

# 森林調査におけるプロットレスサンプリング の理論的研究

大 友 栄 松<sup>(1)</sup>

Eishoh Onitomo : Theoretical Research on Plotless Sampling  
Methods in Forest Survey

要 旨：本研究は、標本調査理論の立場から、プロットレスサンプリングのすべての方法に通用する統一的理論を構成し、それに基づきこれらの方法について従来から問題となっている事項を説明し、ストランド法を改良発展させた2方法を上の理論から考案し、最後にプロットサンプリングとの比較検討を行なったものである。

構成した理論では、各林木に面積一定 ( $a_j$ ) の拡大領域を事前に与え、その中の各点は  $x_j/a_j$  の値をもつとし、数領域の重なっている地点はそれだけの  $x_j/a_j$  の和とする。この期待値は単位面積当たりの  $x$  の合計となり、その母分散とその推定子を示した。すなわち、各方法における断面積、材積、円柱体積とくに本数、平均直径、平均樹高の推定子やその分散などにつき独自の方法を示した。ストランド法を発展させた2方法についても同様な検討を行なった。プロットレスサンプリングにおける諸問題すなわち、林縁効果による偏りの除去につき3方法を提示し、さらに分散と各林木の拡大領域の大きさとの関係、群度との関係、林分面積との関係を理論的に研究し実証した。幹断面に抽出点がおちたとき、それを無視する偏りの期待値を求め、WZP法とストランド法での形数と材積の関係を検討し、最後にプロットレスサンプリングはプロットサンプリングに比べて効率は高いが精度は劣るという従来の諸研究結果を検討し、必ずしも精度は劣らないことを理論的にも実際的にも示した。

## 目 次

はじめに	32
第1章 プロットレスサンプリングの概要	34
1.1 ビッターリッヒ法	34
1.2 ビッターリッヒ法の他の証明	38
1.3 平田—EsSED 法	39
1.4 STRAND 法	41
第2章 プロットレスサンプリングの一般原理	44
2.1 プロットレスサンプリングの考え方	44
2.2 プロットレスサンプリングの一般理論	46
2.2.1 単位面積あたりの総計の推定子およびその分散	46
2.2.2 PALLEY と HORWITZ の証明との関係	52
2.2.3 単位面積あたりの本数の推定子およびその分散	54
2.2.4 単木平均値の推定と誤差	57
第3章 森林調査への応用	67
3.1 ビッターリッヒ法	67
3.2 平田—EsSED 法	71
3.3 STRAND 法	75
3.4 L1 法	78
3.5 L2 法	81

1971年7月6日受理

(1) 経営部

3.6	各種線抽出法の比較および点抽出と線抽出法との比較	83
3.7	林分形数を用いて材積推定する場合のビッターリッヒ法と STRAND 法との比較	87
3.8	収穫表を利用して材積推定する場合	89
第4章	プロットレスサンプリングにおける諸問題	90
4.1.1	林縁効果による偏り	90
4.1.2	林縁効果の偏りの除去についての諸方法	96
4.1.3	線抽出法における林縁バイアスの修正	99
4.2	拡大定数の変化による推定値の母分散の変化	100
4.3	林の群度による母分散の変化	106
4.4	プロットレスサンプリングで立木断面内に抽出点が落ちた場合、測定不能なため生ずる偏り	110
第5章	プロットサンプリングとプロットレスサンプリングとの関係について	111
むすび		121
要約		122
謝辞		126
文献		126
Summary		131
Appendix 1.	形状高 ( $fh=v/g$ ) 表	136
2.	形状断面 ( $fg=v/h$ ) 表	145
3.	$v/d$ 表	156
4.	$d^2/4l^2$ 表	164

## はじめに

1947年オーストリアの WALTER BITTERLICH は Allgemeine Forst- und Holzwirts Zeitung の58巻 11/12号に、Die Winkelzählmessung と題する3ページにわたる論文を發表し<sup>9)</sup>、さらに翌1948年同誌の1/2号に Die Winkelzählprobe と題し、わずか2ページの小論文ではあるが、林業、林学における画期的な方法を發表した<sup>10)</sup>。しかし、發表の当初はほとんどだれも注目する人がなく、わずか、同じ1948年、オーストリアの J. WANNER が前記の雑誌にビッターリッヒの方法を紹介しただけであった<sup>11)</sup>。しかも、かれは、1946年かれが發表した鏡による円形プロットを設定する方法<sup>12)</sup>とビッターリッヒ法を併用すると、正確で時間もかからずに本数や材積の調査ができると述べているにすぎない。1949年にはビッターリッヒは、レラスコープを製作して、同誌 60 巻 5/6号に Das Relaskop と題し發表したが<sup>13)</sup>、まだ林学の世界では話題にもならなかった。しかし同年、Wien 大学の H. FLATSCHER 教授にその業績を認められ、学位を授与された。

かれの方法がオーストリア以外の国で初めて紹介されたのは英国で、1950年 E. A. KEEN により、The Relascope の題名の下に紹介された<sup>14)</sup>。1951年に至り、アメリカのミシガン大学の A. R. STAGE<sup>10)</sup>、蘭領インドネシアの J. H. A. FERGUSON により取りあげられ<sup>15)</sup>、しだいに世界各国の測樹学研究者間に知れわたってきた。1952年に入り、年初、アメリカの南部林業試験場の L. R. GROSENBAUGH が JOURNAL OF FORESTRY の1月号に「Plotless timber estimates... new, fast, easy」の題の下にビッターリッヒ法による林分断面積、直径階ごとの木数の推定法などを既存における同法の発展とともに詳細な発表を行なった<sup>16)</sup>。北欧においても同年 G. WEST-NIELSEN は「En grundflademaler」の題名で紹介した<sup>17)</sup>。オーストラリアでは同じ年、D. A. N. CROMER が Australian Forester (16)<sup>18)</sup>で、さらに、日本では、同年九

州大学の木梨謙吉により雑誌「林業経済」5月号に、「新しい材積測定法」という題で L. R. GROSENBAUGH の論文の内容が紹介された<sup>60)</sup>。このようにして1952年に至り、この方法は急速に各国の測樹学者、研究者の注目を引きはじめた。一方、オーストリアやその隣国の西ドイツでは、試験的な実行は試みられていたらしいが、発表された報告はわずかに1952年 Allgemeine Forstzeitung 15/16号の E. BURKART の「Grenzstammzahl und Maximale Kreisfläche bei der Winkelzählprobe」と1953年同誌上の M. PRODAN の「Genauigkeit der Winkelzählprobe nach Bitterlich」にすぎなかった<sup>60)</sup>。しかしながら、L. R. GROSENBAUGH の論文は各国の測樹関係の学者、研究者の反響を呼び、ビッターリッヒ法は全世界の測樹界に普及し、1953年以後今日に至るまで、その研究調査の報告はおそらく数百に及ぶものと思われる。したがって、この実験研究を行なう器械も、各国で種々考案され、ビッターリッヒの当初考案した1mの長さの棒の先端に、棒に直角に、1cmおきに目盛をつけた20cmの長さの板を取りつけたきわめて原始的なものから、漸次改良され、光学的な器械も各種考案された。ビッターリッヒ自身も、レラスコープという器械を1949年考案し、それを1952年、1955年、1958年、1962年と改造を加えている<sup>11)14)15)17)</sup>。日本でも扇田、前沢両氏考案の器械をはじめとし<sup>98)</sup>、若干の人々により各種の器械が考案され、最近では、デンドロメーター、シルバースコープなどの光学的器械の出現を見ている<sup>65)66)116)</sup>。

これと同時に胸高断面積合計の推定に有効なビッターリッヒ法を、測定困難な平均樹高の測定に利用しようという研究が、東京大学の平田種男およびオランダの F. E. ESSED により行なわれ、1955年ほとんど同時に発表された。平田はさらにそのための器械としてコノメーターというものを考案した<sup>85)47)</sup>。

上記の諸法は、測定者が林内の数点に立ち、各点で器械を360度回転して、周囲の木について観測する方法であるが、Norway の L. STRAND は、点ではなく線上を歩いて測定する方法を考案し、これにより林分平均高、材積の推定ができることを1957年 Norsk Skogbruk (3: 535~8) Relaskopisk, hoyde-og kubikk massebestemelse に発表した<sup>102)108)</sup>。

以上各氏の方法は、その実行方法こそ異なるが、実は一連の理論の下に統一できるものである。また、これらの諸法にはそれぞれ実行面では幾多の問題もあり、各研究者により指摘され、研究されつつある現状である。

しかしながら、実際面についての研究調査の報告が多いにもかかわらず、理論面からの研究はきわめて少ない。もちろん、ビッターリッヒ自身は簡単な証明を付しており、その後、M. PRODAN<sup>90)91)</sup>、H. D. S. FINCH<sup>97)</sup>、L. R. GROSENBAUGH<sup>40)41)</sup> や日本でも大友<sup>82)</sup>、平田<sup>60)</sup>、大隅<sup>81)</sup>などによりビッターリッヒ法の推定は不偏であることは種々の見地から証明されたが、標本調査理論の立場から十分な証明といえるものはなかった。

すなわち、推定値の信頼性、標本誤差の面についてふれた理論的に確認された研究はなかったといつてよい。ただ一つ、M. N. PALLEY と L. G. HORWITZ は断面積と材積のみについて論じているにすぎない<sup>86)</sup>。STRAND に発想する line sampling についての研究は現在までのところ、ほとんどなかったといつても過言でない。

この研究において、筆者は標本調査理論の立場からこれらの一連の方法に通用する統一的理論を展開し、それに基づき、これらの方法を実行する際に生ずる諸種の問題に説明を与え、さらに新しい調査法を提案し、その実行成果を検討した。

## 第 1 章 プロットレスサンプリングの概要

プロットレスサンプリングというのは、古くから林業で用いられていた一定の形状と面積をもつ標本地や標準地を林内に選り、必要な情報を林木よりうるプロットサンプリングに対応して呼称されるもので、プロットレスサンプリングでは上述のような sample plot を設定せず、また面積や形状についても、特に固定した考えをもたない。とくに、面積についてはそうであるが、ただし、形状については現在のところ円または長方形に限定されている。しかし、林縁効果を排除するようなより一般的なプロットレスサンプリングを考える場合は、形状についても面積と同様、自由に考える方がよい。一般にプロットレスサンプリングというと、ビッターリッヒ法、平田—ESSED 法を含むが、前者は point sampling, variable plot (radius) method, 後者は line sampling の用語が英米で用いられ、ビッターリッヒも「Vorteile der variablen Probekreis Technik (Allg. Forstztg. 1960, 70 (11/12))」<sup>90)</sup> で Variable Probekreis という用語を使用している。筆者の述べるものはかれの方法以外のものも広く含むものであるから、むしろ Variable Probefläche Methode とでも呼ぶべきであろう。

プロットレスサンプリングの発見は、1947年のビッターリッヒの論文にほかならないが、かれの考えは林木の胸高直径と林木相互の距離はある関係にあるという19世紀後半より述べられた説、あるいはこの考えのもととなった林木の本数と林の平均直径は林齢、地位に関係なく、一定の関係にあるという WIMMEN-AUER の法則などを考察し、林分の計量値が面積単位に表わされることから、一挙にこの値をばくしようとしたものと考えられる。

プロットレスサンプリングの実行方法の種類としては、林内に数点を抽出し、各点において周囲林木の胸高位置をある一定角で視準し、その角度をはみだす木のみ数えあげていくというビッターリッヒの方法 (WZP と略す) と、これを垂直方向に、すなわち樹高に対し応用する平田—ESSED の方法 (cone method) がある。また、1957年発表された L. STRAND の方法は、林内に一定長 (5 πm) の線分を設け、その線分上を歩き片側の木について、ビッターリッヒ法と平田—ESSED 法を実行するものである。さらに1964年、筆者はこの line sampling で cone-method のみより平均直径、平均樹高、本数、胸高断面積合計、材積などを推定する方法を発見し、これにより収穫表の吟味を行なった<sup>84)85)</sup>。

次にこれらの方法の概要を述べる。ただし、筆者の方法は別途後述する。

### 1.1 ビッターリッヒ法

1947年ビッターリッヒの発表した方法は、翌年発表した方法とは異なり、むしろ後年 STÖHR の提唱した方法<sup>101)</sup>、SPURR の point density<sup>99)</sup> にほとんど類似のもので、幹距法的なものであった。後の両者の方法が日本では比較的知られているのに反し、それよりはるかに古く発表されたビッターリッヒの最初の方法については、あまり知られていないが、この方法に基づいて現在のビッターリッヒ法が生まれたという意味で1947年のかれの論文は貴重な文献といえよう<sup>9)</sup>。かれによれば、「標準地法は常に2測定を必要とする。すなわち、標準地の面積とその上の林木の測定が必要で、この比を求め全体の量を決定する。Winkelzählverfahren の根本思想はこの比を林内で直接求めようとするものである。」その比すなわち ha あたり樹種別断面積をもとめる方法を、次に述べるように行ない、これと別に樹種ごとの平均木の樹高測定を行ない、各平均木の形数を樹種別の形数表より見出し、これらに乗じて ha あたり材積を定める。ここで必要な ha あたり断面積は次のような考え方、実行方法により求める。

いま、ha あたりの断面積を  $G$  (単位 $m^2$ )、全林木の直径がすべて  $d$  (単位 $cm$ ) で等しいと仮定し、しかも正三角形の頂点に各林木が等距離  $a$  (単位 $m$ ) に立っていると考えると、

$$G = \frac{d^2}{4} \pi \cdot \frac{10,000}{a^2 \frac{1}{2} \sqrt{3}} \cdot \frac{1}{10,000} = \left(\frac{d}{a}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \left(\frac{d}{a}\right)^2 \cdot 0.9$$

となる。しかし、一般に森林では、各林木の  $d$  も、また樹幹距離も等しくはないが、よく考えて見るとわかるように、どんな不均一な林分でも、 $d$  でも  $a$  でも多数測定して見るとその平均値のまわりに GAUSS の誤差曲線や MAXWELL の分布曲線のように測定値が分布していることがわかる。このことは  $d/a$  についてもあてはまり、どの林分でも  $d/a$  の平均値が存在するものであるから、これを見い出せば上式より ha あたり断面積を求めることができる。もちろん正確な  $d/a$  は、ただ1回の測定では求められないが、多数測定すれば十分可能である。すなわち任意の  $dy/ax$  (これを Winkelzahl という、 $dy$  は  $cm$ 、 $ax$  は  $m$  単位) を多数測定し、その中央に近い値にのみ重きをおく。なお、この方法を材積決定の際利用すると、標準地法の不確実性 (林分の代表性という問題など) の発見に役だつし、必要な場合はその不確実性を数量的にも表わせる。

Winkelzahl  $dy/ax$  の測定には、1 m の長さの棒の先に、20cm の長さの定規を直角に取り付け、1 cm ごとに目盛り、5 cm ごとに太い目盛りを付けた器具を用いる。測定者は、定められた木のそばに立って、目のすぐ下にこの棒の一端をあて、棒を水平にし他端の定規も水平にして、隣接木を視準し、この定規から Winkelzahl を  $cm$  単位に読みとる。調査は平地では大体平行な帯線をとる、その上を歩きながら、傾斜地では蛇行しながら行なう。測定点の距離は、30~60歩の定距離とし、そこで、まず測定の起点となる木を定め、その最も近くの4本の木について樹種を区別せず Winkelzahl を測る。これは、あとで総断面積推定に用いられるので、ビッターリッヒはこれを Grundmessungen と呼んだ。一方、この測点を中心として、隣接木との距離のおよそ3倍の任意の円内の木の Winkelzahl を樹種別に測る。これは大体15~20本くらいで、かれはこれを Fangmessungen と呼んでいる (この方法は、後年 STÖHR や SPURR の行なった方法と酷似している)。これにより、あとで樹種別断面積を計算する。なお、各樹種の平均木の直径の1/2以下の木は測定せず、ないものとする。注意すべきことは、4の Grundmessungen と Fangmessungen は重複して記載されることである。調査結果は Table 1 のようにまとめられ、断面積が計算される。

ビッターリッヒの  $d/a$  の求め方は Table 1 からわかるように Grundwinkelzahl に対しては全体の計52の1/2の26番目の値を下の方から求めていき、最後に補間して5.06と定め、これより ha あたり断面積を求めている。Fangwinkelzahl の方も下の方から中央の方に向かって全体の計の10%のところの Winkelzahl を前同線求め、さらにその下の表のような方法で樹種別に ha あたり断面積を決定している。

ビッターリッヒのこの方法は上述のように、幹距法が基本的な思想となっていることは疑いもないが、その理論ならびに実際上の効果についてはかなり問題を含んでいる。しかし、この論文発表の約半年後に同じ Allgemeine Forst- und Holzwirts Ztg. の1948年の59 (1/2) 巻に現在ビッターリッヒ法と呼称されされている方法をかれは発表した<sup>10)</sup>。

かれの発表した方法によれば、個々の木の  $d/a$  を測るかわりに、林内の任意の点に立ち、 $d/a=1.41$  以上となる周囲の木の本数を数え、それを半分にすると ha あたりの断面積が得られる。これは、円形標準地内である仮定をした限界値以上の  $d/a$  の和は、林の断面積に比例するというビッターリッヒの観察に基

Table 1. ビッターリッヒによる Winkelzähl の調査のまとめ方  
 “Winkelzähl Verfahren von BITTERLICH”

Winkelzähl	Grund-messungen		Fangmessungen							
			Fi (トウヒ)	Ta (モ ミ)	Lä (カラマツ)	Bu (ブ ナ)				
1		1	6	2		8				
2		2	14	5	6	9				
3		7	26	3	18	5				
4		11	21	2	9	4				
5		9	13	↑	6	1				
6	↑	7	8	1	1	3	↑	2		
7	22	4	6		↑	1	2			
8		3	3		4	1				
9		2	1			1				
10		1	1			—				
11		2	2			—				
12		1	—			1				
13		1	1							
14		—	—							
15		1	1							
16	↑	52	↑	103	↑	46	↑	29		
17	26 (50%)		10.3 (10%)	1.3 (10%)	4.6 (10%)		2.9 (10%)			
18	-22	5.50	-9.0	7.50	-1.0	4.50	4.0	6.50	-2.0	5.50
19	4/9	0.44	1.3/6 =	0.21	0.3/2 =	0.15	0.6/3 =	0.20	0.9/1 =	0.90
20		5.06		7.29		4.35		6.30		4.60

$5.06^2 = 25.60$

$25.60 \times 0.9 = 23.04 \text{m}^2/\text{ha}$

樹種別断面積 Basal area per ha by tree species

	<i>n</i>	<i>d/a</i>	$(d/a)^2$	$n \cdot (d/a)^2$	: 8159	$\text{m}^2/\text{ha}$
Fi	103	7.29	53.14	5473	0.671	15.46
Ta	13	4.35	18.92	246	0.030	0.69
Lä	46	6.30	39.69	1826	0.224	5.16
Bu	29	4.60	21.16	614	0.075	1.73
				8159	1.000	23.04

づいている。この限界値を小さくするほど数えられる木の本数が大となり、調査する円も大となり、結果は正確となる。しかし、限界値を小さくすれば遠い木は判別し難いとか、木が重なるとか実行上種々の困難が伴ってくる。そこで 1.41 は最もよいが、Grenzwinkelzahl として 2 をとると数えあげた本数そのものが ha あたり断面積となるから狭い面積の林分や、大きい面積の林でも繰り返し測定を行なう場合は 2 も捨て難いとしている。この理論におけるかれの証明は次のとおりである。

*a*, *d* は前述のとおりで、木の直径も同じでかつ木間の距離も等しく、正三角形配置とすると、Grundwinkelzahl *W* は、

$$W = \frac{d}{a} \dots \dots \dots (1.1)$$

$$G = \frac{d^2}{4} \pi \frac{10,000}{a^2 \frac{1}{2} \sqrt{3}} \cdot \frac{1}{10,000} = \left(\frac{d}{a}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = W^2 \cdot 0.9 \dots \dots \dots (1.2)$$

(G は ha あたり断面積)

いま、半径  $r = n \cdot a$  の円を描くと、円内にはいる本数は、

$$Z = \frac{(na)^2 \pi}{a^2 \sqrt{3}} = \frac{2n^2 \pi}{\sqrt{3}} = 3.6n^2 \dots \dots \dots (1.3)$$

ちょうど円周上にあつて、円周により切断される幹断面に対する Winkelzahl を Grenzwinkelzahl ( $W_g$ ) と呼び、円の中心を測定者の位置とすれば、

$$W_g = \frac{d}{an} = \frac{W}{n} \dots \dots \dots (1.4)$$

となり、 $W_g$  は円で測られる Winkelzahl の最小値を表わす。(1.4) から  $n$  を計算し、(1.3) に代入すると、

$$Z = 3.6 \left(\frac{W}{W_g}\right)^2$$

となり、さらに (1.2) により

$$Z = 3.6 \frac{G}{0.9 W_g^2} = \frac{4G}{W_g^2}$$

$$G = Z \cdot \frac{W_g^2}{4} \dots \dots \dots (1.5)$$

となり、 $W_g^2/4 = 1$  にするには、 $W_g = 2$  とおかなければならない ( $(W_g/2)^2$  をかれは Zählerfaktor とよんだ)。Grenzwinkelzahl を 2 とおき、測点の周囲の Winkelzahl 2 以上の木の本数を数えるときは、それがそのまま ha あたり断面積となる。しかし、ビッターリッヒは精度の面から  $W_g = \sqrt{2} = 1.414$  を用いるとよいと述べている。この原理は上の Grenzkreis 内で正三角形配置が崩れても成立することは当然考えられ、しかも数えられる本数もこの円内では変わらない。ただし、このような不規則な配置の林では、不規則性が全林にむらなく一様であること、少なくとも測定点のまわりに環状帯のような状態を呈さないことが必要である。なお、直径が異なった場合については次のようにかれは説明している。

立木距離  $a$  の正三角形配置の林分で直径  $d$  の木と等分に直径  $2d$  の木とが一緒に混交しているとしよう。この林の ha あたり断面積は、

$$G = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{d}{a}\right)^2 \cdot 0.9 + \left(\frac{2d}{a}\right)^2 \cdot 0.9 \right] = \frac{d^2 + 4d^2}{2a^2} \cdot 0.9$$

