sqrt{P^2_{\bar{v}} + P^2_N} \qquad \cdots\cdots(8)$$

で計算できる。

3.　郡山営林署87林班を小班の低質広葉樹林における実験結果

郡山営林署管内87林班を小班内の6.6 haの収穫調査区域内に次の要領で100点を抽出して調査した。

（i）A をhaで表わした調査面積，k を調査点数，l を m で表わした点間隔とすると

$$l = 100\sqrt{\frac{A}{k}} \qquad \cdots\cdots(9)$$

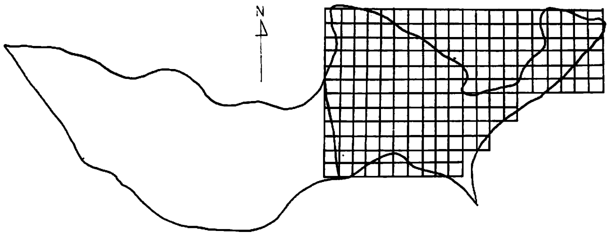
$A=6.6$，$k=100$ とすると

$$l = 10\sqrt{6.6} \fallingdotseq 25.7\text{m}$$

安全側をみて，調査区域に25m 間隔に格子を描くとこの林内に100点を抽出することができる（第1図参照)。

実際調査では，クリノメータを用いて南北の方向に米縄で水平でも斜距離でも，25mすすんだところに杭をうち調査点とした。南北にすすんで区域外に出ればこれに直角に東西の方向25m の地点からさらに南北にすすみ，林内にはいった最初の点を調査点とした。

（ii）今回は i 番目に近い木の平均距離からの推定本数の変化を知るため $i=1$，2，3，4，5，す



第1図　　Fig. 1

なわち調査点から1番目，2番目，3番目，4番目，5番目に近い木までの水平距離を測定した。実際調査では，そのうちのいずれか1つの距離測定でよい。

（iii）各調査点で距離測定をした5本の木について胸高直径を2cm括約で，樹高をm括約で測定した。

計算結果

（a）haあたり本数の推定

100点の距離測定によって，次の平均距離（$\bar{x}_i$）を得た。$\bar{x}_i$ の値を用いて第1表からhaあたり本数およびその信頼限界は次のように求められる。

i	i 番目に近い木までの平均距離 $\bar{x}_i$ (m)	haあたり本数	95% 信頼限界 下限	95% 信頼限界 上限	抽出誤差（P_N）(%)
1	1.02	2403	1930	2928	20.8
2	1.38	2954	2544	3394	14.4
3	1.59	3477	3083	3894	11.7
4	1.88	3385	3053	3734	10.1
5	2.16	3245	2960	3543	9.0

ここに平均距離の信頼限界は推定値を中心に対称であるが，本数は非対称となるので，上限・下限の差を2で割った数字を推定値で割ったものを抽出誤差とした。たとえば，$i=5$ では $\frac{3543-2960}{2}=291.5$ なので，$P_N=(291.5/3245)\times100=9.0\%$ のようにして計算した。

この例では，5番目に近い木までの平均距離を用いて推定したhaあたり本数が最も精度がよかった。

（b）単木平均材積の推定

各調査点で5本ずつ，計500本の樹種別および樹種全体の直径樹高相関表をもとにした材積計算を第2～6表に示す。樹種を i，直径を j，樹高を k で表わし，1樹種の1つの直径，樹高に属する本数を f_{ijk} とすると，1樹種の直径階別本数は $\sum_k f_{ijk}$，直径，樹高に応ずる材積表で求めた単木材積を v_{ijk} とすると，1樹種の直径階別材積は $\sum_k f_{ijk}v_{ijk}$ となる。これを直径階について加えると $\sum_j\sum_k f_{ijk}=f_i$ および $\sum_j\sum_k f_{ijk}v_{ijk}=v_i$ がそれぞれその樹種の総本数および総材積で，その樹種の単木平均材積 $\bar{v}_i$ は次式で求められる。

$$\bar{v}_i=\frac{v_i}{f_i}=\frac{\sum_j\sum_k f_{ijk}v_{ijk}}{\sum_j\sum_k f_{ijk}} \qquad \cdots\cdots(10)$$

樹種ごとの f_i を樹種全体にわたって加えると，総本数

$$f=\sum_i f_i=\sum_i\sum_j\sum_k f_{ijk} \qquad \cdots\cdots(11)$$

が求められ（この例では，$f=500$），v_i を樹種全体について加えると，総材積

$$v=\sum_i v_i=\sum_i\sum_j\sum_k f_{ijk}v_{ijk}=\sum_i f_i\bar{v}_i \qquad \cdots\cdots(12)$$

が求まる。したがって，総平均単木材積 $\bar{v}$ は，次式で求められる。

$$\bar{v}=\frac{v}{f}=\frac{\sum_i v_i}{\sum_i f_i}=\frac{\sum_i\sum_j\sum_k f_{ijk}v_{ijk}}{\sum_i\sum_j\sum_k f_{ijk}} \quad \cdots\cdots(13)$$