となる。Winkelzählung では直径  $2d$  の Grenzkreis は  $d$  の Grenzkreis の 4 倍の面積となるから、木の本数も 4 倍となる。このことから、異なる直径の場合にもこの方法が異論なく適用されることが判明しよう。かれはさらに老齢大径木では Grenzkreis が林縁外にとび出すので、本数の計算が過少になり、ha あたり断面積に間違つた結果を生ずることを認めている。なお  $W_g$  を大きくすると、現場での検視は容易になるが対応する円形標本地が小さくなる。林分が不規則な場合はできるだけ大きな標本地をとるべき

である。非常に不整な林分で 0.5 ha の標本地を実例にとり、 $W_g$  の値と結びついた百分率誤差と同じ  $W_g$  での、測定者の誤差間にはほとんど完全な逆数関係があることをも示している。この結果から  $W_g$  が 1.41~2.00 が最大の精度を示すことがわかったと述べている。

また、この測定用の器具としては、かれは 1 m の棒の先に長さ 14.1 mm、または 20 mm のブリキ板をとり付けたものを用いるとよいと述べている。傾斜の様な林地でもこの方法は利用できるが、数えた数を傾斜角の cosine でわらなければならないとしている。この欠点を除去するため翌 1949 年には、かれの方法を実行するに際し、傾斜に対し自動的に修正でき、かつ Pressler の望高、形状高や形数を見出すことのできるレラスコープを発表している。これは垂鉛と歯車を利用したものであったが、ついで 1952 年、スピーゲル-レラスコープが発表され、1955 年、1958 年と引き続きこの改造型が発表され、1962 年に現在のワイド目盛のレラスコープを発表している<sup>11)14)15)18)22)</sup>。WZP を実行するための器械は簡易なものからプリズムを利用する光学的な器械に至るまで、各国で各種の器械が考案されたが、これらについてはこの論文の主旨を離れるので記述することを省略する<sup>11)</sup>。

### 1.2 ビッターリッヒ法の他の証明

ビッターリッヒ法の証明については、いままでその推定の不偏性ということにつき各人各様の証明が与えられてきた。ここで代表的なものを若干取りあげ紹介する。

1952 年、グロセンボーの発表したビッターリッヒ法の下述の原理は、理論的な立場から妥当なものと思われるものである。

ある林分の林木の胸高断面をグラフ上に書いたとし、これに点格子板をあてて、木の断面内にはいる点数の合計を林分全域におちる総点数でわり、10,000 倍すると ha あたり断面積が  $m^2$  単位で得られることがわかる。いま、木の直径の 100 倍の直径をもつ円を描き、この円内にはいる点数（重複したものもそのつど数える）の合計を林地全域の点数でわり、10,000 倍し、さらに木の各断面が 100<sup>2</sup> 倍となっているので、10,000 でわると、その数値は ha あたりの断面積 ( $m^2$  単位) になる。

これに対し、1953 年に甲斐原は、拡大された断面は林地上重なりあうから、この重なり平均枚数を求めるものがビッターリッヒ法であるとした。拡大した断面を crediting laps と呼ぶが、この合計面積は (拡大率)<sup>2</sup> × (胸高断面積合計) に等しく、また (林地面積) × (平均カウント本数 = 重なり平均枚数) にも等しい。したがって、

$$\text{胸高断面積合計} = \frac{(\text{林地面積}) \times (\text{平均カウント本数})}{(\text{拡大率})^2}$$

で、上式で林地面積を 1 ha = 10,000  $m^2$  としたときの 林地面積 / (拡大率)<sup>2</sup> が断面積定数となる<sup>55)</sup>。

他の証明としては 1952 年の SPURR、1957 年の M. AFANASIEV<sup>1)</sup>、H. D. S. FINCH<sup>97)61)</sup>、1959 年の KENDALL, R. H. and SAYN-WITTGENSTEIN<sup>57)</sup> などがあげられるが、いずれも大同小異であるから、FINCH の方法を引用しよう<sup>87)</sup>。

いま、1 ha あたり半径  $r_i$  m の木の本数が  $f_i$  本で直径階が  $n$  個あるとすると、林分の ha あたり断面積は、

$$G = \sum_i^n f_i \pi r_i^2$$

となる。Fig. 1 で 0 点をランダムに選んだ抽出点の一つにおける測定者の位置とする。

$2a$  を器械のスリット幅とし、 $b$  を棒の長さとし、いずれも  $m$  単位にはかられているものとする。したがって、器械の検視角 (限界角)  $2\alpha$  は  $\tan \alpha = a/b$  で与えられる。 $R_i$  を半径  $r_i$  の木が数えられる最大

の距離とすれば,

$$\sin \alpha = \frac{r_i}{R_i}$$

半径  $r_i$  の木の  $Z_i$  木が、一つの抽出点で数えられるとすると、この半径の木の 1 ha あたり推定本数は,

$$\hat{f}_i = \frac{Z_i}{\pi R_i^2} \times (100)^2$$

この半径の木の推定断面積は,

$$\hat{f}_i \pi r_i^2 = 10,000 \frac{Z_i}{\pi R_i^2} \pi r_i^2 = 10,000 Z_i \sin^2 \alpha$$

$\alpha$  は定められているから、 $10,000 \sin^2 \alpha = k$  とおけば、 $G \equiv \sum_{i=1}^n f_i \pi r_i^2$  であるから 1 点で推定される ha あたり胸高断面積合計は、 $\hat{G} = \sum \hat{f}_i \pi r_i^2 = 10,000 \sin^2 \alpha \sum Z_i = k \sum_{i=1}^n Z_i = kZ$  となる ( $Z_i$  は 1 点でのカウント本数の計である)。

1960年、本部と大友は次の証明を発表した<sup>82)</sup>。平面座標系を考えて、この上に林があるとし、ある抽出点での WZP による読み数を  $Z$  とすれば,

$$E(Z) = \frac{\int z dx dy}{\int dx dy} = \frac{\int \sum \varepsilon_i dx dy}{\int dx dy} = \frac{\int \varepsilon_i dx dy}{\int dx dy}$$

$$\left( \varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{視角} \geq 2\alpha (\text{限界角}) \\ 0 & \text{視角} < 2\alpha \end{cases} \right)$$

樹木の占める地域では観測できないのでその分を補正すると、上式は

$$= \frac{\int \left\{ \pi \left( \frac{d_i}{2 \sin \alpha} \right)^2 - \pi \left( \frac{d_i}{2} \right)^2 \right\}}{\int dx dy} = \frac{\left( \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 \right) \sum \pi \frac{d_i^2}{4}}{\text{林地面積}}$$

$$= \frac{\text{胸高断面積合計}}{\text{林地面積}} \times \cot^2 \alpha$$

これから数えられた木の本数に  $10,000 \times \tan^2 \alpha$  をかけると、ha あたり断面積が得られる。このほかにプロダンの証明があるが、これは筆者が別途に紹介しており<sup>83)</sup>、サンプリングの立場から見ると多少疑問の点もあるので省略するが、他の人とは全く異なった見地から証明をしている。なおプロダンが問題にした不均質誤差を重視し、これを中心に大隅はその研究を報告している<sup>81)</sup>。

一方、1961年、M. N. PALLEY と L. G. HORWITZ は断面積と材積の推定の理論を述べ、林業家としては初めて分散の理論的問題にふれている<sup>86)</sup>。これは、この論文に関連するところが多いので別途論ずることにする。

### 1.3 平田—ESSED法

この方法は1955年、平田と ESSED によりほとんど同時に発表され、cone method または定角測高法と呼ばれるものである。次に、平田の1955年日本林学会誌 (37. 11) に発表した報告を引用して説明する。

「この理論は、ビッターリッヒの "Winkelzählprobe" (1948) と同じものである。彼が立木胸高断面積を定率で拡大した円の面積合計を求め、それを元へ縮めたが、ここでは立木の高さを定率で変えた長さを半径とし、立木の位置点を中心とする水平な円の面積合計を前者に倣って求め、そこから平均樹高の近

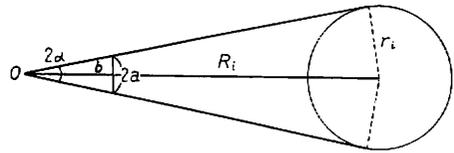


Fig. 1 ビッターリッヒ法の概念図形  
General concept of BITTERLICH'S method.

似を推定しようとするものである。いま、 $\beta$  を定角 (vertical critical angle) として、立木の樹高  $h_i$  (面積  $F$  内で、 $i=1, 2, \dots, N$ ) を定率  $\cot \beta$  で変えたもの  $h_i \cot \beta$  を半径とし、立木の位置点を中心として、平面上に描いた円が、面積  $F$  内にランダムに落とした  $K$  個の各点を  $Z_j$  ( $j=1, 2, \dots, K$ ) 回包むとすれば、 $F$  が十分に大きいときは、次の関係が近似的に成立する。

$$\sum \frac{N \pi (h_i \cot \beta)^2}{F} = \frac{E \left\{ \sum Z_j \right\}}{K} \dots\dots\dots (1.1)$$

上式の右辺は  $E(Z)$  となり、これを  $Z$  とおく。 $h_i$  の mean と変動係数を  $h, c$  とおけば

$$\sum h_i^2 = N h^2 (1 + c^2) \dots\dots\dots (1.2)$$

(1.1) と (1.2) と前式から  $h$  を求めれば、

$$h = \tan \beta \sqrt{F \cdot Z / N (1 + c^2)} \dots\dots\dots (1.3)$$

ここで、 $61^\circ > \beta > 60^\circ$  になるように  $\beta$  を定めて、 $\tan \beta \doteq \sqrt{\pi}$  ( $\tan 60^\circ 34' = \sqrt{\pi}$ ) とし、 $F = 10,000 \text{m}^2$  (=1ha) とおき、 $c^2$  を無視すれば、(1.3) から、

$$h \doteq 100 \sqrt{Z/N} \text{ (m)} \dots\dots\dots (1.4)$$

平均占有面積 (=  $F/N$ ) を  $a^2$  とかけば、

$$h \doteq a \sqrt{Z} \text{ (m)} \dots\dots\dots (1.5)$$

となる。したがって、 $Z$  の推定と  $N$  または  $a$  の推定が叶う。」

以上のように平田は報告しているが、この平均樹高は樹高の二乗の平均を開平したもので平均樹高の不偏推定とはならない。なお上の理論は平地では成立するが、傾斜地では、標本点と立木の根元との傾斜角 ( $\theta$ ) に応じて、 $\beta$  を  $\beta'$  に補正して計数する。 $\beta'$  は次の関係を充たすものであればよく、標本点から立木の根元をのぞき得れば、 $\theta$  に応じてすぐ補正できる。

$$\tan \beta' = \tan \beta \pm \tan \theta \dots\dots\dots (1.6)$$

この証明は簡単で次のようにして可能である。

いま、斜面上の立木の地ぎわ  $O$  点で Fig. 2 のような水平な円  $AB$  を考え、その林地への投影点  $A' B'$  を求め、その点での仰角を  $\beta, \beta'$  とする。平田-EsSED の理論は円  $AB$  で考えることになるから、図から  $AB$  の範囲が斜面上の  $A' B'$  になることがわかる。

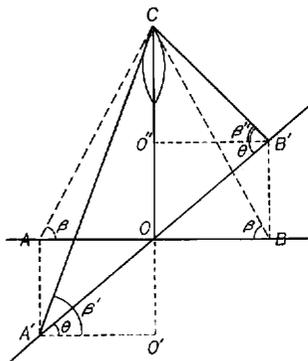


Fig. 2 傾斜面における平田-EsSED 法  
HIRATA-ESSED method in a slope.

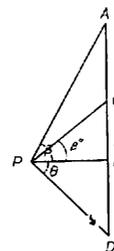


Fig. 3 平田のコノメーター  
Conometer by HIRATA

$A'$  点の仰角  $\beta'$  は、

$$\tan \beta' = \frac{CO'}{A'O'}, \quad \tan \beta = \frac{CO}{AO}, \quad \tan \theta = \frac{OO'}{A'O'}$$

で、 $AO = A'O'$  から

$$\tan \beta' = \tan \beta + \tan \theta$$

となり、 $B'$  点での  $\beta''$  は同様にして

$$\tan \beta'' = \tan \beta - \tan \theta$$

となる。

平田のコノメーターは  $\beta'$ ,  $\beta''$  が自動的に変わるが、この原理は次のように考えると理解できよう。

いま、図のように  $\angle APB = \beta$  とすると、 $\tan \beta = AB/PB$ 、 $AB$  を垂直に下げ、 $CD$  の位置にずらし、 $\angle CPB = \beta'$ 、 $\angle BPD = \theta$  とする。 $AB = CD = CB + BD$  だから  $\tan \beta = (CB + BD)/PB = \tan \beta' + \tan \theta$  すなわち  $\tan \beta' = \tan \beta - \tan \theta$  となる。同様に上にずらせば  $\tan \beta' = \tan \beta + \tan \theta$  となるから、このような器械を作ればよいことがわかる。したがって、傾斜地での測定は可能であるが、問題は公式(1.5)の  $ha$  あたりの本数の算定である。平田はレラスコープにより  $ha$  あたりの断面積を推定し、標本点のまわりの至近木の一定本数の直径を測り、その平均断面積  $g$  を求め  $N = G/g$  としてもとめるとしている。なお、甲斐原と黒川はジュコースコープという器械を考案し、 $ha$  あたり本数を推定する方法を示しているが、実行上煩雑であるので省略する。

なお、平田の考案したコノメーターでは  $\beta = 68^\circ 15'$ 、 $\tan \beta = \sqrt{2}\pi$ 、したがって  $h = 100\sqrt{2Z}/N$  ( $Z$  は各点で数えた木の本数の平均) として推定される。

この方法は、樹高の二乗平均をもとにした推定の方法であるため、下に証明するように正の偏りのあること、本数推定に困難なこと、なお、平田や ESSÉD はそれぞれ材積推定までの方法は一応発表しているが、方法の複雑性などの理由から、ピッターリッヒ法のように一般化されていない現状である。

平田-ESSÉD の方法は  $\sqrt{E(x^2)}$  の形をとっているが、一般に  $X$  が一意的に定数に等しくなく、かつ有限な平均をもつ正の確率変数であれば、 $E\sqrt{X} < \sqrt{E(X)}$  が成立する<sup>88)</sup>。したがって、 $X = h^2$  と考えたときは、 $E(h) < \sqrt{E(h^2)}$  となり、平均樹高よりも平田-ESSÉD 樹高は平均して大きい値を与えることがわかる。

#### 1.4 STRAND 法

ピッターリッヒ法ならびに平田-ESSÉD 法はともに測定者が林内の一点に立ち、器械を  $360^\circ$  回転して、周囲の木について観測する方法であるが、これに対して 1957年、Norway の L. STRAND はきわめて興味深い論文を Norsk Skogbruk (3: 535-8) に "Relaskopisk" hoyde- og kubikk massebestemmelse と題し、林分平均樹高や材積の簡単な推定法を発表した<sup>102)103)</sup>。この方法は、林内に  $5\pi m = 15.7m$  の線分を設定し、この線分的一方の側の木から、この線分におろした垂線の長さ、すなわち、木と線分との距離がその木の直径の50倍より短い時、この木の直径を測り、cm 単位に読んで、その値を  $d_c$  とする。測定すべき木かどうかを定めるには、断面積定数1のレラスコープなどを用いればよいことは直ちに理解されよう。さらに、この距離が木の高さの  $1/2$  より短いときも、この木の直径を cm 単位に測り  $d_c$  とする。この場合、測るべき木かどうかを定めるには、コノメーターの角度  $\beta$  を  $63^\circ 30'$  にすればよいことがわかるが、実際には STRAND はクリノメーターを用いる方法を提唱している。そのため、傾斜地では、最大傾斜線に沿い、線分を設け、すべて木を真横から、水平方向に見るようにする、と述べている。ただし、平地では、線分をランダムに設けるよう述べている。したがって、平地の場合はよいが、傾斜地では、測定に

偏りがはいることは当然考えられる。この点から、クリノメータを用いると不便で、平田のコノメーターの角を  $63^{\circ}30'$  にしたものをを用いることがはるかに便利である。いずれにしても、かれの所説によれば、 $G$  を ha あたり断面積、 $H$  を断面積を重みとした平均樹高すなわちローライの樹高とすれば

$$\text{ha あたり } GH \leftarrow \frac{1}{10} \sum d_c^3 \dots\dots\dots (1.7)$$

$$\text{ha あたり } G \leftarrow \frac{1}{10} \sum d_r \dots\dots\dots (1.8)$$

により推定でき、したがって ha あたり材積は、 $GH/\text{ha}$  に林分形数  $F$  をかければ推定でき、ローライの樹高  $H$  は上式より、

$$H = \frac{\sum d_c^3}{\sum d_r} \dots\dots\dots (1.9)$$

として推定できると述べている。林分形数としては、A. NYSSÖNEN が1955年に発表したものを利用することを勧めている。この両式の証明は、かれはこの報告では与えていないが、ビッターリッヒは1961年、次のように証明を行なっている。

$GH = \frac{1}{10} \sum d_c^3$  の証明

定角  $\beta = 63^{\circ}30'$  だから、 $\tan \beta = 2$  となるのでこの角で線分上から見て、樹高が上の視線を切り、とびだしてカウントされる木と基線の距離は、その樹高  $h$  の  $1/2$  より近い。測定単位は樹高は m、直径は cm だから、断面積  $g$  は、

$$g(\text{m}^2) = \frac{\pi \cdot d_c^2}{4 \cdot 10^4} (\text{m}^2)$$

断面積と樹高の積は

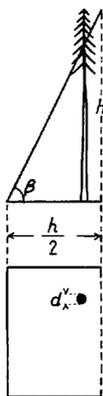
$$gh(\text{m}^3) = \frac{\pi \cdot d_c^2 \cdot h}{4 \cdot 10^4} (\text{m}^3)$$

標本地の面積  $A$  は、

$$A(\text{m}^2) = 5\pi \cdot \frac{h}{2} (\text{m}^2) \text{ または、}$$

$$A(\text{ha}) = \frac{5\pi h}{2 \cdot 10^4} (\text{ha})$$

直径  $d_c$  の木の  $gh$  と  $A$  との比は、



$$\frac{gh}{A} (\text{m}^3/\text{ha}) = \frac{\pi d_c^2 \cdot h \cdot 2 \cdot 10^4}{4 \cdot 10^4 \cdot 5\pi \cdot h} = \frac{d_c^2}{10} (\text{m}^3/\text{ha})$$

個々の木にあてはまる上の式は、すべての木にあてはまる。したがって、カウントした木の直径の二乗和をとると ha あたりのすべての木の円柱体の体積となる (STRAND の場合はコノメーターを用いずクリノメーターを用いたので、かれの発表した式は、

$$GH = \frac{1}{10} \sum d_c^3 + hG \dots\dots\dots (1.10)$$

となっている。

$h$  は目の高さで約 1.6m、 $G$  は後で証明する  $G = \frac{1}{10} \sum d_r$  より求めるようにしているが、コノメーターを用い、根元を視準するときは左辺の第 2 項は不要となる)。

$$G(\text{m}^2/\text{ha}) = \frac{1}{10} \sum d_r \text{ の証明}$$

断面積定数 1、すなわち、スリット幅 2 cm、長さ 1 m の棒の一端よりの

Fig. 4 STRAND 法の考え方  
STRAND's method  
(from BITTERLICH)

ぞき、はみ出す木をカウントするとき、木の直径を  $d_r$  cm とすれば、木の拡大円の半径は

$$50d(\text{cm}) = \frac{1}{2}d(\text{m}) \text{ となる。}$$

木の断面積  $g$  は、

$$g(\text{m}^2) = \frac{d_r^2 \cdot \pi}{4 \cdot 10^4}$$

標本地の面積  $A$  は

$$A(\text{m}^2) = \frac{5\pi \cdot d_r}{2} \text{ または、 } A(\text{ha}) = \frac{5\pi \cdot d_r}{2 \cdot 10^4}$$

ha あたり断面積は  $g$  と  $A$  との比であるから、

$$\frac{g}{A} = (\text{m}^2/\text{ha}) = \frac{d_r^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10^4}{4 \cdot 10^4 \cdot 5\pi \cdot d_r} = \frac{d_r}{10}$$

となる。前と同様に考えれば、

$$G(\text{m}^2/\text{ha}) = \frac{1}{10} \sum d_r$$

となる。前式は ha あたりの  $GH/\sum gh$ 、後式は  $G = \sum g$  を与えるから、 $GH/G = H = \sum gh/\sum g$  となり、STRAND の  $H$  はローライの林分平均樹高、すなわち断面積を重みとした平均樹高を与えることがわかる。

以上はビッターリッヒの証明だが、STRAND はこの実例として、Norway の農科大学演習林で行なった結果を Table 2 のように示している。

STRAND 法は、発表当初注目を引いただけで、その後あまり研究は行なわれておらず、もっぱら、WZP のみ盛んに行なわれている。しかし、この方法も筆者の数年の実験研究によれば、精度、簡易さ、効率の点で WZP に劣るものでなく、もっと広く用いられて然るべきものと思われる。もっとも筆者の場合は STRAND の線抽出法を発展させたもので、純粋なかれの方法ではない。

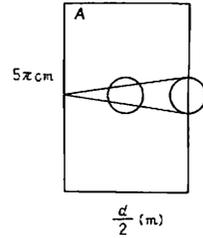


Fig. 5 STRAND 法の考え方  
STRAND's method  
(from PRODAN)

Table 2. STRAND の 実 験 結 果

Result of experiment by STRAND

標 本 Sample	G		V = 1/2GH	
	Relascope	標 本 地 法 Plot method	Relascope	標 本 地 法 Plot method
1	30.9	23.7	21.2	17.7
2	32.1	33.4	35.4	39.7
3	24.9	28.6	36.3	37.2
4	39.9	40.7	27.7	30.1
5	30.6	37.6	37.9	41.0
6	28.8	31.1	31.1	32.8

## 第2章 プロットレスサンプリングの一般原理

### 2.1 プロットレスサンプリングについての考え方

既述のビッターリッヒ法、平田-EsSEDの方法、STRANDの方法は、それぞれ異なるように思われるが、いずれも定角を利用し、木を水平方向、あるいは垂直方向に観測する点では共通し、一方は点を中心として測定すること、一方は一定長の線分の片側(または両側)の木のみ測定の対象と考えることにおいて異なり、その証明方法は各人各様に示しているが、いずれも同一理論から証明されることを述べよう。

まず、ビッターリッヒ法を考えて見よう。

この方法では、 $2\alpha$ という角で、各木の胸高直径を見、スリットからはみだす木を数えるわけであるから、木の半径を $d/2$ (木の断面を正円とみなす)、木と観測点の距離を $R$ とすれば、測定点と木との距離がFig. 6から、 $R = (d/2)\text{cosec } \alpha$ の距離またはFig. 1から $R = d/2\sqrt{1+(b^2/a^2)}$ より近い場合はすべてこの木は数えられることになる。すなわち、林地面積を $A$ とし、 $R$ の半径を有する円の面積 $a = \pi R^2 = (\pi d^2 \text{cosec}^2 \alpha)/4$ とすれば、 $a$ 円内のどの点からでも観測されることになる。したがって、この林地に無限に点を落として観測した場合、この木の抽出調査される確率は

$$\frac{a}{A} = \frac{\pi d^2 \text{cosec}^2 \alpha}{4A} = \frac{g}{A} \text{cosec}^2 \alpha$$

となる。ただし、 $g$ は胸高断面積とする。

いま、面積 $A$ の林地にただ1本の木があった場合を考えたとし、2本の木があったとし、1番目の木、2番目の木の拡大円の面積は、 $a_1, a_2$ であり、2円の交わっている部分の面積は $a_{12}$ としよう。この林地に前と同様、無数の点を落として、そこで観測するならば、1番目の木、2番目の木の抽出調査される確率は、それぞれ $a_1/A, a_2/A$ と考えてよかろう。1番目の木と2番目の木が同時に抽出調査される確率は、両円の交わりの面積が $a_{12}$ だから $a_{12}/A$ であることもわかる。したがって、この方法は、 $a/A$ という面積に比例した確率比例抽出法であるとは理解できようが、同時に各林木は統計的に独立でないこともわかる。

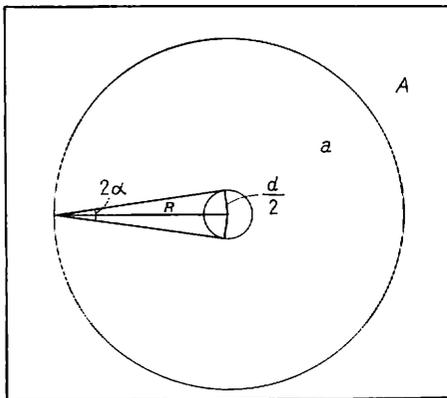


Fig. 6 ビッターリッヒ法の考え方 その1  
Enlarged circle in BITTERLICH'S method.