つぎに，１つの樹種の単木平均材積 $\bar{v}_i$ の分散は次のようにして求められる。

$$\sigma^2_{\bar{v}_i}=\frac{\sum_j\sum_k f_{ijk}(v_{ijk}-\bar{v}_i)^2}{f_i(f_i-1)}=\frac{\sum_j\sum_k f_{ijk}v^2_{ijk}-\frac{v^2_i}{f_i}}{f_i(f_i-1)} \quad \cdots\cdots(14)$$

また，樹種をこみにした総平均単木材積 $\bar{v}$ の分散は次式で求められる。

$$\sigma^2_{\bar{v}}=\frac{\sum_i\sum_j\sum_k f_{ijk}(v_{ijk}-\bar{v})^2}{f(f-1)}=\frac{\sum_i\sum_j\sum_k f_{ijk}v^2_{ijk}-\frac{v^2}{f}}{f(f-1)} \quad \cdots\cdots(15)$$

また，計算に便利なため，樹種ごとに直径階別の本数割合を次のようにして計算した。

$$P_{ij}=\frac{\sum_k f_{ijk}}{f_i} \quad \cdots\cdots(16)$$

１樹種の直径階別単木平均材積は

$$\bar{v}_{ij}=\frac{\sum_k f_{ijk}v_{ijk}}{\sum_k f_{ijk}} \quad \cdots\cdots(17)$$

で求められ，(10) 式の $\bar{v}_i$ は次のようにして求められる。

$$\bar{v}_i=\sum_j P_{ij}\bar{v}_{ij}\left(=\sum_j\frac{\sum_k f_{ijk}}{f_i}\cdot\frac{\sum_k f_{ijk}v_{ijk}}{\sum_k f_{ijk}}=\frac{v_i}{f_i}\right) \quad \cdots\cdots(18)$$

いま樹種ごとの本数割合を P_i とすると，

$$P_i=\frac{f_i}{f} \quad \cdots\cdots(19)$$

したがって，平均単木材積は

$$\bar{v}=\sum_i P_i\bar{v}_i\left(=\sum_i\sum_j\frac{f_i}{f}\cdot\frac{\sum_k f_{ijk}v_{ijk}}{f_i}=\frac{\sum_i\sum_j\sum_k f_{ijk}v_{ijk}}{f}=\frac{v}{f}\right) \quad \cdots\cdots(20)$$

で求まる。

（a）で求めたhaあたり本数を N とすると，haあたり全材積は (20) を用いて，

$$V=N\bar{v} \quad \cdots\cdots(21)$$

P_N は（a）に掲げた表から求まり，(13)，(15) から

$$P_{\bar{v}}=\frac{t\sigma_{\bar{v}}}{\bar{v}}\times 100 \quad \cdots\cdots(22)$$

であるから，(21) の抽出誤差の百分率は 95% 信頼度で

$$P_V=\sqrt{P^2_N+P^2_{\bar{v}}} \quad \cdots\cdots(23)$$

によって求めることができる。なお，樹種ごと直径階ごとの本数分布は

$$N_i=P_i N \quad \cdots\cdots(24)$$

とすれば，

第2表　ナ　ラ　の　材　積　推　定

Table 2.　Volume estimation of oak (*Quercus acutissima* CARR.)

ナラ（v_{ijk} は材積表材積を 1,000 倍した値である。以下同じ。）

$D(j)$ \ $H(k)$		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum_k f_{ijk}$	$\sum_k f_{ijk}v_{ijk}$	P_{ij}	$\bar{v}_{ij}$	$P_{ij}\bar{v}_{ij}$	$\sum_k f_{ijk}v^2{}_{ijk}$
4	f_{ijk}	6	19	50	20	6	1		1				103					
	v_{ijk}	2	2	3	4	4	5		10					319	0.379	3.097	1.174	1091
6	f_{ijk}		2	7	17	22	16	2	1				67					
	v_{ijk}		10	10	10	10	10	10	10					670	0.246	10.000	2.460	6700
8	f_{ijk}					12	17	4	4	1			38					
	v_{ijk}					20	20	20	20	30				770	0.140	20.263	2.837	15700
10	f_{ijk}					1	2	7	9	10	1		30					
	v_{ijk}					20	30	30	40	40	40			1090	0.110	36.333	3.997	40500
12	f_{ijk}						1	2	3	4	7	1	18					
	v_{ijk}						40	40	50	50	60	60		950	0.066	52.778	3.483	51100
14	f_{ijk}							2	4	1	3		10					
	v_{ijk}							60	70	70	80			710	0.037	71.000	2.627	50900
16	f_{ijk}						1			1	1	1	4					
	v_{ijk}						70			100	100	110		380	0.015	95.000	1.425	37000
18	f_{ijk}											1	1					
	v_{ijk}											140		140	0.004	140.000	0.560	19600
20	f_{ijk}							1					1					
	v_{ijk}							120						120	0.003	120.000	0.360	14400
													272	5149 $v_i=\frac{5149}{1000}$ $=5.149$	1.000		18.923 $\bar{v}_i=\frac{18.923}{1000}$ $=0.019$	236991 $\sum_j\sum_k f_{ijk}v^2{}_{ijk}$ $=\frac{236991}{1000000}$ $=0.236991$