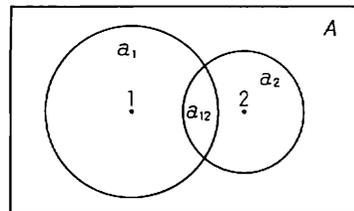


Fig. 7 ビッターリッヒ法の考え方 その2  
Overlap of enlarged circles in BITTERLICH'S method.

なおピッターリッヒ法の場合は、抽出確率は断面積に比例することは拡大門が断面積の一定倍数  $\text{cosec}^2 \alpha$  にあたることから容易に知られよう ( $a$  と  $A$  は同じ単位で ( $\text{m}^2$ ) でなければならない)。

平田-Essed 法は  $\beta$  を一定にしているから、ピッターリッヒ法の拡大門に相当する面積  $a$  は  $a = \pi(h \cot \beta)^2$  となる。したがって、この場合は各木が  $(\pi h^2 \cot^2 \beta) / A$  の確率で抽出される確率比例抽出法となるが、ピッターリッヒ法の場合と同様、林地上の各木は統計的に独立に抽出調査されるわけではなく、1 番目の木と 2 番目の木の拡大門の交わりの面積が  $a_{12}$  なら、この両者が同時に抽出調査される確率は  $a_{12} / A$  となる。

STRAND 法について上記といささか趣きを異にした考えをとる。まず、一定長  $l$  の線分を林内に一定方向に設定し、その片側のみ木の線上の最短距離の点から垂直方向に  $\beta$  の角度でその木を観測し、樹長がその角度をはみだす場合を考えよう。ただし、線分を設定するにはいろいろの方法が考えられるが、初めにまず林内に起点を抽出し、その点を中心とし、初めにランダムに方向を定め、この方向に両側に長さ  $l/2$  の線分を設定した場合を考える。この線分上で木が数えられるのは、木より線分に向かって延ばした定長  $h \cot \beta$  の垂線と、 $l$  の線分が交わる場合であるから、点が Fig. 8 のように、この垂線の両側に  $l/2$  の長さの 2 長方形の中に落ちたときのみ数えられる。したがって、この木の抽出される確率は  $a/A = (l \cdot h \cot \beta) / A$  である。林地に 2 木以上の木があり、それらが同時に抽出される場合の確率は、その交わりの面積を  $A$  でわったものとなる。

いまの方法は点を中心として、上下の両側に  $l/2$  の長さの線分を設けたが、一方の側に、たとえば起点より上方に設けた場合は、面積は、したがって、確率は変わらぬが、数えられる点の位置が変わってくる。Fig. 9 からわかるように、この垂線の下方に一辺  $l$  の長さ、 $h \cot \beta$  の辺長を有する長方形に点がおちた場合に Fig. 9 の木は数えられる。この  $l$  線の向かう方向により、長方形の位置が木の上方にきたり、下方にきたりする。いずれにしろ、このことは調査前に決定しておくべきことで、調査中に任意に変えてはいけない。一般には、木が辺の中央、あるいは後述するように線分が長方形の中央にあるようにした方が、面積の小さい林分などを調査する場合、林縁効果の修正その他につごうがよい。

STRAND 法でレラスコープを用いる場合は、木から線分を下した垂線の長さが  $R = (d/2) \text{cosec} \alpha$  となった場合と思えばよい。したがって、その木の抽出確率は、 $a/A = (l \cdot d \text{cosec} \alpha) / 2 \cdot A$  となる。林地に木が 2 本以上あった場合の同時抽出確率についても、前同様その交わりの面積を考えればよい。

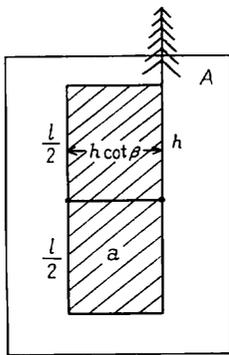


Fig. 8 STRAND 法の考え方 その 1  
Rectangle in STRAND's method 1.

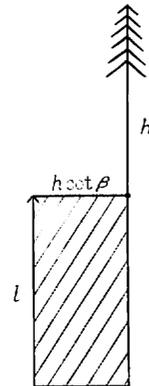


Fig. 9 STRAND 法の考え方 その 2  
Rectangle in STRAND's method 2.

以上のように、どの方法も形状、面積は異なるが、林木のある量 ( $d, h, g$ ) に比例した確率で抽出する調査法であることに変わりはない。

この林木のある量というのはピッターリッヒ法では断面積、平田-EsSED 法では樹高の二乗、STRAND の第 1 法は樹高、第 2 法では直径となっている。したがってこれらの調査法は、標本調査法でのいわゆる確率比例抽出法に相当するが、普通の確率比例抽出法と異なる点は個々の抽出単位である立木が統計的に独立でないということである。したがって、不偏推定であるということの証明は容易であったが、分散の問題の理論的研究がほとんど行なわれなかったのも、この辺に理由があるものと思われる。いたずらに、むずかしく考え、積分幾何学で不偏推定だと証明することはできても、分散の問題になると、皆行き詰まっていたのが現状であった。筆者はその点について、まず具体的モデルを机上で作成し、きわめて簡単なモデルを中心に研究し、次節に述べる一般的理論を見出した。

## 2.2 プロットレスサンプリングの一般理論

### 2.2.1 単位面積あたりの総計の推定子およびその分散

前節で述べたように、ピッターリッヒ法、平田-EsSED 法、STRAND 法のどの方法でも形状、面積は皆異なるが、各方法では林木個々に対する形状、面積は定まっていた。そこで、どの方法にも通用するように一般化して考えることにしよう。

いま  $A$  なる面積を有する林地があるとし、その上の林木の本数を  $N$  本とする。この  $N$  本の立木の特性値を  $X_i (i=1, \dots, N)$  とする。 $X$  は直径、樹高、断面積、材積や円柱体材積でも何でもよい。本数でもよいが本数の場合は  $X$  は 0 か 1 のどちらかをとることとなる。そして、この  $N$  本のそれぞれに対応し、どのような形でもよいが、その境界が明確で、現場に立ったとき、何らかの方法でその点が境界の内にあるか外にあるか判別でき、さらに面積も確定し、知り得られるような地域 (領域) を考える。この領域はもちろん、相互に交わっても、あるいは一方が他を含んでも、相互に離れていてもさしつかえないが、どの領域もすべて林内にあり、この林の外にはみ出さないものとする。一般にこれらの領域は交錯するが、いま、 $A$  の林地を各境界線により、個々に分割して考え、その個数が  $M+1$  個になったとし、この個々の小区域の面積を  $\pi_\alpha (\alpha=0, 1, 2, \dots, M)$  とする。ただし、 $\pi_0$  はどの木にも対応しない場所の面積を一括した

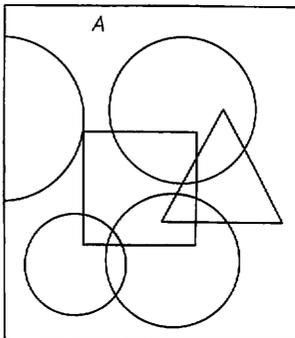


Fig. 10 プロットレスサンプリング  
の一般的な考え方  
General concept of plotless sampling.

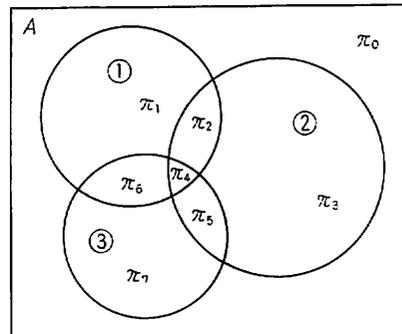


Fig. 11 プロットレスサンプリングの  
モデル  
A model of plotless sampling.

ものである。 $\pi_\alpha$  の地域は通常数本ないし数十本の木の各領域の一部が重なりあったものとなる。たとえば、Fig. 11 の場合には①②③と3本の木があり、それぞれ対応する領域の境界線により、 $\pi_0, \pi_1 \dots \pi_6$  の7区域に分かれるが、 $\pi_2$  は①と②、 $\pi_4$  は①②③、 $\pi_5$  は②と③、 $\pi_6$  は①と③の領域が重なったものである。

いま各木の拡大領域の面積を  $a_i$  とし、 $a_{ij}$  は  $i$  木と  $j$  木の拡大領域  $a_i$  と  $a_j$  の交わりの面積とする。したがって、 $a_{ij}$  は何個かの  $\pi_\alpha$  の和となる。

たとえば、Fig. 11 では  $a_{12} = \pi_2 + \pi_4$ 、 $a_{23} = \pi_4 + \pi_5$ 、 $a_{31} = \pi_4 + \pi_6$  である。

一方  $j$  木の領域  $a_j$  のなかでは、領域のどの点も、 $x_j/a_j$  の値をもつものとする。したがって、林内の1点では何本かの木の拡大領域が重なっているから、 $k$  点では、

$$y_k = \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} x_j}{a_j} \dots\dots\dots (2.1)$$

( $\delta_{kj}$  は  $j$  番目の木の領域に含まれる  $\pi_\alpha$  に  $k$  点が含まれるときは1とし、然らざるときは0とする) のような統計量をもつものとする。

たとえば、Fig. 11 では、 $\pi_4$  の各点は  $(x_1/a_1) + (x_2/a_2) + (x_3/a_3)$  の値をもつものとする。いま、このような林地にランダムに面積の意味で等確率に  $n$  個の点をおとし、(2.1) の平均をとると、

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k \dots\dots\dots (2.2)$$

となるが、この点の位置に関する期待値をとると、

$$E(\bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(y_k)$$

となる。

$$\begin{aligned} E(y_k) &= E\left(\sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} x_j}{a_j}\right) \\ &= \frac{\pi_0}{A} \times 0 + \frac{\pi_1}{A} \left(\sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} x_j}{a_j}\right) + \frac{\pi_2}{A} \left(\sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} x_j}{a_j}\right) + \dots\dots\dots \\ &\quad + \frac{\pi_M}{A} \left(\sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} x_j}{a_j}\right) \dots\dots\dots (2.3) \end{aligned}$$

( $\delta_{kj}$  は (2.1) の場合と同じ)

$x_j/a_j$  の同じ値を含む  $\pi_\alpha$ 、すなわち  $j$  木に関与するすべての  $\pi_\alpha$  なる領域の和を求めると、 $a_j$  と等しくなるから、

$$= \sum_{j=1}^N \frac{\pi_j}{A} \cdot \frac{x_j}{a_j} = \frac{1}{A} \sum_{j=1}^N \pi_j x_j \dots\dots\dots (2.4)$$

となり、 $y_k$  は  $x$  の単位面積あたり合計の不偏推定子となる。したがって、

$$E(\bar{y}) = \frac{1}{n} \times n \left(\frac{1}{A} \sum_{j=1}^N \pi_j x_j\right) = \frac{1}{A} \sum_{j=1}^N \pi_j x_j \dots\dots\dots (2.5)$$

となり、(2.2) も単位面積あたりの  $x$  の合計の不偏推定子であることがわかる。森林調査では  $m$  単位だから林地面積を  $ha$  単位とすることとすれば、 $A$  を10,000で割っておかなければならない。そのことは各式

の左辺に10,000を乗ずればよい。したがって、(2.1) 式は

$$y_k = \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} x_j}{a_j} \times 10,000 \dots\dots\dots(2.6)$$

としておけばよい。x を断面積とすれば、

$$y_k = \sum_{j=1}^N \frac{g_j 10,000}{a_j} \times \delta_{kj}$$

となり、(g<sub>j</sub>/a<sub>j</sub>)×10,000 はピッターリッヒ法では常に a<sub>j</sub> は g<sub>j</sub> の一定倍にとられるから、定数となり、いわゆる断面積定数となる。

上の各式を見て、直ちに気がつくことは、x<sub>j</sub> に対応するある大きさ a<sub>j</sub> があり、その a<sub>j</sub> に比例する確率 p<sub>j</sub>=a<sub>j</sub>/A を与えたとき、いわゆる確率比例抽出法の場合の計算法と同じであることに気が付こう。

確率比例抽出の公式では総計 Y の推定値

$$\hat{Y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{y_j}{p_j} \quad (\text{重複抽出で } n \text{ 単位からなる標本が } p_j \text{ の確率で抽出})$$

で与えられる。p<sub>j</sub>=a<sub>j</sub>/A だから、この期待値は

$$E(\hat{Y}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E\left(\frac{y_j}{p_j}\right) = \frac{1}{n} \times n \sum_{j=1}^N \frac{a_j}{A} \frac{y_j}{\frac{a_j}{A}} = \sum_{j=1}^N y_j \dots\dots\dots(2.7)$$

となる。A をこの場合のように林地の総面積とすれば、Ŷ を A でわっておけば単位面積あたりの Y の総計がわかることから理解されよう。

$$\left(\frac{\hat{Y}}{A} = \frac{1}{nA} \sum_{j=1}^n \frac{y_j}{p_j} = \frac{1}{nA} \sum_{j=1}^n \frac{y_j}{\frac{a_j}{A}} \times A = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{y_j}{a_j}\right)$$

単木平均を求めたければ、ha 当たり本数 N がわかっているれば、(2.2) 式を N でわれば求められる。

$$\bar{y} = \frac{1}{nN} \sum_{k=1}^n y_k \dots\dots\dots(2.8)$$

次にこのようにして求められた y<sub>k</sub> や  $\bar{y}$  の母分散を計算してみよう。

分散の定義と y<sub>k</sub> の期待値が  $\sum x/A$  となり、面積単位の x についての平均となることがわかることから、y<sub>k</sub> の母分散は、

$$\begin{aligned} \text{var}(y_k) &= E\{y_k - (E y_k)^2\} = E y_k^2 - (E y_k)^2 \\ &= E(y_k^2) - \left(\frac{\sum x}{A}\right)^2 \dots\dots\dots(2.9) \end{aligned}$$

となる。

$$y_k = \frac{x_{k1}}{a_{k1}} + \frac{x_{k2}}{a_{k2}} + \dots\dots + \frac{x_{kj}}{a_{kj}}$$

ただし k<sub>j</sub> は 1, …… , N の中の j 個の異なる値をとるものとする。

$$\begin{aligned}
 E(y_k^2) &= E\left(\sum_1^N \frac{\delta_{k_j} x_j}{a_j}\right)^2 \quad (\delta_{k_j} \text{ は前述と同じ}) \\
 &= E\left\{\sum_1^N \frac{\delta_{k_j} x_j^2}{a_j^2} + 2 \sum_{l < m}^N \frac{\delta_{kl} \delta_{km} x_l x_m}{a_l a_m}\right\}, \quad (\text{ただし } \delta_{k_j^2} = \delta_{k_j}) \\
 &= \frac{1}{A} \left[ \sum_{\alpha=1}^M \pi_{\alpha} \left( \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{k_j} x_j^2}{a_j^2} \right) + 2 \sum_{\alpha=1}^M \pi_{\alpha} \sum_{l < m}^N \frac{\delta_{kl} \delta_{km} x_l x_m}{a_l a_m} \right] \dots\dots\dots (2.10)
 \end{aligned}$$

( $\pi_0$  のところで  $y_k = 0$  となる。したがって  $y_k^2 = 0$  だから  $\pi_0$  を省いて考えてよい)

(2.10) の右辺の第1項は特定  $j$  の木について考えると、 $\delta_{k_j}$  の定義から  $j$  木の拡大領域  $a_j$  を若干個の  $\pi_{\alpha}$  に分割したものを全部加えることになるので、

$$\sum_{\alpha=1}^M \pi_{\alpha} \left( \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{k_j} x_j^2}{a_j^2} \right) = \sum_{j=1}^N a_j \times \frac{x_j^2}{a_j^2} = \sum_{j=1}^N \frac{x_j^2}{a_j} \dots\dots\dots (2.11)$$

となる。

第2項では  $\delta_{kl} \delta_{km}$  は  $l$  木と  $m$  木の拡大領域の交わりの部分の  $\pi_{\alpha}$  では1となり、それ以外の  $\pi_{\alpha}$  では0となる。また、両木の拡大領域の共通部分の面積を  $a_{lm}$  とすると、 $a_{lm}$  に点がおちれば、 $\delta_{kl} \delta_{km}$  は必ず1となる。したがって、 $l$  木と  $m$  木に関与する  $\pi_{\alpha}$  を合計すれば  $a_{lm}$  に等しくなる。

したがって、第2項は

$$2 \sum_{\alpha=1}^M \pi_{\alpha} \sum_{l < m}^N \frac{\delta_{kl} \delta_{km} x_l x_m}{a_l a_m} = 2 \sum_{l < m}^N \frac{a_{lm} x_l x_m}{a_l a_m} \dots\dots\dots (2.12)$$

となる。

(2.11) と (2.12) を (2.10) に代入し、さらに、その結果を (2.9) に代入すれば

$$\text{var}(y_k) = \frac{1}{A} \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{x_j^2}{a_j} + 2 \sum_{l < m}^N \frac{a_{lm} x_l x_m}{a_l a_m} - \frac{\left( \sum_{j=1}^N x_j \right)^2}{A} \right\} \dots\dots\dots (2.13)$$

となる。

いま、 $n$  個の点を  $A$  なる林地にランダムに面積的な意味で等確率に落とせば、その平均値の分散は

$$\text{var}(\bar{y}) = \text{var} \left\{ \frac{\sum_{k=1}^n y_k}{n} \right\} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \text{var}(y_k) = \frac{1}{n} \text{var}(y_k) \dots\dots\dots (2.14)$$

となることは直ちにわかる。

これらのことから、現地のデータから、平均値や分散を推定する場合は、無限母集団の場合の理論がそのまま適用できる。

すなわち、面積  $A$  の林地にランダムに面積的な意味で等確率に地点を  $n$  個選び、プロットレスサンプリングを行なって各地点で  $x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kj} (k=1, 2, \dots, n)$  のデータを得たとする。

$$y_k = \frac{x_{k1}}{a_{k1}} + \frac{x_{k2}}{a_{k2}} + \dots + \frac{x_{kj}}{a_{kj}}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^n y_k}{n}$$

とすると、

$$E(\bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(y_k) = \frac{\sum_{j=1}^N x_j}{A} \dots\dots\dots (2.15)$$

となることは (2.4) の証明からわかる。

分散の推定子  $s^2$  は

$$s^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})^2}{n-1} \dots\dots\dots (2.16)$$

により求まる。証明は、

$$\begin{aligned}
 (n-1)E(s^2) &= E \sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})^2 = E \left\{ \sum_{k=1}^n y_k^2 - n(\bar{y})^2 \right\} \\
 &= \sum_{k=1}^n E y_k^2 - n E(\bar{y})^2 \quad (E y_k^2 = \text{var}(y_k) + (E y_k)^2 \text{ から}) \\
 &= n \text{var}(y_k) + n(E y_k)^2 - n E(\bar{y})^2 \\
 &= n \text{var}(y_k) - n \{ E(\bar{y})^2 - (E y_k)^2 \} \dots\dots\dots (2.17)
 \end{aligned}$$

(2.14) から

$$\text{var}(\bar{y}) = E(\bar{y})^2 - \left( \frac{\sum x}{A} \right)^2 = \frac{1}{n} \text{var}(y_k)$$

となるので、

$$(2.17) = n \text{var}(y_k) - n \left\{ \frac{1}{n} \text{var}(y_k) + \left( \frac{\sum x}{A} \right)^2 - (E y_k)^2 \right\}, \quad E(y_k) = \frac{\sum x}{A}$$

だから (2.17) は

$$(n-1)\text{var}(y_k)$$

に等しくなる。したがって、 $s^2$  は  $y_k$  の分散の不偏推定子であることがわかる。無限母集団における平均値の分散の推定は

$$s^2_{\bar{y}} = \frac{\sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})^2}{n(n-1)}$$

となることは証明するまでもなく、(2.16) は分散のそれでもあり、かつ mean square error でもあることが直ちに判明しよう。

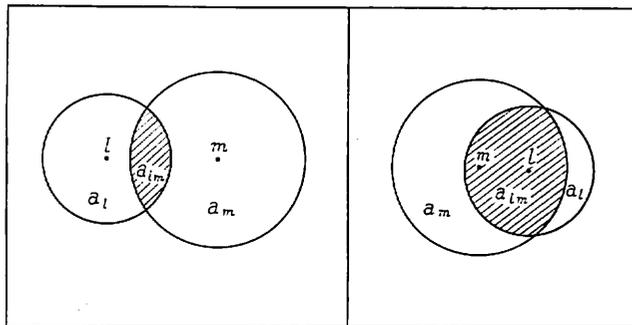
母分散の求め方は J. CORNFIELD の証明の手法を利用すれば、きわめてエレガントに証明できる。いま、 $\lambda_j$  は  $j$  番目の木の領域に点がおちたとき、1 をとり、そうでないときは 0 をとるものとする。そうすると、 $k$  点での  $y_k$  は

$$y_k = \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j x_j}{a_j} \dots\dots\dots (2.18)$$

となる。

この期待値をとると、 $\lambda_j$  のみが確率変数と考えてよく、

$$E(\lambda_j) = a_j / A$$



注  $l$  の木の拡大領域の面積を  $a_l$ ,  $m$  の木のそれを  $a_m$ , 交わりの面積を  $a_{lm}$  とする。

Fig. 12 プロットレスサンプリングにおける拡大円の重なり方の例

Examples of overlapping of enlarged circles in plotless sampling.