ナラのhaあたり材積と抽出誤差の計算

第２表より $P_i=f_i/f=272/500=0.544$, p.100 の（a）の表より $N=3245$（５番目に近い立木までの平均距離から）であるから，(24) よりナラの ha あたり本数 $N_i=P_i\,N=0.544\times3245=1765$。したがって (26) より，ナラのhaあたり材積は，$V_i=N_i\,\bar{v}_i=1765\times0.019=33.5\ \mathrm{m^3}$。

また公式 (29) より，$P^2{}_{p_i}=\frac{4\times(1-0.544)}{500\times0.544}\times100^2=67.05$, p.100 の（a）の表より $P^2{}_N=9.0^2=81.00$ であるから

公式 (28) より $P^2{}_{N_i}=67.05+81.00=148.05$, また公式 (14) より $\sigma^2{}_{\bar{v}_i}=\frac{0.236991-5.149^2/272}{272\times271}=0.000001322326$　∴ $\sigma_{\bar{v}_i}=0.0011$

したがって公式 (30) より $P_{\bar{v}_i}=\frac{2\times0.001\times100}{0.019}=10.5\%$　∴ $P^2{}_{\bar{v}_i}=110.25$

公式 (27) を用いて V_i の抽出誤差の百分率は $P_{V_i}=\sqrt{148.05+110.25}=16.1\%$。

第3表　クリの材積推定

Table 3. Volume estimation of chestnut (*Castanea crenata* SIEB. et ZUCC.)

クリ　1,000倍

$D(j)$ \ $H(k)$		3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\sum_k f_{ijk}$	$\sum_k f_{ijk}v_{ijk}$	P_{ij}	$\bar{v}_{ij}$	$P_{ij}\ \bar{v}_{ij}$	$\sum_k f_{ijk}v^2{}_{ijk}$
4	f_{ijk}	3	7	3							13					
	v_{ijk}	2	3	4								39	0.255	3.000	0.765	123
6	f_{ijk}			3	5	1					9					
	v_{ijk}			10	10	10						90	0.176	10.000	1.760	900
8	f_{ijk}			3	3	3	3	2			14					
	v_{ijk}			10	20	20	20	20				250	0.275	17.857	4.911	4700
10	f_{ijk}					2	2				4					
	v_{ijk}					30	30					120	0.078	30.000	2.340	3600
12	f_{ijk}						2	1	1	1	5					
	v_{ijk}						40	50	50	60		240	0.098	48.000	4.704	11800
14	f_{ijk}							1			1					
	v_{ijk}							70				70	0.020	70.000	1.400	4900
16	f_{ijk}						2	2			4					
	v_{ijk}						80	90				340	0.078	85.000	6.630	29000
26	f_{ijk}							1			1					
	v_{ijk}							220				220	0.020	220.000	4.400	48400
											$f_i=51$	1.369 $v_i=\frac{1369}{1000}$ $=1.369$	1.000		26.910 $\bar{v}_i=\frac{26.910}{1000}$ $=0.027$	103423 $\sum_j\sum_k f_{ijk}v^2{}_{ijk}$ $=\frac{103423}{1000000}$ $=0.103423$

クリのhaあたり材積と抽出誤差の計算

$N_i = P_iN = 0.102\times3245 = 331$

$V_i = N_i\bar{v}_i = 331\times0.027 = 8.9\text{m}^3$

$P^2{}_{P_i} = \frac{4\times(1-0.102)}{500\times0.102}\times100^2 = 704.31,\quad P^2{}_N = 9.0^2 = 81.00$

したがって，$P^2{}_{N_i} = 704.31+81.00 = 785.31$

$\sigma^2{}_{\bar{v}_i} = \frac{0.10342-0.036748}{51\times50} = 0.0000026147$

$\sigma_{\bar{v}_i} = 0.0051$

$P_{\bar{v}_i} = \frac{2\sigma_{\bar{v}_i}}{\bar{v}_i}\times100 = \frac{2\times0.005}{0.027}\times100 = 37.0\%,\quad P^2{}_{\bar{v}_i} = 1369.0$