となるから、

$$E(y_k) = \sum_{j=1}^N \frac{x_j}{a_j} E(\lambda_j) = \sum_{j=1}^N \frac{x_j}{a_j} \times \frac{a_j}{A} = \frac{\sum_{j=1}^N x_j}{A} \dots\dots\dots(2.19)$$

となり、 $E(y_k)$  は (2.5) 式に等しく、単位面積あたりの  $x$  の合計の不偏推定値を与える。

$y_k$  の分散は、

$$\text{var}(y_k) = E(y_k^2) - (E(y_k))^2 \dots\dots\dots(2.20)$$

だから、 $E(y_k^2)$  を計算すると、

$$E(y_k^2) = \sum_{j=1}^N \left(\frac{x_j}{a_j}\right)^2 E(\lambda_j^2) + 2 \sum_{l,m} \left(\frac{x_l}{a_l}\right) \left(\frac{x_m}{a_m}\right) E(\lambda_l \lambda_m) \dots\dots\dots(2.21)$$

となる。

$$E(\lambda_j^2) = E(\lambda_j) = \frac{a_j}{A}, \quad E(\lambda_l \lambda_m) = \frac{a_{lm}}{A}$$

となるから、(2.21) は

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^N \frac{x_j^2}{a_j^2} \cdot \frac{a_j}{A} + 2 \sum_{l,m} \frac{x_l x_m}{a_l a_m} \frac{a_{lm}}{A} \\ &= \frac{1}{A} \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{x_j^2}{a_j} + 2 \sum_{l,m} \frac{a_{lm} x_l x_m}{a_l a_m} \right\} \dots\dots\dots(2.22) \end{aligned}$$

$(E(y_k))^2$  は  $\left(\frac{\sum_{j=1}^N x_j}{A}\right)^2$  だから、これと (2.21) を (2.20) に代入すると、

$$\text{var}(y_k) = \frac{1}{A} \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{x_j^2}{a_j} + 2 \sum_{l,m} \frac{a_{lm} x_l x_m}{a_l a_m} - \frac{\left(\sum_{j=1}^N x_j\right)^2}{A} \right\} \dots\dots\dots(2.23)$$

となり、この式は、前の (2.13) 式と全く一致することがわかる。

$n$  個の点をおとしたときの平均  $\bar{y}_n$  の分散については、すでに述べたように無限母集団の場合と考えてよいから、 $\text{var}(y)/n$  となる。

(2.13) または (2.23) の母分散の公式から、母分散は、林地面積  $A$ 、拡大領域の面積  $a_j$ 、その相互の交わり、 $a_{lm}$  などに関係することがわかる。

これらは、林地における立木配置の関係、とくに均一に配置されているか、および密度、拡大領域のものとをなす木の直径、あるいは樹高の大きさなどによって変わってくる。

まず、他の条件が変わらず林地面積  $A$  が大きくなればなるほど分散は小となる。何となれば (2.13) の  $A$  に関する第 1 次導関数は一般に負であるから (2.13) は  $A$  に関しては単調減少関数であるからである (証明は後述)。

林地面積  $A$  が一定な場合は、分散の大きさは各立木に対応する  $a_j$  および  $a_{lm}$  に依存する。すべての  $a_j$  がきわめて大きく、しかも  $a_{lm}$  がすべて 0 となれば、分散は最小となるが、このようなことは、実際上不可能である。また木の位置がきわめて接近して、 $a_l > a_m$  のとき、 $a_l$  の中に  $a_m$  が完全に含まれる場合には、 $a_{lm} = a_m$  となり、(2.13) 式の第 2 項の係数  $a_{lm}/(a_l a_m) = 1/a_l$  となり、このとき分散は最大となる。 $a_{lm} < a_m$  のときは、 $a_{lm}/(a_l a_m) = (1/a_l) \cdot (a_{lm}/a_m) < 1/a_l$  となり、前兩者の中間の値をとるであろう。いずれにしても、全く同一面積、同一大きさの林木、同一の本数の林でも立木位置が均齊な場合は分散小、群状をなしたりして不均齊な場合は分散大となることが推察されよう。さらに推定すべき  $x_j$  の個々の大きさが不均一なとき、たとえば天然生林のような場合は、分散が、他の条件が同じでも、より大き

くなるものが (2.13) より推測されよう。

次に拡大面積は一定倍率で大きくした場合はどうなるかという、これは面積は大きくなるほど、同一点数、同一線分数ならば分散は小になる。しかし、面積の拡大は実行上限度があるので、林分により適当な拡大面積が定まってくる。たとえば、点抽出法の場合は 1 点で 30 本以上カウントすることは実行上きわめて困難であるし、線抽出法で線分を 20m 以上の長さにするのも同様困難である。以上の諸問題については章を改めて詳しく論ずることとする。

### 2.2.2 PALLEY と HORWITZ の証明との関係

ピッターリッヒ法については、M. N. PALLEY と L. G. HORWITZ が 1961 年、断面積、材積の推定子とその母分散などについて理論的な展開を示しているの、筆者の研究との関連、考え方の相違などについて述べる。

かれらは、検視角を  $\alpha$  (筆者の場合は  $2\alpha$ ) とし  $\operatorname{cosec} \alpha/2 = K$  とし、林の総面積を  $L$  (単位は  $\text{m}^2$  または  $\text{ft}^2$ ) とし、 $L/K^2$  を断面積定数としている。断面積定数 (BAF) は通常  $\sin^2 \alpha/2 \times 10,000$  ( $\text{m}^2$  単位)、 $\sin^2 \alpha/2 \times 43,560$  ( $\text{ft}^2$  単位) で示し、 $\alpha$  は与えられているので定数となる。

かれらの場合は  $L/K^2$  を BAF と述べているが、このことは  $L/K^2$  はここでは与えられているとしているので、定数となるから、理論的な証明には何ら関係しないので、 $L/K^2$  を BAF ということにかかわりなく、単に定数として筆者の理論と比較しよう。両者は上記の定義のもとに

$$g = \frac{L}{K^2 n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N y_{ij} \quad (y_{ij} \text{ は } j \text{ 点でカウントされれば } 1, \text{ そうでないときは } 0 \text{ をとる})$$

$$= \frac{L}{K^2} \times \text{平均カウント本数} \dots \dots \dots (2.24)$$

(ただし、 $g$  は林の総断面積の推定子、 $n$  は標本点数)

という統計量を考え、この  $g$  は不偏であることを証明した。

筆者の式では、1 ha あたりの  $x$  の平均の推定式は

$$y = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} x_j}{a_j}$$

だから、この式に  $x_j = g_j$ 、 $a_j = g_j \operatorname{cosec}^2 \alpha/2 = K^2 g_j$  を代入すると、

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} g_j}{K^2 g_j} = \frac{1}{n K^2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \delta_{kj}$$

林の面積は  $L$  であるから、

$$L \bar{y} = \frac{L}{n K^2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \delta_{kj} = \frac{L}{K^2} \times \text{平均カウント本数}$$

となり全く一致する。

断面積の母分散の式については PALLEY らは

$$\frac{L}{K^2 n} G \left( 1 - \frac{K^2}{L} G \right) + \frac{2L \sum \sum_{\substack{h < i \\ h, i \in n}} O_{hi}}{K^4 n} \dots \dots \dots (2.25)$$

(ただし、 $G = \sum_{j=1}^N g_j$ 、 $O_{hi}$  は  $i$  木と  $h$  木の交わりの面積、したがって筆者の式の  $a_{lm}$  に同じもの)

を与えた。(2.25) は変形すると,

$$\frac{L}{n} \left\{ \frac{G}{K^2} + \frac{2 \sum_{h < i} \sum_{l < m} O_{hi}}{K^4} - \frac{G^2}{L} \right\} \dots\dots\dots (2.26)$$

となる。筆者の式は、 $n$  点を抽出した場合,

$$\frac{1}{nA} \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{x_j^2}{a_j} + 2 \sum_{l < m} \sum_{i < m} \frac{a_{lm} x_l x_m}{a_l a_m} - \frac{\left( \sum_{j=1}^N x_j \right)^2}{A} \right\}$$

で与えられるから、 $A=L$ ,  $x_j=g_j$ ,  $a_j=g_j \operatorname{cosec}^2 \alpha/2 = g_j K^2$ ,  $a_{lm} = O_{lm}$ ,  $\sum_j x_j = G$  とおき、さらに林の面積が  $L$  だから  $L^2$  をかけると,

$$\begin{aligned} & \frac{L^2}{nL} \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{g_j^2}{g_j K^2} + 2 \sum_{l < m} \sum_{i < m} \frac{O_{lm} g_l g_m}{K^4 g_l g_m} - \frac{\left( \sum_{j=1}^N g_j \right)^2}{L} \right\} \\ &= \frac{L}{n} \left\{ \frac{G}{K^2} + \frac{2 \sum_{l < m} \sum_{i < m} O_{lm}}{K^2} - \frac{G^2}{L} \right\} \end{aligned}$$

となり、これも一致する。

PALLEY らの材積の推定式として

$$v = \frac{L}{K^2 n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N q_i y_{ij} \quad (q \text{ は } \frac{\text{材積}}{\text{断面積}} = \text{形状高})$$

を提示し、その不偏であることを証明しているが、これまた筆者の推定式に  $L$  をかけたものと同一であることが、

$$Ly = L \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} x_j}{a_j} = \frac{L}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} v_j}{K^2 g_j} = \frac{L}{n K^2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N q_j \delta_{kj}$$

により直ちに判明する。

総材積の母分散式としては、

$$\sigma_v^2 = \frac{L^2}{K^4 n} \left\{ \frac{K^2}{L} \sum_{i=1}^N q_i^2 b_i - \frac{K^4}{L^2} \left( \sum_{i=1}^N q_i b_i \right)^2 + \frac{2}{L} \sum_{h < i} \sum_{l < m} q_h q_i O_{hi} \right\} \dots\dots\dots (2.27)$$

( $b_j$  は  $j$  木の胸高断面積)

という式を示しているが、筆者の一般式に  $L^2$  をかけると (ただし、 $a_j = b_j \operatorname{cosec}^2(\alpha/2) = b_j K^2$  とおく)

$$\frac{L^2}{nL} \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{v_j^2}{b_j K^2} + 2 \sum_{l < m} \sum_{i < m} \frac{O_{lm} v_l v_m}{K^4 b_l b_m} - \frac{\left( \sum_{j=1}^N v_j \right)^2}{L} \right\}$$

$v_j b_j = q_j$  として、 $L^2/K^4 n$  でくくると、

$$\frac{L^2}{n K^4} \left\{ \frac{K^2}{L} \sum_{j=1}^N q_j^2 b_j + \frac{2}{L} \sum_{l < m} \sum_{i < m} q_l q_m O_{lm} - \frac{K^4}{L^2} \left( \sum_{j=1}^N q_j b_j \right)^2 \right\}$$

となり、この式も (2.27) と一致し、さらに分散や標本誤差の推定方法についても、断面積、材積ともに全く同様である。このように、かれらの場合は、筆者の方法の特定な場合であるから、本質的な相違はないが、 $\sum y$  として  $L/K^2$  を別に分離し、証明したのに対し、筆者は  $1/K^2$  を式中含み、 $\sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} x_j}{a_j}$  としたため、本取扱いが一般性普遍性をみるのであって、このため各種の林分因子、各種の方法についての取

扱いが広範囲に展開したゆえんである。

すなわち、筆者は、まず無限母集団からの点の抽出を考え、その点はいずれも

$$y_k = \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} x_j}{a_j}$$

という値をとるものとし、 $y_k$  の等しい領域を考え、その probability measure として、 $\pi_k/A$  を与えた。そして、 $y_k$  の期待値が ha あたりの  $x$  の合計の不偏推定となることを証明し、その母分散の公式を求めた。この場合、 $x$  に制限をつけず、林分の測定対象因子（たとえば、直径、樹高、材積、断面積、円柱体積、本数）ならば何でもよいのである。なお、証明の技法として、J. CORNFIELD の方法も示した。

これに対し、PALLEY と HORWITZ は、最初から、林の総断面積、総材積は

$$g = \frac{L}{K^2 n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N q_i y_{ij}$$

$$v = \frac{L}{K^2 n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N q_i y_{ij}$$

という式を示し、これがそれぞれ不偏推定であることを証明し、さらにそれぞれ別々に母分散の式を導き、さらに分散の推定方法についても筆者のように無限母集団からの点の抽出という考え方でないので、それぞれの推定式を示し、その証明をあたえている。なお PALLEY らの式は、単にピッターリッヒ法の断面積、材積に限定せざるを得なかったが、筆者の理論はきわめて一般的なため、ピッターリッヒ法の他の林分構成因子の値の推定のみならず、平田-EsSED 法、STRAND 法にも適用でき、L1 法、L2 法の考案や林縁効果による偏りの修正の理論的証明 その他に広く応用でき、PALLEY らの式をその特別な場合として含むことなどが、筆者の理論がかれらの方法に対して特長とするところである。

### 2.2.3 単位面積あたり本数の推定子およびその分散

2.2.1 で、ha あたりの計量値  $x$  の総計ならびに分散について述べたが、その際  $x$  に 1 を代入すれば本数の推定ができることを述べた。

したがって、各点または各線分で

$$y_k = \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj}}{a_j}$$

を求め、総点または総線分の数でわれば ha あたり本数の推定値が求まる。すなわち、

$$E(y_k) = E \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj}}{a_j} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{a_j} E(\delta_{kj}) = \sum_{j=1}^N \frac{a_j}{A a_j} = \frac{N}{A} \dots\dots\dots (2.28)$$

母分散は、(2.13) 式において、 $x=1$  として、

$$\text{var}(y_k) = \frac{1}{A} \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{1}{a_j} + 2 \sum_{i \neq m} \frac{a_{im}}{a_i a_m} - \frac{N^2}{A} \right\} \dots\dots\dots (2.29)$$

分散の推定は、

$$\frac{\sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})^2}{n-1} \quad (y_k = \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj}}{a_j}, \text{ すなわち、各点各線分における各 } a_j \text{ の逆数の和を } y_k \text{ としている})$$

で行ない、平均値の分散は無限母集団だからこの  $1/n$  を用い推定すればよいことは当然である。なお、本数推定に際しては、すべての  $a_j$  の平均  $\bar{a}$  を用い、 $k/\bar{a}$  ( $k$  はカウント数) を用いてはいけない。何と

なれば、一般に  $(1/N)\sum(1/X) > N/\sum X$  であるので、過小推定となるからである<sup>68)</sup>。ただし、この場合  $X$  は正とする。これはコーシイの不等式から簡単に証明できる。

コーシイの不等式により、

$$\left(\sum_{i=1}^N a_i b_i\right)^2 < \sum_{i=1}^N a_i^2 \sum_{i=1}^N b_i^2 \quad (\text{trivial な場合を除く。})$$

が成り立つ。いま  $a_i^2 = X_i$ ,  $b_i^2 = 1/X_i$  とおくと、

$$N^2 < \sum_{i=1}^N X_i \sum_{i=1}^N \frac{1}{X_i}$$

これから

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{X_i} > \frac{N}{\sum_{i=1}^N X_i}$$

すなわち、正の値では逆数の平均は、平均値の逆数より大となる。

本数の推定は上述のようにして行なうので、 $1/a_j$  の  $a_j$  が問題となってくる。 $a_j$  は直径、あるいはその二乗、樹高などの一定倍であること、直径、樹高の括約単位は日本では一般に 2cm, 1m であることなどにより、正確な  $a_j$  は求まらない。

たとえばビッターリッヒ法では、各点の  $\sum(10,000/a_j)$  を求め、それを平均すると ha 当たり本数の推定値が求まるが、この場合、 $a_j = \pi(\text{cosec } \alpha \cdot d_j/2)^2$  で  $10,000/a_j = (40,000 \cdot \sin^2 \alpha) / (\pi d_j^2)$  となるが、 $(40,000 \sin^2 \alpha) / \pi$  が定数で  $d_j$  のみ測定値だから、 $d_j$  の括約のための誤差がはいってくる。しかも、わが国の林業界においては、2cm 括約といいながら、15.1cm のものを 14cm とする切捨て法、15.1cm は 16cm とする四捨五入法の 2 方法が実施されている。これらの場合の本数推定を次に考察しよう。2cm のような幅の狭い区間では、一様分布を仮定してよいと思われるので、 $d_0$  を括約したあとの直径階とすると、四捨五入の場合、

$$\frac{1}{2} \int_{d_0-1}^{d_0+1} \frac{1}{\pi x^2} dx = \frac{4}{\pi(d_0^2-1)} \dots\dots\dots (2.30)$$

切捨ての場合、

$$\frac{1}{2} \int_{d_0}^{d_0+2} \frac{1}{\pi x^2} dx = \frac{4}{\pi d_0(d_0+2)} \dots\dots\dots (2.31)$$

ここで、 $d_0$  は cm 単位とすると、(2.30) または (2.31) の値を 10,000 倍して断面積定数をかければ、各直径階別の本数が求まる。Table 3 で 1) は切捨て法、2) は四捨五入法で計算したビッターリッヒ法の本数計算表である。この表を見て直ちに判明することは、直径階の小さいところでは本数の減少が急激なため、2cm 括約による調査は問題となる。少なくとも、直径 20cm 以下の木では 1cm 括約が望ましい。

ビッターリッヒは 1cm 括約の場合、単に  $1/g$  より計算した本数に断面積定数 4 をかけて発表しているが<sup>15)</sup>、これと上の 2 計算表の数値を比較して見よう。Table 4 からみてもわかるとおり、四捨五入法の計算で示したものは常にビッターリッヒ法より大きい。48cm 以上はほとんど変わらない。しかし、切捨て法は、かなり小さい値を常に示す。いずれにしても本数推定まで、あるいは後述の平均直径、平均樹高まで算出したいときは、直径は四捨五入法を用い、かつ 20cm 以下では 1cm 括約で測定すべきであろう。

平田-Essen 法でも後述するように各カウント木の樹高測定を行なえば、本数の推定ができるので、同様な計算法により、Table 5 を作った。ただし、表を見やすいよう 10,000 倍しておいた。

Table 3. ビッターリッヒ法における本数計算表 (直径2 cm 括約, 断面積定数をかけること)

Calculation table of tree numbers

<i>d</i>	切捨て法(1) Rounding downwards	四捨五入法(2) Rounding downwards and upwards	<i>d</i>	(1)	(2)	<i>d</i>	(1)	(2)
4 cm	530.52	848.83	30cm	13.263	14.163	56cm	3.920	4.061
6	265.26	363.78	32	11.703	12.446	58	3.659	3.786
8	159.15	202.10	34	10.402	11.024	60	3.423	3.538
10	106.10	128.61	36	9.307	9.832	62	3.209	3.313
12	75.788	89.038	38	8.377	8.824	64	3.014	3.109
14	56.841	65.294	40	7.579	7.963	66	2.837	2.924
16	44.210	49.931	42	6.890	7.222	68	2.675	2.754
18	35.368	39.419	44	6.291	6.580	70	2.526	2.599
20	28.937	31.911	46	5.767	6.020	72	2.390	2.457
22	24.114	26.361	48	5.305	5.529	74	2.264	2.326
24	20.404	22.143	50	4.897	5.095	76	2.148	2.205
26	17.490	18.863	52	4.538	4.711	78	2.040	2.093
28	15.158	16.261	54	4.210	4.368	80	1.941	1.990

Table 4. ビッターリッヒの本数と筆者計算本数の比較

Comparison of tree numbers between the author's and BITTERLICH's calculation

<i>d</i>	<i>B</i>	(1)	(2)	備 考 Remark
4	3174.60	2122.08	3395.32	ビッターリッヒは12cmから95cm まで1 cm 階で, 本数計算をして いる。 4~10 cm は筆者がビッターリッ ヒの計算に準じ計算したもの。 なおビッターリッヒの計算した奇 数 cm 階は省略した。
6	1413.43	1061.04	1455.12	
8	795.23	636.60	808.40	
10	509.55	424.4	514.44	
12	353.67	302.65	356.15	
14	259.84	227.36	261.16	
16	198.95	176.84	199.72	
48	22.10	21.22	22.11	
50	20.37	19.55	20.33	
52	18.84	18.15	18.64	
78	8.37	8.16	8.37	
80	7.96	7.76	7.96	

この場合は 1cm 括約で四捨五入法で樹高  $h_0$  を定めるものとした。

$$\int_{h_0-\frac{1}{2}}^{h_0+\frac{1}{2}} \frac{1}{x^3} dx = \left[ -\frac{1}{x} \right]_{h_0-\frac{1}{2}}^{h_0+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\left( h_0^2 - \frac{1}{4} \right)} = \frac{1}{h_0^2 - \frac{1}{4}} \dots\dots\dots (2.32)$$

上記のほかには筆者の提案した2法の場合の本数推定方法ならびに表を作成してあるが, これは2法の説明を行なう場合に述べることにする。なお, STRAND の方法の場合は上記2法のどちらかを利用すればよいから, STRAND 法の場合の本数推定法はここでは説明を省く。

Table 5. 平田-EsSED 法による本数推定表 (10,000倍してある。樹高定数2をかけて用いること)

Tree number calculation table in the HIRATA-ESSED method

$h$	$h^2$	$h^2-1/4$	$\frac{10,000}{h^2-1/4}$	$h$	$h^2$	$h^2-1/4$	$\frac{10,000}{h^2-1/4}$
2	4	3.75	2666.67	22	484	483.75	20.67
3	9	8.75	1142.86	23	529	528.75	18.91
4	16	15.75	634.92	24	576	575.75	17.37
5	25	24.75	404.04	25	625	624.75	16.01
6	36	35.75	279.72	26	676	675.75	14.80
7	49	48.75	205.13	27	729	728.75	13.72
8	64	63.75	156.86	28	784	783.75	12.76
9	81	80.75	123.84	29	841	840.75	11.89
10	100	99.75	100.25	30	900	899.75	11.11
11	121	120.75	82.82	31	961	960.75	10.41
12	144	143.75	69.57	32	1024	1023.75	9.77
13	169	168.75	59.26	33	1089	1088.75	9.18
14	196	195.75	51.09	34	1156	1155.75	8.65
15	225	224.75	44.49	35	1225	1224.75	8.16
16	256	255.75	39.10	36	1296	1295.75	7.72
17	289	288.75	34.63	37	1369	1368.75	7.29
18	324	323.75	30.89	38	1444	1443.75	6.93
19	361	360.75	27.72	39	1521	1520.75	6.58
20	400	399.75	25.02	40	1600	1599.75	6.24
21	441	440.75	22.69				

2.2.4 単木平均値の推定と誤差

森林調査では、一般に ha あたり総本数、総材積、総断面積のほか、単木平均直径および平均樹高、時には平均材積を知る必要を生ずる。このように林分構成因子の平均を知りたい場合は、プロットレスサンプリングでは不偏推定は可能ではないが、比を推定することにより、一致推定量は求まる。この点、普通のプロットサンプリングでも同様であり、プロットサンプリングではこれから述べる平均値の推定法をそのまま適用し、その分散推定には有限母集団修正を付して用いればよい。(2.1) は

$$\hat{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{n_k} \frac{x_{kj}}{a_{kj}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} x_j}{a_j} \dots\dots\dots (2.33)$$

( $k_j$  は、1, …… ,  $N$  の木の中のあるものをとる。点が変われば異なる木をカウントするのが普通だが、林分が小面積のときは、同じものをとる場合もあろう。)

とかける。本数の方は、

$$\hat{N} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj}}{a_j} \dots\dots\dots (2.34)$$

これは各点ごとに  $\sum_j^{n_k} (x_j/a_j)$  を作り、その和を求め標本の大きさとすればよいが、 $x$  の単木平均の計算法には、統計理論上、従来からの3方法<sup>5)7)27)31)32)96)110)</sup>と最近 J. KERRICH の提案した方法<sup>69)</sup>と4方法が考えられる。次にこれらの方法につき検討しよう。

i) 第1法 (比推定)

(2.33) を (2.34) でわり、

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} x_j}{a_j}}{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj}}{a_j}} \dots\dots\dots (2.35)$$

として求める。

(2.35) は分母と分子の関係が原点を通る直線関係にある場合で、しかも分子の  $\sum_{j=1}^N (\delta_{kj} x_j / a_j)$  の直線のまわりの分散が  $\sum_{j=1}^N (\delta_{kj} / a_j)$  に比例する場合は最良不偏推定量となることは周知のとおりである。 $\Sigma(x/a) / \Sigma(1/a)$  は分母分子ともに確率変数となるから、平均の推定は (2.35) のように行ない、分散は、

$$\begin{aligned} v(\bar{y}) &= \frac{n}{(n-1) \left\{ \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj}}{a_j} \right) \right\}^2} \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} x_j}{a_j} - \bar{y} \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj}}{a_j} \right)^2 \\ &= \frac{n}{(n-1)} \frac{1}{\left\{ \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj}}{a_j} \right) \right\}^2} \left[ \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} x_j}{a_j} \right)^2 + \bar{y}^2 \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj}}{a_j} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - 2\bar{y} \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} x_j}{a_j} \right) \left( \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj}}{a_j} \right) \right] \dots\dots\dots (2.36) \end{aligned}$$

により推定できる。なお、

$$\frac{n}{(n-1)} \frac{1}{\left\{ \sum_{j=1}^N \left( \sum_{k=1}^n \frac{\delta_{kj}}{a_j} \right) \right\}^2} = \frac{1}{n(n-1) (\text{ha あたり平均本数})^2} \dots\dots\dots (2.37)$$

としてもよい。この方法はいわゆる比推定法として広く知られておるが、さらに一般回帰理論から、比を平均する方法と分散が定数の場合の推定法が考えられるので、これについて以下に述べる。

ii) 第 2 法 (比を平均する方法)

$\sum_{j=1}^N (\delta_{kj} x_j / a_j)$  の分散が  $\left\{ \sum_{j=1}^N (\delta_{kj} / a_j) \right\}$  に比例する場合は、各点、各線分で平均樹高なり、平均直径を求めて、それを点数または線分数でわり、平均する。すなわち、各点、各線で

$$\bar{y}_k = \frac{\sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} x_j}{a_j}}{\sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj}}{a_j}} \dots\dots\dots (2.38)$$

をもとめ、

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \bar{y}_k \dots\dots\dots (2.39)$$

とすれば、(2.39) は最良線型不偏推定となる。その誤差分散の推定値は当然

$$v(\bar{y}) = \frac{\sum_{k=1}^n (\bar{y}_k - \bar{y})^2}{n(n-1)} \dots\dots\dots (2.40)$$

となる。

iii) 第 3 法

$\sum_{j=1}^N (\delta_{kj} x_j / a_j)$  の分散が回帰線のまわりで constant な場合には、その最良不偏推定は、

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj}}{a_j} \right) \left( \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} x_j}{a_j} \right)}{\sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj}}{a_j} \right)^2} \dots\dots\dots (2.41)$$

で推定される。その誤差分散は、

$$v(\bar{y}) = \frac{1}{n-1} \left[ \frac{\sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} x_j}{a_j} \right)^2}{\sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj}}{a_j} \right)^2} - \bar{y}^2 \right] \dots\dots\dots(2.42)$$

で推定される<sup>27)110)</sup> (マルコフの定理)。自然界では回帰線のまわりの分散が一定であることはまれであるため、この方法は一般に有効でないと思われる。

iv) 第 4 法

J. E. KERRICH は 1966 年、対数変換を利用し、比の推定法を発表した<sup>60)</sup>。かれの方法は、多数の測定値  $(x, y)$  の組がある場合、 $y=ax$  の直線をあてはめるとき、しかも、 $x, y$  とともに確率変数であり、かつ、 $x_k, y_k$  の変動係数が小さい場合 (たとえば人工林など) は、

$$\hat{a} = \text{anti log} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\log y_k - \log x_k) \right\}$$

で  $a$  は推定され、 $\log \hat{a}$  の分散は、

$$v(\log a) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left\{ v(\log y_k) + v(\log x_k) \right\}$$

で近似されるということである。

$\hat{a}$  の信頼区間は、

$$\text{anti log} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\log y_k - \log x_k) \pm t \cdot \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{k=1}^n (v(\log y_k) + v(\log x_k))} \right\}$$

となる。われわれの場合、この  $y_k = \sum_{j=1}^N (\delta_{kj} x_j) / a_j$ 、 $x_k = \sum_{j=1}^N (\delta_{kj}) / a_j$  に相当するので、これらを上式の  $x_k, y_k$  に代入して計算すればよい。なお、この場合、 $\log y_k, \log x_k$  がともに分散が  $\sigma^2$  で正規分布に従うならば、 $\log \hat{a}$  は  $\log a$  の最良線型不偏推定子となる。しかし、一般に  $\log \hat{a}$  は偏りがあるが、偏りが無視でき、かつ分散も小ならば有効な方法である。このようなことは両変量の変動係数が小さい場合生ずる。この方法は  $\log x_k, \log y_k$  が正規分布に従うならば exact な方法である。

このように 4 つの推定方法が考えられるが、第 3 の方法と第 4 の J. E. KERRICH の方法は計算労力の点で問題である。とくに、第 4 の J. E. KERRICH 法は後例でよい結果を示しているが、データの個数の多い場合、対数計算のため労力、時間を多く必要とすることに難点がある。第 3 法は回帰線のまわりの分散が一定という仮定にも問題がある。問題はしたがって第 1 の方法と第 2 の方法の選択になる。ここで、すべての方法に対して前提となるべきことは、回帰直線が原点を通らなければならないことである。もし原点を通らなければ、第 1 法は  $1/n$  のオーダーの偏り

$$\left( \frac{\sum_{j=1}^N x_{kj}}{E \sum_{j=1}^N \frac{1}{a_j}} - \frac{\sum_{j=1}^N \delta_{kj}}{E \sum_{j=1}^N \frac{1}{a_j}} \right) \cdot \text{var} \left( \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj}}{a_j} \right) - \text{cov} \left( \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj}}{a_j}, \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} x_j}{a_j} \right)$$

をもつものの、一致推定量である<sup>104)</sup>。したがって、標本の大きさが大きくなれば、それだけ偏りは減少してくる。一方、第 2 の方法は一致推定量でなく固定した偏りをもつ<sup>27)56)</sup> (COCHRAN, p. 176)注<sup>1)</sup>。しかも、第 2 の方法は、 $x$  の大きさに比例した確率比例抽出をするときや、既述のように分子の因子の分散が分母

の因子の二乗に比例するとき、

$$\bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}$$

が利用できるので、その場合に用いられる方法である<sup>104)</sup>。

したがって、一般の場合に適合しないように思われる。結論として、森林調査のように大量なデータを扱うには第一の方法すなわち、普通の比推定を用いることが妥当であろう。一般に、偏りがあっても (偏り)<sup>2</sup> + (誤差分散)<sup>2</sup> = Mean Square Error (MSE) が小さい推定法が best であるとされており、したがって、比推定の偏りを小さくする方法は QUENOUILLE をはじめ多くの人により研究され、また、偏りのない比を求めることも研究されている<sup>7)27)31)32)31)38)46)64)70)73)85)92)98)35)97)109)</sup>。クヌーイユの方法は偏りを  $1/n^2$  のオーダーまで小さくするものできわめて簡単にできるので参考まで挙げておく。この方法<sup>92)</sup>は測定値の組全体を半分に分け、全体での比  $u_1$ 、第 1 組の比  $u_2$ 、第 2 組の比  $u_3$  とし、

$$u = 2u_1 - 0.5(u_2 + u_3) \dots\dots\dots (2.43)$$

により計算する方法である。この方法は、DEMING の複合標本方式や MAHALANOBIS の相互貫入標本方式に利用できる。しかし、このクヌーイユの方法は (2.43) 式よりわかるように、推定値の誤差分散が大きくなることであるが、偏りが小さくなるため、 $x$ 、 $y$  の関係が一次で、 $x$  が正規分布に従う場合は、 $u$  の MSE は小となることが報告されている<sup>34)</sup> (DURBIN, 1959)。

比推定ではこのほかに、HARTLEY, ROSS<sup>27)46)</sup> の比推定子、( $\bar{r}'$ )

$$\bar{r}' = \bar{r} + \frac{n}{(n-1)\bar{x}} (y - \bar{r}\bar{x}) \quad \left( \bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i} \right)$$

は比は不偏となるが、分散は一般に普通の比推定より大きくなる。このほか、BEALE<sup>7)</sup>, ROBSON<sup>95)</sup>, OLKIN<sup>79)</sup>, PASCAL DE NIETO<sup>86)</sup> の式も提示されているが、これらにつき論ずることは本研究の趣旨ではないので、省略するが下述する例より見て、平均直径や平均樹高推定にはどの方法でも大差ないことがわかるが、統計的に最も無難で計算の簡単な比推定法を用いるのが賢明であろう。

実際の調査の例として、1964 年林業試験場高萩試験地のアカマツ 35 年生林分 (面積 0.25 ha) の例をあげる (Table 6)。

Table 6. 平均値計算諸法の比較, 例 1  
Comparison of several estimates of mean diameter and height

ビッターリッヒ法 BITTERLICH'S method 断面積定数 4 BAF <sub>4</sub>	直 径 Diameter			樹 高 Height			備 考 Remark
	平 均 Average	$\hat{\sigma}_h$	信頼幅/95% Confidence interval	平 均 Average	$\hat{\sigma}_h$	信頼幅/95% Confidence interval	
毎木調査値 Complete enumeration	cm 14.9	cm	cm	m 16.0	m	m	ビッターリッヒ法で断面積乗数 4 を用いた。点数は 9 である。
第 1 法	14.4	0.49	1.13	16.0	0.11	0.25	
第 2 法	15.2	0.50	1.16	16.0	0.10	0.22	
第 3 法	14.2	0.47	1.08	16.0	0.11	0.24	
第 4 法	14.6	0.46	1.08	16.0	0.13	0.31	

注 1) 分母を  $x$ 、分子を  $y$  と表わすと、|第 1 の方法の偏りの上限|  $\leq (\sigma_{y/2}\sigma_x) / \bar{X}$ 、|第 2 の方法の偏りの上限|  $\leq \sigma_{y/x}\sigma_x / \bar{X}$ 。

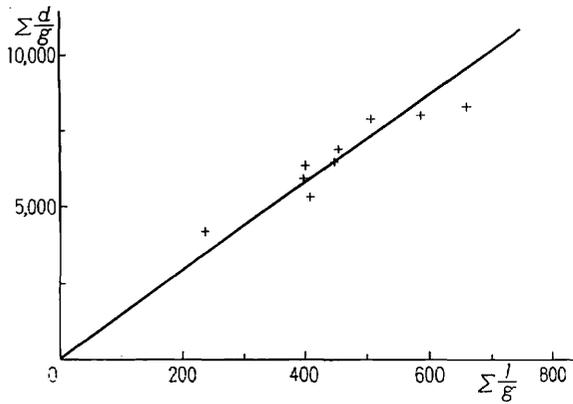


Fig. 13  $\Sigma(1/g)$  に対する  $\Sigma(d/g)$  の関係 (ビッターリッヒ法, BAF=4, 高萩アカマツ林)  
Relation between  $\Sigma(1/g)$  and  $\Sigma(d/g)$  (BITTERLICH, BAF 4, Takahagi pine stand)

Fig. 14  $\Sigma(1/g)$  に対する  $\Sigma(h/g)$  の関係 (ビッターリッヒ法, BAF=4, 高萩アカマツ林)  
Relation between  $\Sigma(1/g)$  and  $\Sigma(h/g)$  (the same as Fig. 13)

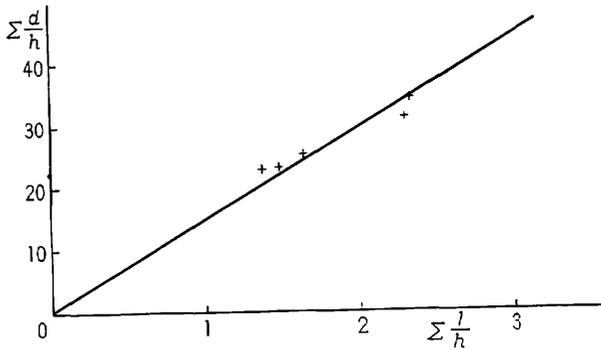
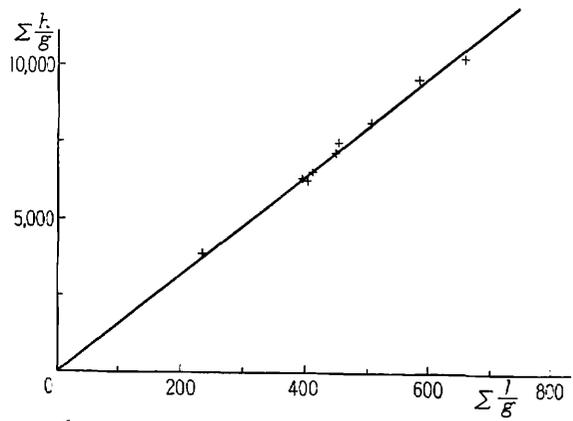
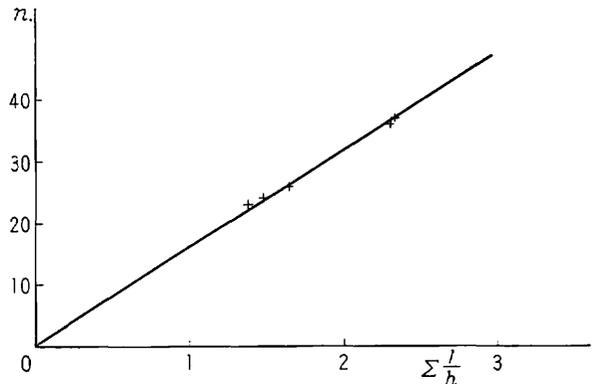


Fig. 15  $\Sigma(1/h)$  に対する  $\Sigma(d/h)$  の関係 (L1法, 高萩アカマツ林)  
Relation between  $\Sigma(1/h)$  and  $\Sigma(d/h)$  (L1 method Takahagi pine stand)

Fig. 16  $\Sigma(1/h)$  に対するカウント数の関係 (L1法, 高萩アカマツ林)  
Relation between  $\Sigma(1/h)$  and count number (the same as Fig. 15)



この結果から見て、いずれも甲乙つけ難いので、1966年天城国有林 146 林班に小班のスギ58年生林分から、4 本の木を選んで、各方法での母分散、MSE を計算した (Table 7)。

なお、ここでは断面積定数 4 のビッターリッヒ法と定長 10m の L1 法 (片側のみ検視) を選んで、その拡大領域をすべて含む地域を画して計算した。両法とも 4 本の本の拡大領域で境された区域は 13 個になり、そのそれぞれの面積を計算し、確率を計算した。

この結果から見ると、普通の比推定子は一致推定子であることがわかる。しかし、分散は大きい方に属し、MSEより見ると、偏りはあるが、ケーリッヒ法がよい。分散は抽出個数を大きくするにつれ小となるので、例にあげた程度では問題にならない。比推定法では、当然 MSE もそれにつれ小となる。したがって、ビッターリッヒ法やその他 plotless sampling では平均直径や平均樹高の計算には比推定法が精度、計算の容易な点から、最も妥当な推定法といえよう (Table 8)。

Table 7. 天城スギ 4 本の直径と樹高  
Diameters and heights of four trees in Amagi National Forest

木の番号 Tree No.	No. 1	No. 2	No. 3	No. 4	平均
直径 cm	46.2	49.4	45.2	36.1	44.225
樹高 m	24.0	22.0	20.0	20.0	21.500

Table 8. 平均値計算諸法の比較、ビッターリッヒ法  
Comparison of several estimates of mean diameter and height

BITTERLICH'S method

ビッターリッヒ法 BITTERLICH'S method 断面積定数=4 BAF	直径 Diameter			樹高 Height		
	$\bar{d}$	$\hat{\sigma}_d^2$	$\widehat{MSE}$	$\bar{h}$	$\hat{\sigma}_h^2$	$\widehat{MSE}$
毎木調査値 Complete enumeration	cm	cm <sup>2</sup>	cm <sup>2</sup>	m	m <sup>2</sup>	m <sup>2</sup>
第 1 法	44.225	8.7148	8.7148	21.500	1.5196	1.5199
第 2 法	45.300	7.5598	8.7154	21.737	1.4636	1.5248
第 3 法	44.866	7.7479	8.1588	21.986	1.5258	1.7620
第 4 法	45.200	7.5698	8.5204	21.700	1.4649	1.5049

L1 法 L1 method

L1 法 L1 method	直径 Diameter			樹高 Height		
	$\bar{d}$	$\hat{\sigma}_d^2$	$\widehat{MSE}$	$\bar{h}$	$\hat{\sigma}_h^2$	$\widehat{MSE}$
毎木調査値 Complete enumeration	cm	cm <sup>2</sup>	cm <sup>2</sup>	m	m <sup>2</sup>	m <sup>2</sup>
第 1 法	44.225	11.0196	11.0196	21.500	1.6320	1.6320
第 2 法	44.718	10.7758	11.0238	21.608	1.5996	1.6113
第 3 法	44.866	11.5098	11.6416	21.986	1.6256	1.6284
第 4 法	44.590	10.7925	10.9257	21.700	1.6004	1.6068

この比較をさらに詳細に行なうため、現実にこの天城国有林で 1ha に 20 点、20 線とって各種の方法を行なった結果を図示すると、Fig. 17~26 のようになった。なお、その結果を表示すると Table 9 のようになる。