$P_{V_i} = \sqrt{P^2{}_{N_i}+P^2{}_{\bar{v}_i}} = \sqrt{785.31+1369.0} = 46.4\%$

第4表 ザツの材積推定

Table 4. Volume estimate of other broad leaved trees

ザツ 1,000倍

$D(j)$ \ $H(k)$		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum_k f_{ijk}$	$\sum_k f_{ijk}v_{ijk}$	P_{ij}	$\bar{v}_{ij}$	$P_{ij}\bar{v}_{ij}$	$\sum_k f_{ijk}v^2_{ijk}$
4	f_{ijk}	6	7	30	17	5			1				66					
	v_{ijk}	2	2	3	4	4			10					214	0.537	3.242	1.741	774
6	f_{ijk}			1	7	4	8	1	1				22					
	v_{ijk}			10	10	10	10	10	10					220	0.179	10.000	1.790	2200
8	f_{ijk}			1	3	5	7	1					17					
	v_{ijk}			10	10	20	20	20						300	0.138	17.647	2.435	5600
10	f_{ijk}					1	1	1					3					
	v_{ijk}					20	30	30						80	0.024	26.667	0.640	2200
12	f_{ijk}						3	1		2	1	1	8					
	v_{ijk}						40	40		50	60	60		380	0.065	47.500	3.088	18600
14	f_{ijk}							2	1				3					
	v_{ijk}							60	70					190	0.024	63.333	1.520	12100
16	f_{ijk}							1	1	1			3					
	v_{ijk}							80	90	100				270	0.025	90.000	2.250	24500
22	f_{ijk}											1	1					
	v_{ijk}											210		210	0.008	210.000	1.680	44100
													$f_i=123$	1864 $v_i=\frac{1864}{1000}$ $=1.864$	1.000		15.144 $\bar{v}_i=\frac{15.144}{1000}$ $=0.015$	110074 $\sum_j\sum_k f_{ijk}v^2_{ijk}$ $=\frac{110074}{1000000}$ $=0.110074$

ザツのhaあたり材積と抽出誤差の計算

$N_i=P_iN=0.246\times3245=798$

$V_i=N_i\bar{v}_i=798\times0.015=12.0\text{m}^3$

$P^2{}_{p_i}=\dfrac{4\times(1-0.246)}{500\times0.246}\times100^2=245.20,\quad P^2{}_N=9.0^2=81.00$

したがって $P^2{}_{N_i}=245.20+81.00=326.20$

$$\sigma^2{}_{\bar{v}_i}=\frac{\sum_j\sum_k f_{ijk}v^2{}_{ijk}-v^2{}_i/f_i}{f_i(f_i-1)}=\frac{0.110074-0.027946}{123\times122}=0.00000547301$$

$\sigma_{\bar{v}_i}=0.0023$

$P_{\bar{v}_i}=\dfrac{2\sigma_{\bar{v}_i}}{\bar{v}_i}\times100=\dfrac{2\times0.002}{0.015}\times100=26.6\%,\quad P^2{}_{\bar{v}_i}=707.56$

$P_{V_i}=\sqrt{P^2{}_{N_i}+P^2{}_{\bar{v}_i}}=\sqrt{326.20+707.56}=32.2\%$

第5表 軟 ザ ツ の 材 積 推 定

Table 5. Volume estimation of other broadleaved trees not suitable for charcoal

軟ザツ 1,000倍

$D(j)$ \ $H(k)$		2	3	4	5	6	7	8	9	11	$\sum_k f_{ijk}$	$\sum_k f_{ijk} v_{ijk}$	P_{ij}	$\bar{v}_{ij}$	$P_{ij}\bar{v}_{ij}$	$\sum_k f_{ijk} v^2_{ijk}$
4	f_{ijk}	2	4	9	5	3					23					
	v_{ijk}	2	2	3	4	4						71	0.426	3.087	1.315	233
6	f_{ijk}		1	2		8					11					
	v_{ijk}		10	10		10						110	0.204	10.000	2.040	1100
8	f_{ijk}				1	4	2	1			8					
	v_{ijk}				10	20	20	20				150	0.148	18.750	2.775	2900
10	f_{ijk}						1		1		2					
	v_{ijk}						30		40			70	0.037	35.000	1.295	2500
12	f_{ijk}							2		2	4					
	v_{ijk}							40		60		200	0.074	50.000	1.850	10400
14	f_{ijk}						2	1		1	4					
	v_{ijk}						50	60		80		240	0.074	60.000	4.440	15000
16	f_{ijk}						1				1					
	v_{ijk}						70					70	0.018	70.000	1.260	4900
18	f_{ijk}									1	1					
	v_{ijk}									130		130	0.019	130.000	2.470	16900
											$f_i=54$	1041 $v_i=\frac{1041}{1000}$ $=1.041$	1.000		17.445 $\bar{v}_i=\frac{17.445}{1000}$ $=0.017$	53933 $\sum_j\sum_k f_{ijk}v^2_{ijk}=\frac{53933}{1000000}$ $=0.053933$

軟ザツの材積推定と抽出誤差の計算

$$N_i=P_i N=0.108\times3245=351$$

$$V_i=N_i\bar{v}_i=351\times0.017=6.0\text{m}^3$$

$$P^2{}_{p_i}=\frac{4\times(1-0.108)}{500\times0.108}\times100^2=660.74,\quad P^2{}_N=9.0^2=81.00$$