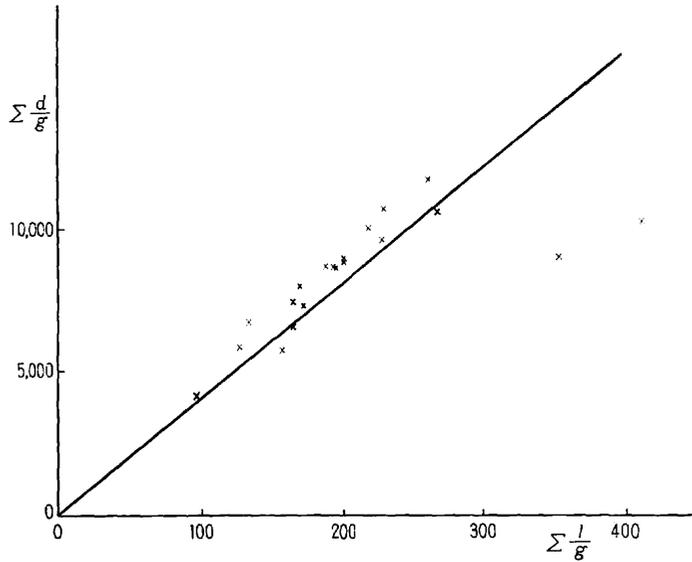


Fig. 17  $\Sigma(1/g)$  に対する  $\Sigma(d/g)$  の関係 (ビッターリッヒ法, BAF=9/4, 天城スギ林)  
Relation between  $\Sigma(1/g)$  and  $\Sigma(d/g)$  (BITTERLICH, BAF=9/4, Amagi *Cryptomeria* stand)

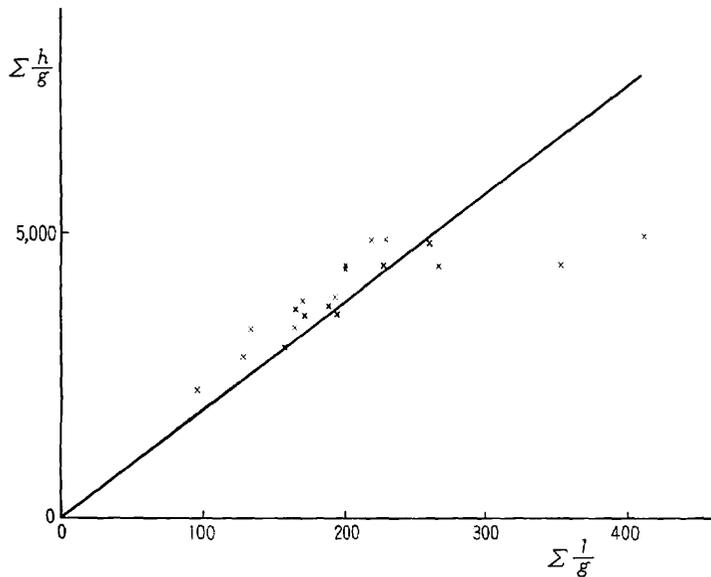


Fig. 18  $\Sigma(1/g)$  に対する  $\Sigma(h/g)$  の関係 (ビッターリッヒ法, BAF=9/4, 天城スギ林)  
Relation between  $\Sigma(1/g)$  and  $\Sigma(h/g)$  (the same as Fig. 17)

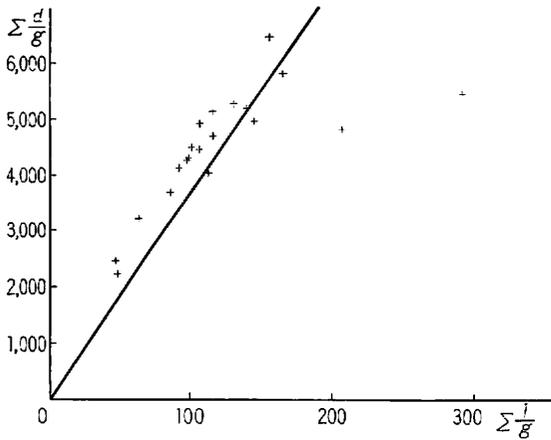


Fig. 19  $\Sigma(1/g)$  に対する  $\Sigma(d/g)$  の関係 (ビッターリッヒ法, BAF=4, 天城スギ林)  
Relation between  $\Sigma(1/g)$  and  $\Sigma(d/g)$  (the same as the former except BAF=4)

Fig. 20  $\Sigma(1/g)$  に対する  $\Sigma(h/g)$  の関係 (ビッターリッヒ法, BAF=4, 天城スギ林)  
Relation between  $\Sigma(1/g)$  and  $\Sigma(h/g)$  (the same as Fig. 19)

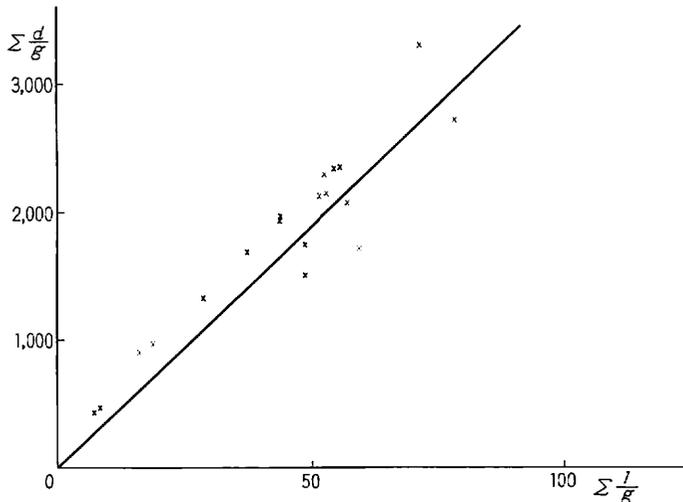
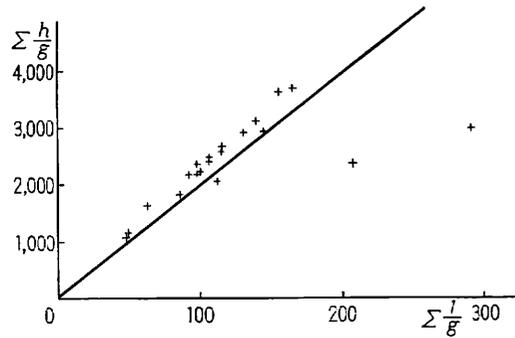


Fig. 21  $\Sigma(1/g)$  に対する  $\Sigma(d/g)$  の関係 (ビッターリッヒ法, (BAF=9, 天城スギ林)  
Relation between  $\Sigma(1/g)$  and  $\Sigma(d/g)$  (the same as the former except BAF=9)

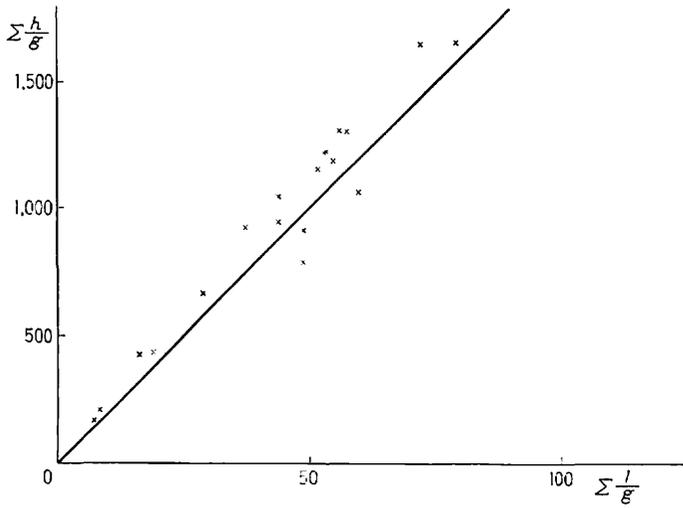


Fig. 22  $\Sigma(1/g)$  に対する  
 $\Sigma(h/g)$  の関係 (ピッ  
 ターリッヒ法, BAF=  
 9, 天城スギ林)  
 Relation between  
 $\Sigma(1/g)$  and  $\Sigma(h/g)$   
 (the same as Fig.  
 21)

Fig. 23  $\Sigma(1/h)$  に対する  
 $\Sigma(d/h)$  の関係 (L1法,  
 東西線, 天城スギ林)  
 Relation between  
 $\Sigma(1/h)$  and  $\Sigma(d/h)$   
 (L1 method, Amagi  
*Cryptomeria* stand,  
 line direction E-W)

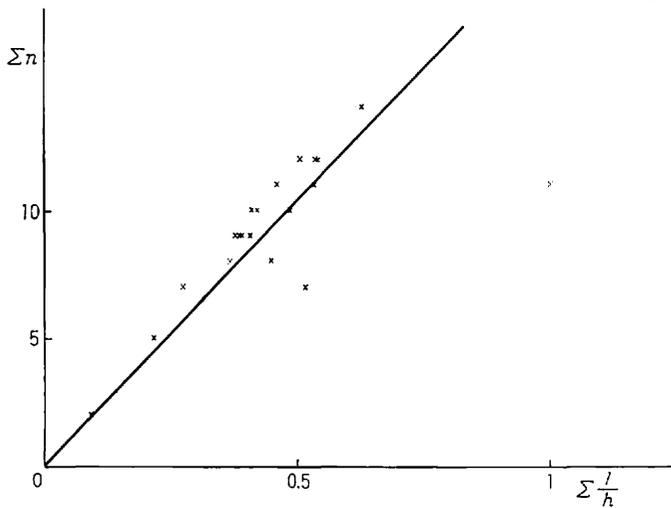
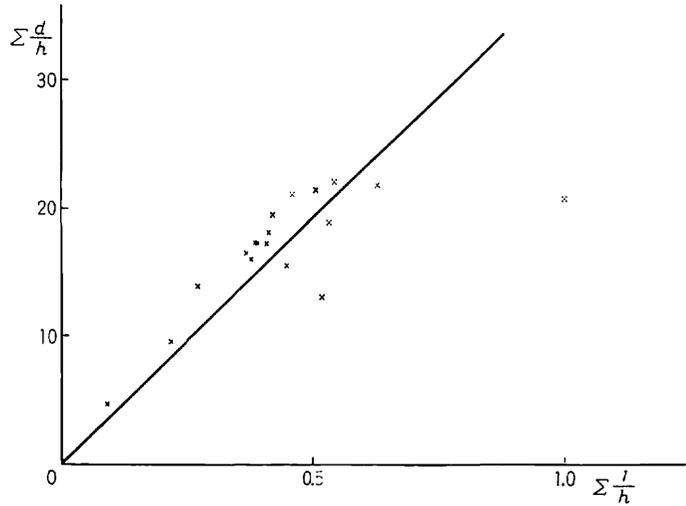


Fig. 24  $\Sigma(1/h)$  に対するカ  
 ウント数の関係 (L1法,  
 東西線, 天城スギ林)  
 Relation between  
 $\Sigma(1/h)$  and counted  
 number (the same as  
 as Fig. 23)

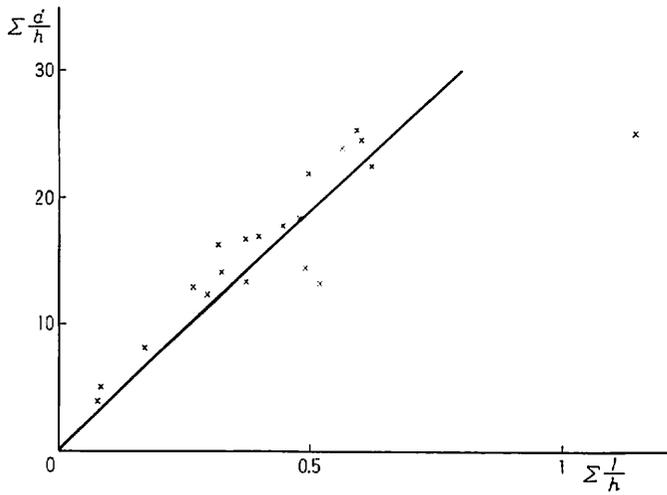


Fig. 25  $\Sigma(1/h)$  に対する  $\Sigma(d/h)$  の関係 (L1法, 南北線, 天城スギ林)  
Relation between  $\Sigma(1/h)$  and  $\Sigma(d/h)$  (the same as the former fig. except line direction N-S)

Fig. 26  $\Sigma(1/h)$  に対するカウント数の関係 (L1法, 南北線, 天城スギ林)  
Relation between  $\Sigma(1/h)$  and counted number (the same as Fig. 25)

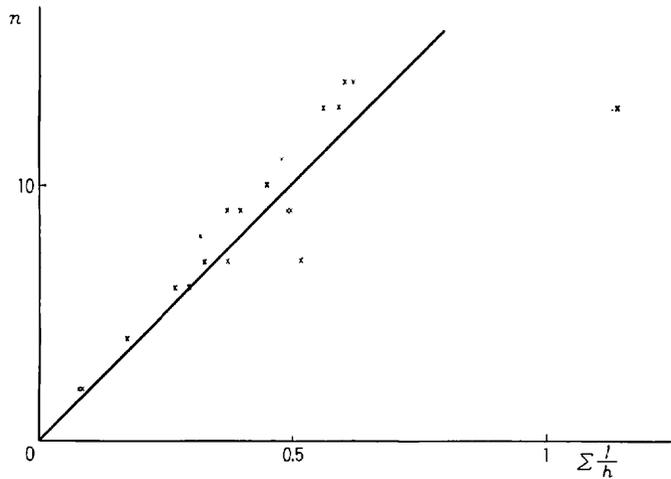


Table 9. 比推定法による直径, 樹高の平均の推定値とその分散および平均平方誤差  
Estimates of mean diameter and height by means of ratio method and variance and mean-square error

		平均直径 Mean diameter	分散 Estimate of variance	MSE	平均樹高 Mean height	分散 Estimate of variance	MSE
		cm	cm <sup>2</sup>		m	m <sup>2</sup>	
毎木調査値 Complete enumeration		39.19			20.84		
ビッターリ ツヒ法 BITTERLICH'S method	BAF=9/4	38.00	4.1769	4.1970	20.39	1.2745	1.2794
	" 4	36.93	7.5971	7.6582	19.87	2.2547	2.2692
	" 9	37.70	8.2397	8.3013	20.10	2.6724	2.6886
L1法 L1 method	方向 南北 Direc- N-S	37.72	6.5693	6.6165	20.02	0.8042	0.8100
	tion 東西 E-W	38.42	5.6871	5.7136	20.66	2.6484	2.6587

bias の計算は、 $r = \Sigma y / \Sigma x$  のときの  $E(r-R) = (1/n\bar{X}^2) \times (R \text{ var}(x) - \text{cov}(x \cdot y))$  により計算した<sup>27)</sup> pp. 160-161, いずれもきわめて小さく、上表の MSE と分散の比較からわかるように、全く問題にならないことがわかる。

次に、ビッターリッヒ法の場合の各点での  $\Sigma(d/g)$ ,  $\Sigma(1/g)$  の関係と L1 法における同じ関係をみると図のようにばらつきがきわめて小さく、原点を通る直線が十分適合する。

以上の両例をみると、この場合、後述の林縁誤差 (周辺誤差) の修正を行っていないにもかかわらず、高萩の例では毎木調査値に非常に近い値を示している。これは  $a_j$  なる因子が分母分子ともにはいつていて、ともに修正した  $a'_j$  とすべきものが、そのままに変えずに扱ったこと、および、平坦地で林相が均一で直径、樹高の変化が少ないため影響がほとんど現われなかったことによるものであろう。しかし、天城の方は面積 1ha にもかかわらず、林縁誤差を修正しないために過小推定となることを裏書している。これは天城は高萩と異なり、直径 8cm から 80cm までの木が成立し、地形に変化多く、したがって地位林相の変動がやや激しいため、生じたものと思われる。

### 第3章 森林調査への応用

#### 3.1 ビッターリッヒ法

ビッターリッヒ法は林内のランダムに選ばれた点に立ち、所定の角  $2\alpha$  をもって、木の胸高直径を望み、この角をはみ出す木を数え、さらに必要な場合は直径と樹高を測定し (ただし、樹高測定木はカウント木の中からランダムに選んだ数本のものについて行なってもよい)、調査するものである。

なお、傾斜地で角  $2\alpha$  は傾斜角  $\theta$  に応じて自動的に修正するようになっている器械が大部分である。Fig. 27 で  $O'$  点に立ち、 $O$  という木を見た時、ちょうどすれすれに胸高周囲をはさんだとして、 $\overline{OO'} = R_j$  とすれば、 $O$  を中心として  $R_j$  の半径を有する円内に点がおちた場合は、必ず  $O$  の木がカウントされる。木の半径  $OP = OQ = r_j = d_j/2$  とすると、 $\sin \alpha = r_j/R_j$  で、木の断面積 ( $g_j$ ) が  $\pi r_j^2 = (\pi/4)d_j^2$  であるから、拡大円の面積は  $\pi R_j^2 = \pi r_j^2 / \sin^2 \alpha = (\pi d_j^2 \text{cosec}^2 \alpha) / 4 = g_j \text{cosec}^2 \alpha$  となる。この  $(\pi d_j^2 \text{cosec}^2 \alpha) / 4$  が、今まで述べてきた  $a_j$  に相当するものである。この  $\alpha$  は一般にきわめて小さいので  $\sin \alpha \approx \tan \alpha$  とみなしてもよく、また  $O$  の木の断面の中に点が落ちた場合を除くると、この  $a_j$  は  $(\pi d_j^2 \cotan^2 \alpha) / 4$  となる<sup>28)</sup>。  $2r_j/R_j = d_j/R_j$  はビッターリッヒのいう Winkelzahl であるが、直径をすれすれにはさむ点  $O'$  で  $AB$  のスリット幅でのぞけば、 $\tan \alpha = AB/2O'C =$ 一定で Winkelzahl は  $PQ/OO'$  となり、 $PQ \div 2r_j = d_j$ ,  $OO' = R_j$  だから  $AB/PQ \div AB/d_j \div O'C/R_j$ , ゆえに  $(AB/O'C) \div (d_j/R_j)$  となるようにほとんどの器械は製作されている ( $d_j/OO'$  は Grenzwinkelzahl となる)。

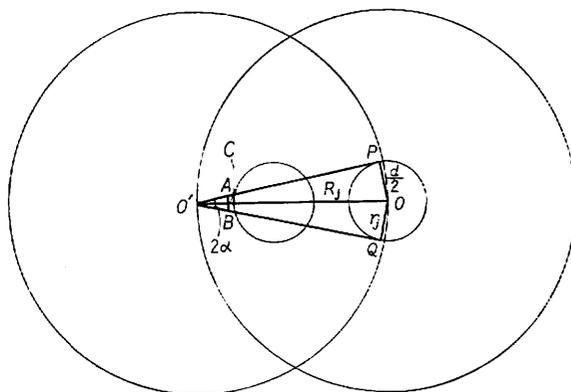


Fig. 27 ビッターリッヒ法の考え  
Conceptional figure of BITTERLICH'S method.

既述のように ha あたりの総計を算出するには、各点でカウント木の  $10,000(x_j/a_j)$  の和を求めればよいのであるから、 $10,000(x_j/a_j) = (40,000 \sin^2 \alpha \cdot x_j) / \pi \cdot d_j^2 = (10,000 \sin^2 \alpha \cdot x_j) / g_j$  ( $g_j = \pi d_j^2 / 4$ ) をカウント木について計算し、その合計を各点ごとに求めればよい。

$x_j$  が断面積の場合は、 $(10,000 \sin^2 \alpha \cdot g_j) / g_j = 10,000 \sin^2 \alpha =$ 一定、また近似的にこれは  $10,000 \tan^2 \alpha = (100AB/2O'C)^2$  に等しく一定となる。これがピッターリッヒの断面積定数なることはよく知られた事実である。かれは最初  $AB=2$  cm,  $O'C=100$  cm とした。断面積定数は  $(100 \cdot AB/2O'C)^2 = \{(100 \times 2) / (2 \times 100)\}^2 = 1$  となる式より判明するように、 $AB$  と  $O'C$  の関係を変えていけば、どのような断面積定数でも定められる。断面積定数は 1, 2, 4 がよく用いられ、特に日本では 4 が多く用いられる。断面積定数 (BAF) 1, 2, 4 に対しては上式から  $R$  がそれぞれ  $50d$ ,  $25\sqrt{2}d$ ,  $25d$  が対応することが判明しよう。ha あたり材積を推定する場合は、 $10,000 x_j/a_j = 10,000 \sin^2 \alpha \cdot v_j/g_j$  となる。ここで  $v_j/g_j = (fh)_j = Z_j$  という確率変数と考えると、 $(10,000 \sin^2 \alpha \cdot v_j) / g_j = 10,000 \sin^2 \alpha \cdot Z_j = BAF \times Z_j$  となる。したがって、材積表の数値を対応する  $g_j$  でわっておくか、あるいは直接  $fh$  (形状高) 表を作成しておき、カウント木のこれらの合計を求め、各点の平均をとり BAF をかければ ha あたり材積が求まる (Appendix 1 参照)。

ピッターリッヒ法ではもう一つの材積の求め方がある。すなわち、まず ha あたりの円柱体体積  $(\sum_{j=1}^N g_j h_j)$  を推定し、それに林分形数  $F$  をかければよい。このことは、 $g_j h_j / a_j = g_j h_j / g_j \times 10,000 \times \sin^2 \alpha = h_j \times BAF$  となるから、各点におけるカウント木の樹高の和を求めると、それが ha 当たり円柱体体積の推定値となることからわかる。すなわち、

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{x_j}{a_j} \times 10,000 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} g_j h_j}{a_j} = \frac{1}{n} \sum_k \sum_{j=1}^N \delta_{kj} \cdot h_j \cdot BAF$$

で、この期待値は  $\sum_{j=1}^N g_j h_j$  すなわち ha 当たり円柱体体積の合計となる。この値は  $g$  と  $h$  が正の相関があるので、ha 当たり断面積合計  $\times$  平均樹高より大であるので、一般にいわゆる、林分形数より小さい係数をかけなければならない。本数を推定する場合は、 $x_j/a_j \times 10,000 \sin^2 \alpha$  の  $x_j$  を 1 とおき求めること、平均直径、平均樹高の求め方は前章で詳しく述べたので省略する。

次にこれら ha 当たり平均の推定値の誤差であるが、これも一般理論で証明したように、各点での

$$y_k = 10,000 \sin^2 \alpha \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} x_j}{g_j} = (BAF) \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} x_j}{g_j}$$

を計算し、 $y_k$  の分散を求め、 $n$  でわり、平方根を求めれば、標準誤差が求まる。 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{n_k} \frac{x_{kj}}{a_{kj}}$  は  $n$  が大きいときは大体、正規分布に従うものと見なしてもよいから、STUDENT の  $t$  表から自由度  $(n-1)$  の 0.05 の値を見い出して、これをかけて、95% 信頼区間を設定すればよい。ha あたりの推定値の母分散の公式は既述のとおり、

$$\frac{1}{A} \left[ \sum_{j=1}^N \frac{x_j^2}{a_j} + 2 \sum_{l < m}^N \frac{a_{lm} x_l x_m}{a_l a_m} - \frac{(\sum x)^2}{A} \right] \times (10,000)^2 \quad (\text{ただし、} A \text{ は ha 単位})$$

となる。 $a_j$  は  $j$  番目の木の拡大領域で、 $a_{lm}$  は  $l$  番目の木と  $m$  番目の木の交わった重複面積である。他の方法についても同様であるが、分散は林地面積、木に与える拡大領域の面積  $a_j$ 、2 本の木の交わりの面積  $a_{lm}$  すなわち密度などに depend する。すべての  $a_j$  がきわめて大きく全林地をおおうときは、どの地点に立ってもすべて全林木がカウントされ、誤差はなくなるだろう。なお、前章で述べた分散に関する説明はピッターリッヒ法にもそのままあてはまる。従って、同一林木本数、同一の直径樹高分布の

林分でも、立木の配置が均斉のときには分散が小さく、群状をなしたり、不均斉な構造を示すときは分散が大きくなり、また林の成立区域面積が大となれば、分散は小となるが、相対分散は逆に大きくなる。この詳細な説明は第4章において行なう。

ビッターリッヒ法では両円の交わりの面積  $a_{tm}$  は、Fig. 28で  $OO'$   $=d$  とし、 $O$  円と  $O'$  円の半径を  $r, R$  とすれば、

$$\begin{aligned}
 a_{tm} &= r^2 \cos^{-1} \frac{d^2+r^2-R^2}{2dr} + R^2 \cos^{-1} \frac{d^2-r^2+R^2}{2dR} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sqrt{4(d^2r^2+d^2R^2+r^2R^2)-(d^2+r^2+R^2)^2} \\
 &= r^2 \cos^{-1} \frac{r^2+d^2-R^2}{2dr} + R^2 \cos^{-1} \frac{d^2-r^2+R^2}{2dR} \\
 &\quad - 2\sqrt{S(S-r)(S-R)(S-d)} \dots\dots\dots(3.1) \\
 &\quad (2S=r+R+d \text{ とする})
 \end{aligned}$$

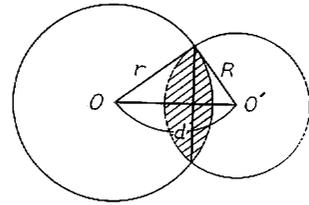


Fig. 28 拡大円の重なり  
Overlapping in  
B-Method.