したがって，$P^2{}_{N_i}=660.74+81.00=741.74$

$$\sigma^2{}_{\bar{v}_i}=\frac{\sum_j\sum_k f_{ijk}v^2{}_{ijk}-v^2{}_i/f_i}{f_i(f_i-1)}=\frac{0.053933-0.020068}{54\times53}=0.0000118326$$

$$\sigma_{\bar{v}_i}=0.0035$$

$$P_{\bar{v}_i}=\frac{2\sigma_{\bar{v}_i}}{\bar{v}_i}\times100=\frac{2\times0.003\times100}{0.017}=35.0\%,\quad P^2{}_{\bar{v}_i}=1225.0$$

$$P_{V_i}=\sqrt{P^2{}_{N_i}+P^2{}_{\bar{v}_i}}=\sqrt{741.74+1225.0}=44.3\%$$

第6表 樹種全体の材積推定
Table 6. Volume estimation of all species

全 体

$D(j)$ \ $H(k)$		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum_k f_{jk}$	P_j
4	f_{jk} v_{jk}	14 2	33 2	96 3	45 4	14 4	1 5		2 10				205	0.410
6	f_{jk} v_{jk}		3 10	10 10	27 10	39 10	25 10	3 10	2 10				109	0.218
8	f_{jk} v_{jk}			1 10	7 10	24 10	29 20	9 20	6 20	1 30			77	0.154
10	f_{jk} v_{jk}					2 20	6 30	10 30	10 40	10 40	1 40		39	0.078
12	f_{jk} v_{jk}						4 40	7 40	4 50	7 50	11 60	2 60	35	0.070
14	f_{jk} v_{jk}						2 50	5 60	6 70	1 70	4 80		18	0.036
16	f_{jk} v_{jk}						2 70	3 80	3 90	2 100	1 100	1 110	12	0.024
18	f_{jk} v_{jk}										1 130	1 140	2	0.004
20	f_{jk} v_{jk}							1 120					1	0.002
22	f_{jk} v_{jk}											1 210	1	0.002
26	f_{jk} v_{jk}								1 220				1	0.002
													500	1.000

樹種割合およびhaあたり本数の推定

樹 種	f_i	$P_i=\frac{f_i}{f}$	$N_i=P_iN$
ナ ラ	272	0.544	1765
ク リ	51	0.102	331
ザ ツ	123	0.246	798
軟 ザ ツ	54	0.108	351
	$f=500$	1.000	$N=3245$

（5番目に近い立木までの距離から推定したhaあたり本数）

全体の推定および抽出誤差の計算

公式（20）より

$$\bar{v}=\sum_i P_i\bar{v}_i=\overset{\text{ナラ}}{0.544\times0.019}+\overset{\text{クリ}}{0.102\times0.027}+\overset{\text{ザツ}}{0.246\times0.015}+\overset{\text{軟ザツ}}{0.108\times0.017}=0.0186\doteqdot0.019$$

haあたり全材積は公式（21）より

$$V=N\bar{v}=3245\times0.0186=60.4\text{m}^3\ (\overset{\text{ナラ}}{33.5}+\overset{\text{クリ}}{8.9}+\overset{\text{ザツ}}{12.0}+\overset{\text{軟ザツ}}{6.0})$$

また第2～5表より

$$\sum_i\sum_j\sum_k f_{ijk}v^2{}_{ijk}=\overset{\text{ナラ}}{0.236991}+\overset{\text{クリ}}{0.103423}+\overset{\text{ザツ}}{0.110074}+\overset{\text{軟ザツ}}{0.053933}=0.504421$$

公式（12）より

$$v=\sum_i v_i=\overset{\text{ナラ}}{5.149}+\overset{\text{クリ}}{1.369}+\overset{\text{ザツ}}{1.864}+\overset{\text{軟ザツ}}{1.041}=9.423$$

したがって公式（15）より

$$\sigma^2{}_{\bar{v}}=\frac{0.504421-9.423^2/500}{500\times499}=0.00000130996 \quad \therefore\ \sigma_{\bar{v}}=0.001145\doteqdot0.001$$

∴ 公式（22）より $P_{\bar{v}}=\dfrac{2\times0.001}{0.019}\times100=10.5\%$

また p.100（a）の表より $P_N=9.0\%$

したがって公式（23）より $P_V=\sqrt{10.5^2+9.0^2}=13.8\%$

$$N_{ij}=P_{ij}\ N_i\left(=\frac{\sum_k f_{ijk}}{f_i}\cdot\frac{f_i}{f}\cdot N=\frac{\sum_k f_{ijk}}{f}\cdot N\right)\quad\cdots\cdots(25)$$

で求まり，もちろん

$$\sum_j N_{ij}=\sum_j P_{ij}\cdot N_i=N_i\quad(\because\ \sum_j P_{ij}=1)$$

となる。また樹種ごとのhaあたり材積は（18)，(24）より

$$V_i=N_i\bar{v}_i\quad\cdots\cdots(26)$$

この抽出誤差の百分率は95% 信頼度で

$$P_{V_i}=\sqrt{P^2{}_{N_i}+P^2{}_{\bar{v}_i}}\quad\cdots\cdots(27)$$

ただし，
$$P^2{}_{N_i}=P^2{}_{p_i}+P^2{}_N\quad\cdots\cdots(28)$$

で
$$P^2{}_{p_i}=\frac{t^2q_i}{fP_i}\times 100^2\quad\cdots\cdots(29)$$

ただし，　$q_i=1-P_i$

また（14）式より

$$P_{\bar{v}_i}=\frac{t\sigma_{\bar{v}_i}}{\bar{v}_i}\times 100\quad\cdots\cdots(30)$$

第2～6表の計算例に用いたNは5番目に近い木の平均距離を用いて推定した値を用いた。これによればha あたり材積は，樹種全体で13.8%，本数の多いナラでは16.1% の精度で推定されている。

4. む　す　び

（8）式より $P_{\bar{v}}$ および P_N に応ずる P_V を計算すれば，次表のとおりになる。

P_N ＼ $P_{\bar{v}}$	2	4	5	6	8	10
2	2.8	4.5	5.4	6.3	8.2	10.2
4	4.5	5.7	6.4	7.2	8.9	10.8
5	5.4	6.4	7.1	7.8	9.4	11.2
6	6.3	7.2	7.8	8.5	10.0	11.7
8	8.2	8.9	9.4	10.0	11.3	12.8
10	10.2	10.8	11.2	11.7	12.8	14.1

したがって，P_V を10% 以内の誤差でおさえようとすれば，$P_{\bar{v}}$，P_N のいずれかをそれぞれ8％，6％以内でおさえなければならない。

haあたり本数Nを予想すれば，第1表より逆に $\bar{x}_i=\sqrt{C_i/N_i}$ を用いて，i 番目までの平均距離が想定でき，信頼限界もkに応じて予想できる。したがって，これを8％または6％以下にするための標本点数kを調査前に予想できる。

単木平均材積に関しては，単木材積の変動係数によって $P_{\bar{v}}$ に応ずる測定本数fは，次式で大ざっぱに求めることができる。

$$f=\left(\frac{2C}{P_{\bar{v}}}\right)^2$$

いま $C=130\%$ とすれば，$P_{\bar{v}}=8\%$ とするためには

$$f=\left(\frac{2\times 130}{8}\right)^2=1{,}056\ \text{本}$$

必要である。

本調査では1,000本必要とすれば，1つの調査点で10本測定すれば，その目的は達せられたであろう。

したがって本調査では，100点の各調査点で5番目に近い立木までの距離測定と1点あたり10本の材積測定を行なえば，ほぼ12%程度で全材積を推定できたであろう。

また本調査では，用材1類，2類は別に全部測定し，この方法によって薪材のみの材積推定を行なうという立場をとったが，樹種別の推定方法を用材1類，2類にも適用すれば同様にその材積を把握できるであろう。

調査点で数本の木の直径，樹高を測定するかわりに，直径測定のみを行ない，別途に樹高曲線をつくるための資料を集めれば，直径階別本数分配表になり，公式中添字の k が必要でなくなり，もっと計算は簡単になるであろう注)。

注）樹高曲線を用いた場合の推定法

樹　種	直径階	樹　高	材　積	本　数	$f_{ij}\ v_{ij}$	$f_{ij}\ v^2_{ij}$
i	d_{ij}	h_{ij}	v_{ij}	f_{ij}		
合　計				$f_i=\sum_j f_{ij}$	$\sum_j f_{ij}\ v_{ij}$	$\sum_j f_{ij}\ v^2_{ij}$

i 樹種の本数　$f_i=\sum_j f_{ij}$

〃　合計材積　$v_i=\sum_j f_{ij}\ v_{ij}$

〃　単木平均材積　$\bar{v}_i=v_i/f_i$

樹種全体の本数　$f=\sum_i f_i=\sum_i\sum_j f_{ij}$

〃　合計材積　$v=\sum_i v_i=\sum_i\sum_j v_{ij}$

〃　単木平均材積　$\bar{v}=v/f$

距離から求めたhaあたり本数を N とすると

i 樹種の本数割合　$P_i=f_i/f$

i 樹種のhaあたり本数　$N_i=P_i N$

〃　〃　材積　$V_i=N_i\ \bar{v}_i$

〃　推定誤差率　$P_{V_i}=\sqrt{P^2{}_{N_i}+P^2{}_{\bar{v}_i}}$

ここに　$P_{N_i}=\sqrt{P^2{}_{p_i}+P^2{}_N}$，$P_{\bar{v}_i}=\dfrac{t\sigma_{\bar{v}_i}}{\bar{v}_i}\times 100$

$$\left\{P^2{}_{p_i}=\frac{t^2 q_i}{fP_i}\times 100^2\right\},\ \left\{\sigma^2{}_{\bar{v}_i}=\frac{\sum_j f_{ij}\,v^2{}_{ij}-v^2{}_i/f_i}{f_i\,(f_i-1)}\right\}$$

haあたり材積　$V=N\,\bar{v}$

推定誤差率　$P_V=\sqrt{P^2{}_N+P^2{}_{\bar{v}}}$

ここに P_N は本文と同じもの

$$P_{\bar{v}}=\frac{t\sigma_{\bar{v}}}{\bar{v}}\times 100$$

$$\left\{\sigma^2{}_{\bar{v}}=\frac{\sum_i\sum_j f_{ij}\,v^2{}_{ij}-v^2/f}{f\,(f-1)}\right\}$$

要するに本法は標準地の設定を必要としないので，容易に測定できるため調査日数の節約となり，同時に客観的に標本誤差の評価もできるので簡単かつ有効な低質広葉樹林の調査法といえよう。