Table 10. 高萩アカマツ林におけるビッターリッヒ法の調査結果 (BAF = 4)

Experiment of BITTERLICH'S method in Takahagi pine stand

	毎木調査値 Complete enumeration	標本推定値 Estimates	推定値の標準 誤差の推定値 Standard error	信 頼 幅 Confidence interval /95%	百分率誤差 Percentage error
本 数 /ha(N)	1902本	1775	161	370.5	-6.7%
平均直径 ( $\bar{d}$ )	14.9cm	14.4	0.49	1.13	-3.3
平均樹高 ( $\bar{h}$ )	16.0 m	16.0	0.11	0.25	0
断 面 積 /ha(G)	35.3 m <sup>2</sup>	32.4	1.82	4.20	-8.2
材 積 /ha(V)	286.4 m <sup>3</sup>	262.4	15.54	35.80	-8.3
円柱体材積 /ha	578.2 m <sup>3</sup>	528.4	30.90	71.4	-8.6

備考 (Remark) 円柱体材積  $\Sigma gh/ha$  に対する材積  $V/ha$  の比を林分形数と称すれば、ここでは 0.4954 となる。この 0.4954 は真の値とすると誤差を含まない。これを  $\Sigma gh$  にかけて推定した材積は 261.8m<sup>3</sup>, その標準誤差は 15.3m<sup>3</sup>, 信頼幅は 35.4m<sup>3</sup>, 毎木調査値に対し 8.8%過小となる。

Table 11. 天城スギ林におけるビッターリッヒ法の調査結果 (BAF = 4)

Experiment of BITTERLICH'S method in Amagi *Cryptomeria* stand

	毎木調査値 Complete enumeration	標本推定値 Estimates	推定値の標準 誤差の推定値 standard error	信 頼 幅 confidence interval	百分率誤差 Percentage error
N/ha	458本	486.70	49.84	104.31	+6.27%
$\bar{d}$	39.19cm	36.94	2.76	4.38	-5.97
$\bar{h}$	20.84m	19.87	1.50	3.14	-4.67
G/ha	59.11m <sup>2</sup>	58.40	2.91	6.09	-1.58
V/ha	563.92m <sup>3</sup>	558.68	35.03	73.31	-0.93
$\Sigma gh/ha$	1314.68m <sup>3</sup>	1309.20	83.54	174.84	-0.004
(V/ha)	563.92m <sup>3</sup>	561.57	35.83	75.00	-0.004

となる<sup>84)</sup>。

A,  $a_j$  を一定とし、木の直径も一定とし、本数も一定とすれば、 $a_{1m}$  の大小により、分散の大きさがきまることが上式より直観的にわかるが、この問題については 4 章で詳述する。

次に 1964 年 10 月林業試験場高萩試験地の約 35 年生のアカツクシ林での点をとり、ピッターリッヒ法を行なった結果を Table 10 に示す (平均樹高および平均直径の例は既述、断面積定数 4)。なお、1965 年天城管林署管内 146 林班に、へ小班面積 1 ha において断面積定数 4 を用いて 20 点をとった結果を Table 11 に示す。

以上の 2 例を見ると、たまたま天城の本数推定と高萩の樹高推定とを除き、いずれも過少推定となっている。これは林縁効果による影響を修正しなかったことに原因するものであるが、高萩の場合は面積 0.25 ha、天城の場合は面積 1 ha で、前者の場合は面積が後者の 1/4 のため、林縁効果の影響が強く表われそうに見えるが、たまたまポイントを systematic に選んだところ林縁近くの抽出点がほとんどなかったことと、林相が天城よりはるかに均一で、林齢も若く林縁効果の影響は強く表われなかったのであろう。しかし、それにしても点の数の多少にも問題があるが、0.25 ha で 9 点は 1 ha で 36 点ということになるので、やや bias の生じたのは、むしろ面積の狭少による林縁効果の影響があったものと考えらるべきであろう。したがって、林縁効果を修正しないでピッターリッヒ法を用いる場合は、林相の相違、径級の大小も関係しようが、林分面積、形状にも一定の制約が考えられよう。なお、林縁効果の問題は章を改めて論ずることとする。

ピッターリッヒ法で、今日までほとんどの人が気が付かなかったことできわめて興味ある事実はすでにふれたことではあるが、STRAND 法と同様林分の円柱体体積が推定できることである。それには、既述のように各点でのカウント木の樹高の計の平均をとればよく、これが ha あたり円柱体体積合計となることである。このことは、一般理論から直ちに証明できる。すなわち、前述のように、各観測点で樹高  $h_j$  の和を求め、その平均を  $\bar{h}$  とすると、 $\bar{h} \times BAF$  は、

$$\begin{aligned} E(\bar{h} \times BAF) &= \frac{BAF}{n} \times E \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \delta_{kj} h_j = BAF \times \sum_{j=1}^N h_j E \delta_{kj} \\ &= BAF \sum_{j=1}^N h_j \times \frac{a_j}{A} = \sin^2 \alpha \times 10,000 \sum_{j=1}^N g_j h_j \\ &\quad \times \frac{\operatorname{cosec}^2 \alpha}{A} = \frac{10,000}{A} \sum_{j=1}^N g_j h_j \dots \dots \dots (3.2) \end{aligned}$$

となり、ha あたり円柱体積の不偏推定値となることがわかる。ただし、この  $\sum_{j=1}^N g_j h_j$  は  $\bar{h} \times \sum_{j=1}^N g_j = \bar{h} G$  と異なることは、既述のとおりで、STRAND 法の円柱体体積推定におけるものと全く一致する。したがって、前段でも述べたように、材積推定の場合、かけるべき林分形数に問題を生ずるが、これについては STRAND 法の節で詳論する。

断面積定数の変化と精度との関係、林縁効果の除去修正については別に章を改めて述べる。各因子の計算方法を次にまとめておく。点数は  $n$  点とする。

直径階別本数 ( $d_i$  に対して)

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{BAF \times d_i \text{ 階の各点でのカウント数の和}}{g_i} \quad \left( \frac{1}{g_i} \text{ は Table 3 より読みとる} \right) \dots \dots \dots (3.3)$$

ha 当たり本数 :  $N =$  直径階別本数の和

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj}}{g_j} \times BAF \text{ (断面積定数)} \dots\dots\dots(3.4)$$

ha 当たり材積 :  $V = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \delta_{kj}(fh)_j \times BAF \dots\dots\dots(3.5)$

ha 当たり断面積 :  $G = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \delta_{kj} \times BAF \dots\dots\dots(3.6)$

ha 当たり円柱体積 :  $C$   
 $= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \delta_{kj} h_j \times BAF \rightarrow \sum_{j=1}^N g_j h_j / ha \dots\dots\dots(3.7)$

(林分形数を推定してかけると ha 当たり林分材積になる)

平均樹高 :  $\bar{h} = \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \delta_{kj} \frac{h_j}{g_j}}{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj}}{g_j}}$  ( $BAF$ は不要, ただし, 材縁効果を除く必要が生じて, 補正するときは必要)  $\dots\dots\dots(3.8)$

平均直径 :  $\bar{d} = \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \delta_{kj} \frac{d_j}{g_j}}{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj}}{g_j}}$  (同 上)  $\dots\dots\dots(3.9)$

### 3.2 平田-ESSED 法

この方法は、既述のように林木が水平面をなす林分上にあり、その平面上の一点と、木の根元を結ぶ直線と樹頂を結ぶ直線のなす角が一定角  $\beta$  をはみだす木のみカウントする。平田はこれから材積を求める方法を提示しているが、筆者の理論からさらに木数、断面積、材積、平均直径、平均樹高の不偏推定値を求める方法とその標本誤差の推定方法を述べる。

平田の証明は既述だから省略して、この方法の筆者の一般理論からの証明をしておこう。

第2章の(2.1)式から

$$y_k = \sum_j \frac{\delta_{kj} x_j}{a_j} \times 10,000$$

を各点で求めればよいが、この場合分母にくる  $a_j$  は Fig. 29よりわかるように、 $OA = h \cot^2 \beta$  だから円  $O$  の面積  $a_j$  は  $\pi h^2 \cot^2 \beta$  となる。したがって、 $(x \cdot 10,000) / (\pi h^2 \cot^2 \beta)$  をカウント木について求め、それを各点ごとに合計し、それを平均すれば ha あたりの  $x$  の総計が求められる。平田のコノメーターは  $\beta$  を  $68^\circ 15'$  としているので、これを用いると、 $x \cdot 10,000 / a = (x \cdot 20,000 \pi) / \pi h^2 = 20,000 \cdot x / h^2$  となり簡単になる。

いま ha あたり樹高の二乗和を推定したいならば、 $x$  に  $h^2$  を代入すれば、カウント本数に20,000をかければよい。これは ha あたり樹高の二乗和の不偏推定となるのがわかる。かれはここで、1 ha の林木本数を  $N$  とし、樹高  $h$  の変動係数を  $C$  とすれば、

$$\sum h_j^2 = N \bar{h}^2 (1 + C^2) \dots\dots\dots(3.10)$$

となるが、 $C^2$  は一般に小さいとして無視し、

$$\bar{h} = \sqrt{\frac{\sum h_j^2}{N}} \dots\dots\dots(3.11)$$

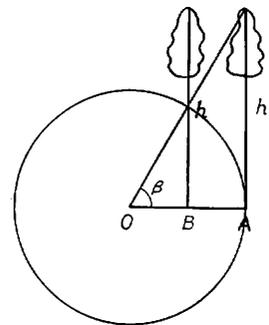


Fig. 29 平田-Essed 法の考え方  
 Conceptual figure of HIRATA-ESSED method.

としている。

$$10,000 \sum \frac{x_j}{a_j} = 20,000 \sum \frac{\delta_{kj} x_j}{h_j^2}, \quad x_j = h_j^2$$

とすれば、これは  $20,000 \sum \delta_{kj} = 20,000 \times$  カウント本数となる。したがって、カウント本数の平均を  $\bar{Z}$  とすれば、 $20,000 \times \bar{Z}$  は  $\sum_j^N h_j^2$  の ha あたり平均の不偏推定子となるから、(3.11) の  $\sum h_j^2$  に  $20,000 \bar{Z}$  を代入すると、

$$\bar{h} = 100 \sqrt{\frac{2\bar{Z}}{N}}$$

となり、かれはこれを林の平均樹高としている。この方法は、人工林では比較的 C は小さいから有効であろうが、天然生林や不均質な林、複層林ではかなり、偏りがはいつてくることが予想される。なお、さらにかれの推定法を一般理論から検討すると ( $N = A\bar{N}$  とする)、

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{N\bar{n}} \sum_k \frac{10,000}{\pi \cot^2 \beta} \cdot Z_k\right) &= \frac{10,000}{N \cdot n \cdot \pi \cot^2 \beta} E \sum_{k=1}^n Z_k \\ &= \frac{10,000}{N \cdot n \cdot \pi \cot^2 \beta} E \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \delta_{kj} = \frac{10,000}{N \cdot n \cdot \pi \cot^2 \beta} E \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^n \delta_{kj} \\ &= \frac{10,000 \cdot n}{N \cdot n \cdot \pi \cot^2 \beta} \sum_{j=1}^N E(\delta_{kj}) \quad \left(E(\delta_{kj}) = \frac{a_j}{A} = \frac{\pi h_j^2 \cot^2 \beta}{A}\right) \\ &= \frac{10,000}{N \cdot \pi \cot^2 \beta} \sum_{j=1}^N \frac{\pi \cdot h_j^2 \cot^2 \beta}{A \cdot 10,000} = \frac{1}{AN} \sum_{j=1}^N h_j^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N h_j^2 \dots\dots\dots(3.12) \end{aligned}$$

(ここでは、1 ha の林地の本数を  $\bar{N}$  としているから)

となる。このように平田-EsSED の平均樹高は二乗平均樹高をもととしているので、常に過大推定を与えるし、 $\bar{h} = 100 \sqrt{2\bar{Z}/N}$  の標本誤差も正確には求められない。ただし、分散が次式のように近似的に求まるから、これより標本誤差を求めるとよい<sup>30)</sup>。

$$v(\bar{h}) = \frac{10,000 v(\sqrt{\bar{Z}})}{N \cdot \pi \cot^2 \beta} \approx \frac{10,000}{N \cdot \pi \cot^2 \beta} \cdot \frac{1}{4n} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n (Z_k - \bar{Z})^2}{(n-1)} \dots\dots\dots(3.13)$$

$\tan^2 \beta = 2\pi$  とすると、

$$v(\bar{h}) = \frac{5,000}{N} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n (Z_k - \bar{Z})^2}{n(n-1)} \dots\dots\dots(3.14)$$

次に平田-EsSED 法の実験例を示そう。

天城国有林の学術参考保護林で 1964 年全面積 5.5 ha 余にわたり、林業講習所専攻科生を 4 班にわけ、全林毎木調査の上、各班 9 点ずつとらせ、平田法を実行させた。この場合は全林毎木調査を行なったので ha あたり本数は正確に把握できている。樹種はスギに限定した。毎木調査の平均樹高は 25.2 m であった。これに対し、各班の推定値は、

1 班	25.94 m
2 班	28.00 m
3 班	24.00 m
4 班	26.66 m
平均	26.15 m

標準偏差 1.66m, 平均値の標準偏差 0.83m, 信頼区間 2.65m となり、3 班を除き予想どおり毎木調査値

Table. 12 Pettawa におけるビッターリッヒ法, 平田 ESSED 法の調査結果  
 Experiment of BITTERLICH'S and HIRATA-ESSED method in Pettawa Forest  
 by KENDALL and SAYN-WITTGENSTEIN

林分 Stand	直径範囲 Range of diameter (in)	断面積 Basal area (ft <sup>2</sup> /acre)	本数 Tree number (acre あたり)	林齢 Stand age	樹高				
					算術平均 Arith- metic mean height (1/5 acre plot)	断面積を重み とした平均 Average height of stand weighted by basal area (1/5acre plot)	B法での 木の単なる 平均 Average height of trees in- cluded in Relascope count	平田法 HIRATA height by Rela- scope	二乗平均樹高 Quadratic mean height (1/5 acre plot)
1	3~6	138	1900	23	21.6	24.6	24.6	24.5	22.3
2	2~6	166	1900	23	21.6	24.6	25.3	24.5	22.3
3	7~12	185	370	33	53.3	53.5	52.5	52.2	53.3
4	5~10	255	775	33	52.5	53.5	52.7	51.1	52.6
5	3~17	185	390	80	74.3	77.9	77.0	70.5	82.0
6	6~16	169	390	80	74.3	77.9	79.3	74.5	82.0
7	8~16	215	290	80	67.0	82.3	81.1	79.5	70.2

よりも高い値を示した。しかし、平均値の標準偏差はビッターリッヒ法や後述するL1法、L2法に比べ著しく大で安定性に欠けている。これは、同法が他法に比し、検視が困難なため、検視による個人誤差ははいるのが原因と思われる。もちろん、この単なる一例では批判することは妥当ではない。さらにもう一例として、カナダのR. H. KENDALLとL. SAYN-WITTGENSTEINの例をあげよう。かれらは定角βを60°34′、したがってtanβ=πを用いた。場所はPettawaの試験林である (Table 12)。

既述のように、ビッターリッヒ法のカウント木の単なる樹高の平均は、断面積を重みとした平均樹高の一致推定量であることは、一般理論

$$\frac{E \sum_k \sum_j \delta_{kj} h_j}{E \sum_k \sum_j \delta_{jk}} = \frac{\sum_i \sum_{j=1}^N h_j E \delta_{ij}}{\sum_i \sum_{j=1}^N E \delta_{ij}} \quad (\delta_{kj} \text{ は前と同様})$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^N h_j \frac{kg_j}{A}}{\sum_{j=1}^N \frac{kg_j}{A}} = \frac{\sum_{j=1}^N g_j h_j}{\sum_{j=1}^N g_j} \dots\dots\dots (3.15)$$

から証明できる。Table 12 で見ても断面積を重みとした平均樹高はビッターリッヒの平均樹高と大差はない。しかし、平田-ESSEDの樹高は対応する二乗平均樹高に対し、林齢の若い23年生の林分における差は変動係数によるものと思われるが、33年生や80年生の林での差異は、樹高の高い林では個人による検視の誤差が大きいためではなからうか。なお、断面積を重みとした平均樹高はいわゆるローライ (LOREY) の平均樹高と呼ばれ、英国ならびに一般に欧州では広く用いられている。

平田-ESSEDの樹高、すなわち二乗平均樹高とローライの平均樹高との関係はコーシーの不等式から

$$\sum_j g_j h_j \leq \sqrt{\sum_{j=1}^N g_j^2 \sum_{j=1}^N h_j^2}$$

$$\frac{\sum_j^N g_j h_j}{\sum_j^N g_j} \leq \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N g_j^2 \sum_j^N h_j^2}{\left(\sum_{j=1}^N g_j\right)^2}}$$

$\sum g_j^2 / (\sum g_j)^2 \leq 1$  で、 $\{\sum g_j^2 / (\sum g_j)^2\} - 1/N = \{(\sum g_j^2 - N\bar{g}^2) / N^2 \bar{g}^2\} > 0$  から、 $\sum g_j^2 / (\sum g_j)^2$  は  $1/N$  より大きい。したがって  $\sqrt{\{(\sum g_j^2 \sum h_j^2) / (\sum g_j)^2\}} \geq \sqrt{\sum h_j^2 / N}$  はわかるが、 $\sum gh / \sum g$  と  $\sqrt{\sum h_j^2 / N}$  との大小の関係は一概には決定できないが、一般にはローライの平均樹高の方が大きいといわれており、この傾向は上例でビッターリッヒ法と平田法との関係では明りようであるが、1/5 acre のプロットの場合の比較では明らかでない。

既述のように平田-EsSED 法の不偏推定値または一致推定値を求めるには、一般理論の  $y_k = \sum_{j=1}^N (\delta_{kj} x_j) / a_j$  に 10,000 をかけたものを求めればよい。

$$a_j = h_j^2 \pi \cot^2 \beta = \frac{h_j^2}{2} \quad (\beta = 68^\circ 15')$$

いま林内に  $n$  点を取り、定角  $68^\circ 15'$  で測った場合の各因子の推定子を下にあげておく。

$$\text{総材積/ha} \quad \frac{20,000}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} v_j}{h_j^2} = \frac{20,000}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} (fg)_j}{h_j} \dots\dots\dots(3.16)$$

$$\text{総断面積/ha} \quad \frac{20,000}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} g_j}{h_j^2} \dots\dots\dots(3.17)$$

$$\text{総樹高/ha} \quad \frac{20,000}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj}}{h_j} \dots\dots\dots(3.18)$$

$$\text{総直径/ha} \quad \frac{20,000}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} d_j}{h_j^2} \dots\dots\dots(3.19)$$

$$\text{総本数/ha} \quad \frac{20,000}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj}}{h_j^2} \dots\dots\dots(3.20)$$

$$\text{円柱体体積/ha} \quad \frac{20,000}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} g_j}{h_j} \dots\dots\dots(3.21)$$

一般には  $20,000/n$  の代わりに  $10,000/(\pi \cot^2 \beta)$  とおけば  $\beta$  のいかなる角でも適用できることは当然である。なお、本数の計算についてはすでに第 2 章で述べたように表 5 の数値を倍すればよい。(2.18), (3.19), (3.20) から、平均直径  $\bar{d}$ 、平均樹高  $\bar{h}$  は次のように求められることは前章で述べたとおりである。

$$\bar{h} = \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj}}{h_j}}{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj}}{h_j^2}} \dots\dots\dots(3.22)$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} d_j}{h_j^2}}{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj}}{h_j^2}} \dots\dots\dots(3.23)$$