文　　献

1) ESSED, T.E. : Estimation of standing timber. Wageningen, Holland, (1957)
2) 鈴木太七：名古屋大学農学部演習林報告, 4, pp. 51～58, (1965)
3) MORISITA, M. : Mem. Fac. Sic., Kyushu Univ., Ser. E., 1, pp. 187～197, (1954)
4) 熊谷才蔵：日本林学会誌 48, 2, pp. 66～67, (1966)

A Simplified Sampling Method for Estimating the Volume of a Fuelwood Forest

Masahisa NISHIZAWA[(1)]

(Résumé)

A simplified sampling method for estimating the volume in a fuelwood forest being administrated by Kooriyama district forest office of Maebashi regional forest office was developed. The volume of this forest was estimated not by the plot method, but by both the number of stems per hectare estimated from the mean distance from a sampling point to the i-th nearest tree, and the mean volume per tree which was estimated from a few of the trees measured in each sampling point.

1. **Theory**

Assuming that trees in a forest are randomly distributed, the distribution of the distance from a sampling point to the 3rd nearest tree has been derived by T. E. ESSED (1957). A revised proof was given by T. SUZUKI (1965). Results of this were as follows:

Estimated number of stems per ha : $N = 8789/\bar{x}^2_3$ ······(1)

Confidence limits of N : $\frac{10^4}{\bar{x}^2_3}\left\{\frac{15}{16}-\sqrt{\frac{3-(15/16)^2\pi}{k\pi}}\right\}^2 < N$

$$< \frac{10^4}{\bar{x}^2_3}\left\{\frac{15}{16}+\sqrt{\frac{3-(15/16)^2\pi}{k\pi}}\right\}^2 \quad \cdots\cdots (2)$$

where $\bar{x}_3$ is the mean distance from a sampling point to the 3rd nearest tree and k is the number of sampling points.

Though MORISITA (1954) and SUZUKI assumed that trees in a forest were randomly distributed (*i. e.* POISSON distribution), S. KUMAGAI (1966) did not assume POISSON distribution and derived the probability distribution of the mean distance from a sampling point to the i-th nearest tree. The mean and variance of distance from a sampling point to the i-th nearest tree derived by him were as follows:

$$\bar{x}_i = \frac{\Gamma(i+1/2)}{\Gamma(i)}\sqrt{\frac{1}{\pi m}} \quad \cdots\cdots (3)$$

$$\sigma^2_{\bar{x}_i} = \left\{ i - \frac{\Gamma^2(i+1/2)}{\Gamma^2(i)} \right\} \frac{1}{\pi m} \quad \cdots\cdots (4)$$

where m is the number of stems per unit area.

From the results we can get the following formulae of the number of stems per ha (N_i)

Received October 2, 1969

(1) Chief, Mensuration Unit, Management Section II, Forest Management Division.

and 95 % confidence limits.

$$N_i = \frac{C_i}{\bar{x}^2_i} \quad \cdots\cdots(5)$$

$$\frac{D_i}{\bar{x}^2_i} < N_i < \frac{E_i}{\bar{x}^2_i} \quad \cdots\cdots(6)$$

where if we put $A_i = \frac{\Gamma(i+1/2)}{\Gamma(i)}$ and $B_i = \left\{ i - \frac{\Gamma^2(i+1/2)}{\Gamma^2(i)} \right\}$,

$$C_i = \left(\frac{A_i}{\pi}\right)^2 \times 10^4$$

$$D_i = \left(\frac{10^4}{\pi}\right)^2 \left(A_i - t\sqrt{B_i/k}\right)^2$$

$$E_i = \left(\frac{10^4}{\pi}\right)^2 \left(A_i + t\sqrt{B_i/k}\right)^2$$

where t is a value of Student's t distribution with (k-1) degrees of freedom and 5 % level.

Table 1 shows the number of stems per ha (N_i) and 95 % confidence limits estimated from the mean distance ($\bar{x}_i$) from a sampling point to the i-th nearest tree for i from 1 to 10 and k from 9 to 100. N_3 and its confidence limits derived from SUZUKI's formula (1) and (2) coincide with the result of Table 1 perfectly.

When a distance from a sampling point to the i-th nearest tree, and d. b. h. and tree heights of a few trees around a sampling point are measured in k-sampling points, we can estimate the volume par ha in a forest as follows:

$$V = N\bar{v} \quad \cdots\cdots(7)$$

$$\sigma^2_V = N^2\sigma^2_{\bar{v}} + \bar{v}^2\sigma^2_N \quad \cdots\cdots(8)$$

where V is estimated volume per ha in a forest, N is the number of stems per ha estimated from the mean distance ($\bar{x}_i$) from a sampling point to the i-th nearest tree (Table 1), $\bar{v}$ is the mean volume per tree estimated from f-sample trees, σ^2_V is the variance of V, $\sigma^2_{\bar{v}}$ is the variance of $\bar{v}$ estimated from the formula (9) and σ^2_N is the variance of N estimated from Table 1.

$$\sigma^2_{\bar{v}} = \frac{t^2\Sigma(v-\bar{v})^2}{f(f-1)} \quad \cdots\cdots(9)$$

If standard errors of N, $\bar{v}$ and V are expressed by percentages of the mean, *i.e.* P_N, $P_{\bar{v}}$ and P_V respectively, we can get the following formula.

$$P_V = \sqrt{P^2_{\bar{v}} + P^2_N} \quad \cdots\cdots(10)$$

2. A field test

A field test was done in 6.6 ha of a fuelwood forest in a sub-compartment of 87 compartment being administrated by Kooriyama district forest office. Systematic sampling was adopted and the interval between sampling points was decided by the following formula.

$$l = 100\sqrt{A/k} \quad \cdots\cdots(11)$$

where l is the interval between sampling points in meters,

A is total area of the test field in hectare and

k is the number of sampling points.

In this field test 100 sampling points were sampled from 6.6 ha of a fuelwood forest, so from the formula (11) we got

$$l = 100\sqrt{6.6/100} = 25.7\text{m}$$

Accordingly, a systematic sampling with the interval 25 m was carried out in this forest as shown in Fig. 1. Horizontal distances from a sampling point to i = 1, 2, 3, 4 and 5 th nearest trees, and d. b. h. and tree heights of these 5 trees were measured in each sampling point.

Number of stems per hectare estimated from the mean distances ($\bar{x}_i$; $i=1$, 2, 3,4 and 5), 95 % confidence limits ($k=100$) calculated from Table 1 and sampling errors are shown in the following table.

i	$\bar{x}_i$ (m)	Ni (Number of stems per ha)	95 % confidence limits		Sampling error (%)
			Lower	Upper	
1	1.02	2403	1930	2928	20.8
2	1.38	2954	2544	3394	14.4
3	1.59	3477	3083	3894	11.7
4	1.88	3385	3053	3734	10.1
5	2.16	3245	2960	3543	9.0

Estimated number of stems per ha from the 5th nearest tree ($N=3245$) has a minimum sampling error ($P_N=9.0$ %).

Calculation methods of mean and variance of volume per tree for each and all species from 500 sample trees are shown in Table 2 ~ Table 6.

In these tables, i, j and k show species, diameter class and height class respectively. And f_{ijk} and v_{ijk} are the number of stems and the tree volume for i-species, j-diameter class and k-height class respectively. If f_i and v_i are total number of stems and volume for i-species respectively, the mean volume of i-species is given by the following formula.

$$\bar{v}_i=v_i/f_i=\sum_j\sum_k f_{ijk}\,v_{ijk}/\sum_j\sum_k f_{ijk} \quad\cdots\cdots(12)$$

When total number of stems and volume in a forest are expressed by f and v respectively, the mean volume per tree is as follows ;

$$\bar{v}=v/f=\sum_i v_i/\sum_i f_i=\sum_i\sum_j\sum_k f_{ijk}\,v_{ijk}/\sum_i\sum_j\sum_k f_{ijk} \quad\cdots\cdots(13)$$

Now when P_{ij} and $\bar{v}_{ij}$ are the proportion of number of stems and the mean volume for j-diameter class of i-species respectively, we have the following formulae.

$$P_{ij}=\sum_k f_{ijk}/f_i \quad\cdots\cdots(14)$$

$$\bar{v}_{ij}=\sum_k f_{ijk}\,v_{ijk}/\sum_k f_{ijk} \quad\cdots\cdots(15)$$

Then we get

$$\bar{v}_i=\sum_j P_{ij}\,\bar{v}_{ij} \quad\cdots\cdots(16)$$

If we put P_i the proportion of number of stems for i-species,

$$P_i=f_i/f \quad\cdots\cdots(17)$$

Then we have also the following formula of the mean volume per tree in a forest.

$$\bar{v}=\sum_i P_i\,\bar{v}_i \quad\cdots\cdots(18)$$

Variances of $\bar{v}_i$ and $\bar{v}$ are given by the following formulae.

$$\sigma^2_{\bar{v}_i}=\sum_j\sum_k f_{ijk}(\bar{v}_{ijk}-\bar{v}_i)^2/f_i(f_i-1)$$
$$=(\sum_j\sum_k f_{ijk}\,v^2_{ijk}-v^2_i/f_i)/f_i(f_i-1) \quad\cdots\cdots(19)$$

$$\sigma^2_{\bar{v}}=\sum_i\sum_j\sum_k f_{ijk}(v_{ijk}-\bar{v})^2/f(f-1)$$
$$=(\sum_i\sum_j\sum_k f_{ijk}\,v^2_{ijk}-v^2/f)/f(f-1) \quad\cdots\cdots(20)$$

Total volume per ha in a forest is given by the following formula.

$$V = N\,\bar{v} \qquad \cdots\cdots(21)$$

Sampling error (%) of $\bar{v}$ is given by (18) and (20) as follows:

$$P_{\bar{v}} = (t\,\sigma_{\bar{v}}/\bar{v}) \times 100 \qquad \cdots\cdots(22)$$

Then we get the sampling error of total volume per ha in a forest from the following formula.

$$P_V = \sqrt{P^2{}_N + P^2{}_{\bar{v}}} \qquad \cdots\cdots(23)$$

According to Table 6, total volume per ha for all species and its sampling error were 60.4 m^3 and 13.8 % respectively.