この方法では、 $\bar{h}$  と総本数の推定にはカウント木の樹高を測らなければならない、さらに他の因子の推定には、樹高のほかには直径も測らなければならない。平田-EsSED 法の利便は樹高を測らなくともすむところにあるが、不偏推定、あるいは一致推定を求めるにはカウント木の直径や樹高の測定を要す

る。これでは、この方法の長所が失なわれてしまう。さらに、天然林や複層林では、カウント本数のみから平均樹高を計算すれば偏りが大きくなる。このような点を考えると、この方法は斉一な人工林の場合にのみ用いられ、長所を発揮するにすぎず、ビッターリッヒ法や line-sampling に比べると有利な方法とはいえない。

平田式の推定子の誤差の推定については既述のとおりだが、いま記した各推定子の標準誤差の求め方は、ビッターリッヒ法と全く同一に各点での値の計を用い、無限母集団の考えで、分散を推定すればよく、平均直径、平均樹高についても既出の比推定法の分散を用いればよい。

### 3.3 STRAND 法

この方法は第 1 章、第 2 章でも述べたとおり林内に一定長  $5\pi m$  の線分を設け、その線上を歩行しながら、その片側の木について、一定角  $\beta (=63^\circ 30')$  で樹長を望み、その角をはみだすものの直径を測り、それを  $c d_j$  とし、一方レラスコープの断面積定数 1 を用い、同じ片側の木を檢視し、カウント木の直径  $d_j$  を測る。線の方向は最初にランダムに定め、常にその方向に測るか、各点ごとにランダムに線の方向を定める。STRAND のように常に傾斜にそって線分を設定すれば当然偏りはいってこころだろう。

第 2 章の 1 で述べたとおり、まず定角  $\beta$  の方で捕捉される木については、 $a_j = l \cdot h_j \cot \beta = (5\pi h_j / 2) m^2$  となる ( $l$  は線長で  $5\pi m$ ,  $\beta = 63^\circ 30'$ ,  $\cot \beta = 1/2$ )。

$x_j/a_j$  の分子  $x_j$  を  $c g_j h_j = \pi c d_j^2 h_j / 4$  とすると、 $k$  点でカウントされた木については、

$$y_k = \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} x_j}{a_j} \times 10,000 = \sum_{j=1}^N \delta_{kj} \frac{\pi \frac{1}{4} c d_j^2 h_j \times 10,000}{\frac{5\pi}{2} h_j}$$

$$= \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} c d_j^2}{10} \times 10,000 \dots\dots\dots (3.24)$$

この式は、一般理論から  $x$  を  $gh$  においたのであるから、ha あたり  $gh$  を推定するものであることがわかる。さらに、 $d$  を cm 単位から m 単位になおすと、

$$y_k = \frac{1}{10} \sum_{j=1}^N \delta_{kj} c d_j^2 \dots\dots\dots (3.25)$$

ときわめて簡単になり、各点におけるこの値を平均すれば、 $\sum_{j=1}^N g_j h_j$  の不偏推定値が求められる。

したがって、これに林分形数をかければ、林分の ha あたり材積の推定値が求まるが、この林分形数  $F$  の決定が問題である。収穫表では  $G$  (ha あたり林分断面積) と  $\bar{h}$  (主林木平均樹高) が示されているが、 $G\bar{h} = \sum_{j=1}^N g_j h_j$  は  $g$  か  $h$  かが皆等しい場合以外は等号が一般に成立しないから、収穫表からはこの  $F$  は求まらない。このための  $F$  表を新たに作らなければならない。これは既述のビッターリッヒ法で樹高の和を求めて、 $\sum gh$  を推定する場合も同様である。

たとえば、後述するが高萩のアカマツ林の材積指定で 5 線設け、収穫表より算出した 0.44 という林分形数を使用したところ、 $286.4 m^3$  の毎木調査値に対し、 $311.9 m^3$  というきわめて過大な値を得た。この林分は、比較的均斉のとれた林ではあるが、面積が狭小なため林縁効果の影響もあり、過少値を予想していたがかえって過大な値を得、しかもこれほど異なるとは全く意外であった。

なお、 $\sum_{j=1}^N g_j h_j$  と  $G\bar{h} = \sum_{j=1}^N g_j \frac{\sum h_j}{N}$  とには次の興味ある関係が見い出される。

$$\sum_{j=1}^N g_j h_j - G\bar{h} = \sum_{j=1}^N g_j h_j - \frac{\sum_{j=1}^N g_j \sum_{j=1}^N h_j}{N} = \sum_{j=1}^N (g_j - \bar{g})(h_j - \bar{h})$$

この両者の差は両者の共変動に等しく、 $g$  と  $h$  は一般に正の相関をもつから、この値は正になる。したがって、 $\sum_{j=1}^N g_j h_j > G\bar{h}$  となり、収穫表などから求めた林分形数を用いると常に過大推定になることがわかる<sup>註2</sup>。たとえば、高萩の例では、 $\sum gh = 537.9 \text{ m}^3$ 、 $G\bar{h} = 520.5 \text{ m}^3$ 、天城の例では、 $\sum gh = 1314.7 \text{ m}^3$ 、 $G\bar{h} = 1231.9 \text{ m}^3$  と老齢大径木林になるほどその差が大きくなる。

STRAND 法における  $\sum gh/ha$  の分散や標準誤差の推定方法は、ビッターリッヒ法の断面積、材積の求め方と同様であるから省略するが、林分形数  $F$  に誤差があると、普通、両者別々に求められており独立と考えられるから、普通の積の分散、標準誤差の計算法を用いればよい。

STRAND の次の方法は前と同じ線分上を歩きながら、レラスコープで一定の断面積定数（一般に何でもよいがここでは 1 としておく）で検視し、カウント木直径を測定し、 $r d_j$  とする。既述したように、断面積定数 1 の場合は  $a_j = 5\pi \times 0.5 r d_j (\text{m}^2)$  となる。いま、 $x_j$  を断面積とすれば、

$$x_j = \frac{\pi r d_j^2}{4} (\text{cm}^2) = \frac{\pi r d_j^2}{4(100)^2} (\text{m}^2), \quad \frac{10,000 x_j}{a_j} = \frac{\pi r d_j^2 \cdot 2 \times 10,000}{4 \times 5\pi r d_j \times (100)^2} (\text{m}^2) = \frac{r d_j}{10}$$

となる。従って各線で観測した各木の直径の和を作り、10 と線分数  $n$  でわれば、 $ha$  当たり断面積が求まることは一般理論からわかる。すなわち、 $n$  個の線の片側の木のみレラスコープで検視した場合は、

$$\frac{1}{10 \cdot n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \delta_{kjr} d_j = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kjr} d_j}{10} \dots\dots\dots (3.26)$$

が、 $ha$  あたり林分断面積の推定量となることが証明できる。この場合の分散、標準誤差の推定や計算はビッターリッヒ法の断面積などの計算と全く一致する。STRAND の樹高の求め方は、(3.25) を (3.26) でわって求めるものだから、 $n$  点を抽出したときは、

$$\hat{h}_L = \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \delta_{kjc} d_j^2}{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \delta_{kjr} d_j} \dots\dots\dots (3.27)$$

これは、

$$\hat{h}_L = \frac{\sum_{j=1}^N g_j h_j}{\sum_{j=1}^N g_j} \dots\dots\dots (3.28)$$

ローライの樹高の一致推定量となることを示す。(3.27) の分散の推定は、ビッターリッヒ法と同様比推定によればよい。

$$v(\hat{h}_L) = \frac{n \times \left\{ \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kjc} d_j^2}{10} \right)_k^2 - 2\hat{h}_L \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kjc} d_j^2}{10} \cdot \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kjr} d_j}{10} \right)_k + \hat{h}_L^2 \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kjr} d_j}{10} \right)_k^2 \right\}}{\left( \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kjr} d_j}{10} \right)^2} \dots\dots\dots (n-1)$$

$$= \frac{n}{(n-1)} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^N \delta_{kjc} d_j^2 \right)_k^2 - 2\hat{h}_L \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^N \delta_{kjc} d_j^2 \cdot \sum_{j=1}^N \delta_{kjr} d_j \right)_k + \hat{h}_L^2 \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^N \delta_{kjr} d_j \right)_k^2}{\left( \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \delta_{kjr} d_j \right)^2} \dots\dots\dots (3.29)$$

注 2) 収穫表での  $\bar{h}$  は主林木平均樹高であるが、 $\bar{h}_{主}$  と主副合計の平均樹高の差は小さいので  $G\bar{h}$  と  $G\bar{h}_{主}$  はあまり変わらない (参考文献 Some Studies in Forest Mensuration by E. Онтомо, Proceedings of I. U. F. R. O. 1961 より)

Table 13. 高萩アカマツ林における STRAND 法による調査結果  
Experiment of STRAND'S method in Takahagi pine stand

	毎木調査値 Complete enumeration	推 定 値 Estimate	標 準 誤 差 Standard error	信 頼 幅 Confidence interval	誤 差 Error
$\bar{h}$	16.0m	16.4	0.60	1.67	+ 0.4 (+ 3%)
G/ha	35.3m <sup>2</sup>	34.1	2.2	6.1	- 1.2 (- 3%)
$\Sigma gh$ /ha	578.2m <sup>3</sup>	559.5	27.9	77.4	-18.7 (- 3%)
V/ha	286.4m <sup>3</sup>	279.8	14.0	38.7	- 6.6 (-0.2%)

Table 14. 天城スギ林における STRAND 法による調査結果  
Experiment of STRAND'S method in Amagi *Cryptomeria* stand

	毎木調査値 Complete enumeration	推 定 値 Estimate		標 準 誤 差 Standard error		信 頼 幅 Confidence interval		誤 差 Error	
		東 西 線 E-W line	南 北 線 N-S line	東 西 線 E-W line	南 北 線 N-S line	東 西 線 E-W line	南 北 線 N-S line	東 西 線 E-W line	南 北 線 N-S line
$\Sigma gh$ /ha	1314.68m <sup>3</sup>	1278.05m <sup>3</sup>	1176.02m <sup>3</sup>	95.48	110.44	199.84	231.14	-2.8%	-10.5%
V/ha	563.92	548.21	504.52	41.0	47.37	85.72	99.15	-2.8	-10.5

$h_L$  は一般の林分では二乗平均樹高よりも高い値を示し、算術平均樹高よりもかなり高い値を示すから (KENDALL らを参照<sup>65)</sup>、日本のように算術平均樹高を慣用する国では有用でないが欧州のように広く  $h_L$  を用いている国では、きわめて有用な方法である。ことに、 $\Sigma gh$  に対する林分形数の表が樹種ごとにできれば、実用上はるかにピッターリッヒ法にまさる。ピッターリッヒ法でも既述のように、樹高の総和により、 $\Sigma gh$  を推定できるがピッターリッヒ法では、樹高を測らなければならないが、STRAND 法は直径を測ればよいだけである。今後、簡易な材積推定法としては STRAND 法に大いに期待できよう。

なお、STRAND 法を用いるときは必ずしも  $5\pi m$  の長さの線分を用いる必要はない。どのような長さでもよい。たとえば、後述の L1 法の例のように 10 m の長さの線分の両側の木を検視するときは、一般理論の公式から

$$\Sigma gh/ha = \frac{\pi}{40} \Sigma_k \Sigma_j \delta_{kjc} d_j^2 \dots\dots\dots (3.30)$$

$$\Sigma g/ha = \frac{\pi}{40} \Sigma \Sigma \delta_{kjr} d_j : (BAF=1) \dots\dots\dots (3.31)$$

$$\bar{h} = \frac{\Sigma \Sigma \delta_{kjc} d_j^2}{\Sigma \Sigma \delta_{kjr} d_j} \dots\dots\dots (3.32)$$

で推定できる。

次に実際の調査の例を挙げておく。

高萩の例では、Table 13 のようになり、天城においては STRAND 法を実行しなかったが、L1 法のデータから、材積は推定できるので Table 14 に示す。

天城の場合は、線の方角により推定値ならびに標準誤差が異なり、林業で一般に言われているように、ほぼ傾斜に沿った東西線は良い推定値を与えている。これは、傾斜にそった方向では異質な林木をとらえることにより、統計理論的にも当然のことと考えられる。STRAND 法でも ha あたりの本数を推定することができる。その方法は後述する L2 法の場合と全く同様に行なうことができる。信頼区間や標準誤差

の計算も全く同様である。以下の論議は本稿完成後に問題になったものであるが参考まで記述しておく。

上述の理論や実例では線の方向を最初にランダムに定め、その後はすべてその方向をとったが、各抽出点ごとにランダムに方向を定めても、各木の抽出確率は変わらない注3。ただし、林縁木の場合は林縁効果による偏りの修正が煩雑になろう。各点ごとにランダムな方向をとった場合、 $j$  という木の抽出確率は STRAND の第 1 法では

$$\frac{\int_0^{2\pi} \int_0^l \int_0^{h_j \cot \beta} dx dy d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^l \int_0^l dx dy d\theta} = \frac{2\pi l h_j \cot \beta}{2\pi A} = \frac{l h_j \cot \beta}{A} = \frac{a_j}{A} \dots\dots\dots(3.30)$$

となり、第 2 法でも同様に証明できる注4。したがって、一般理論の (2.2) 式が適用でき、 $h_a$  当たりの各林分因子の不偏推定量は線分の方向がそろった場合と異なることはわかる。ただし、母分散は(2.13) 式の  $a_m$  がちがってくるので当然異なってくる。

3.4 L1 法注5

STRAND はレラスコープとクリノメーターを用いて、5 $\pi$ m の線分を林内に傾斜方向に設け、抽出木の直径を測り、材積およびローライの平均樹高を求める方法を考案し、ピットーリッヒ法でも最近ではカウント木の樹高、直径を測定して、材積、本数なども推定するようになったことを考えて、筆者は STRAND の方法を分解して、そのどちらかを行ない、直径、樹高を測定して、材積、断面積、本数、平均直径、平均樹高を求める方法を考案した。さらに STRAND 法と異なるところは、線長が 5 $\pi$ m に固定することなく、任意にとることである。

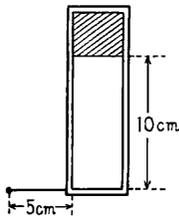


Fig. 30 平田のコノメータを 63°30' におおしたもの

Remodeled HIRATA'S conometer with the angle of 63°30'.

L1 法では、STRAND のいうところとは異なり、まずあらかじめランダムな方向を定め、林内にランダムに点を抽出する。この点を基点とし、最初にランダムに定められた方向に  $l$ メートルの線分を設定する。この場合、線分の中心に基点をとってもよいし、基点を線分の端点(始点)としてもよい

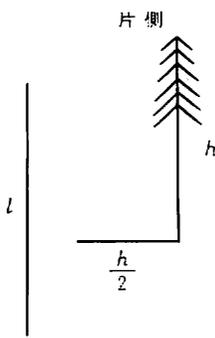


Fig. 31 L1 法の片側検視  
One side observation in L1 method.

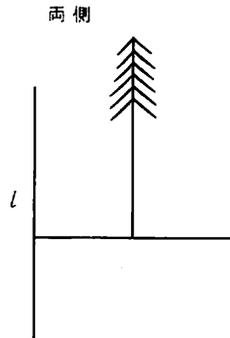


Fig. 32 L1 法の両側検視  
Both sides observation in L1 method.

が、作業の容易さや林縁効果の問題を考えると、基点を中心に  $l/2$  の線分を両方向にとった方がよい。線長は筆者の体験上 25 m が限度であり、普通 20 m 以下がよい。これはもちろん林相の変化の多い林や径級の大きな林や疎な林分、老齢林分では長く、反対に均整な林分では 10 m 程度でよい。この長さはもちろん水平距離だから、傾斜に応じて変化するの当然である。STRAND の 5 $\pi$ m も傾斜に応じて変わるわけだが、筆者の経験では 10 m, 15 m, 20 m というようにした方が傾斜地では作業その他に便利である。

注 3 本論文完成後石田正次氏がこの問題につき精密な証明をしている。

注 4 本部 均氏による。

注 5 従来 O1 法として発表していたが、Line sampling の第 1 法の意味で L1 法と改めた。

定角としては、筆者の経験上  $\tan \beta = 2$  となるように STRAND の角  $63^\circ 30'$  を採用した。この角度の場合、線と木との距離が、樹高の半分以下の場合に対象木がカウントされることになるから、目測でもカウントすべきかどうかが判定でき、実際に器械を用いて検視を必要とする木はごく少数となるからである。器械は平田のコノメーターのわくの内部の下から 10cm のところに、黒いビニールテープをはりつくと、ちょうど  $\tan \beta = 2$  となる。なお、ついでにこの方法の特長とするところは、材積を求めるのに形状断面表 (fg 表) が必要だが、fg は fh のように樹高による変化がきわめて小ではしたがって、直径だけ測れば材積が求まることが多いからである (Appendix 2 参照)。

実行方法としては定長  $l$ (m) の線分を歩き、片側 (両側でもよい) の木の線分との距離が樹高の  $1/2$  以内にあるものをカウントする。目測で不明なものは、前記の補修したコノメーターでしらべる。それでもわからぬものは測高器で樹高を測り、線分と木との距離を比較すればよい。STRAND は片側のみ検視したが両側検視をして一向さしつかえない。10 m の線分の両側検視は 20 m の線分の片側検視と同じことであるが、片側検視の方は林分の変動をより多くとり入れるから、分散が小さくなることは想像されよう。

片側検視の場合は、線分の方に垂直に樹高  $h$  の半分の長さの  $h/2$  の長さの手を木が出しており、両側検視の場合は、両側に  $h/2$  の長さの手を出しており、これに定長  $l$  メートルの線分が交わることを考えればよい。ここでは、一応片側検視の場合について論ずることとする。したがって  $a_j = lh_j \cot \beta$  となる。

いま、 $n$  線を林内に設定したとすると、 $ha$  あたりの特性値  $x$  の合計値の不偏推定子は、

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} x_j \tan \beta}{h_j \cdot l} \times 10,000 \dots\dots\dots (3.33)$$

となる。 $\tan \beta = 2$  で、 $l$  は定長だから、

$$\frac{20,000}{nl} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} x_j}{h_j} \dots\dots\dots (3.34)$$

となる。

たとえば、 $ha$  あたりの総樹高を求めたいなら、 $x_j = h_j$  とおくと、

$$\frac{20,000}{nl} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \delta_{kj} \dots\dots\dots (3.35)$$

これから各線でカウントした木の総数に、 $20,000/nl$  をかければよいことがわかる。 $10,000/a_j$  を  $\beta$  と  $l$  に応じて示すと、次のようになる。

Table 15 の係数は片側検視した場合で、両側検視の場合は上表の数値を  $1/2$  すればよい。なお、表の  $h$

Table 15. L 1 法などにおける樹高定数

Height factors in L 1 method

(l) 線長 Line length	(m)	10	12.5 "	13.4 "	16.7 "	20 "	25 "
(β) 定角 Visual angle							
63° 30'		$\frac{2,000}{h}$		$\frac{1,000}{h}$		$\frac{1,000}{h}$	
68° 15'		$\frac{2,500}{h}$	$\frac{2,000}{h}$		$\frac{1,500}{h}$		$\frac{1,000}{h}$

を除いた数値はピッターリッヒ法での断面積定数に相当するもので樹高定数とでもいうべきものである。各林分因子の推定式は次のとおりである。ただし、上表の  $1/h$  を除いた定数を  $C$  とする。

樹高階  $h_p$  ごとの ha あたり本数

$$N_p = \frac{C}{n} \times \left( \frac{\text{樹高階 } h_p \text{ のカウント本数の総合計}}{h_p} \right) \dots\dots\dots (3.36)$$

ha あたり総本数,  $h_p$  の各樹高階の総本数を合計してもよいし、または、

$$N = \frac{C}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj}}{h_j} \dots\dots\dots (3.37)$$

ha あたり林分材積

$$V = \frac{C}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} v_j}{h_j} = \frac{C}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \delta_{kj} (fg)_j \dots\dots\dots (3.38)$$

ha あたり林分断面積

$$G = \frac{C}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} g_j}{h_j} \dots\dots\dots (3.39)$$

平均直径

$$\bar{d} = \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \delta_{kj} \frac{d_j}{h_j}}{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj}}{h_j}} \dots\dots\dots (3.40)$$

平均樹高

$$\bar{h} = \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \delta_{kj}}{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj}}{h_j}} = \frac{\text{カウント総本数}}{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj}}{h_j}} \dots\dots\dots (3.41)$$

(3.36) ~ (3.39) の公式による推定子の分散の推定や標本誤差の推定は、一般理論で述べたように、無限母集団の場合に標本を抽出したときの推定法を用いて、各線での合計値を個々の測定値と同様に考えて、普通の分散や誤差の計算法を用いればよいし、(3.40)、(3.41) は比推定法の計算によればよい。このことはピッターリッヒ法の場合と全く同様である。何となれば、線の方法、長さがはじめに定められているから、林内の一点が抽出されればカウント木は自動的に定まってくるからである。

なお、(3.36) や (3.37) 式により樹高階ごとや、ha あたりの本数を計算する場合は既述した注意が必要である。本数を求めたいときは、(3.36, 37) 式よりわかるように、カウント木の樹高測定を必要とするが、その場合、大抵は、四捨五入して  $m$  単位にとどめる。したがって、既述のように一様分布を仮定して  $1/h$  を計算すると、 $\log_e 10 \cdot \log_{10} \{(h+1/2)/(h-1/2)\} = 2.3025851 \times \log \{(h+1/2)/(h-1/2)\}$  となる。これから  $h$  に対する  $1/h$  を計算すると Table 16 のようになるから、この表を用いればよい。

この方法の長所は、Appendix の  $v/h$  表すなわち  $fg$  表よりわかるとおり、とくにスギなどでは、 $fg$  はほとんど直径のみに、depend し、同一直径の木では樹高が異なってもほとんど変わらないことから、材積の概略値を推定するような森林計画の調査にはきわめて便利な方法であると思料される。この実際の調査例は次の L2 法とともに示すこととする。なお、本節では、線の方法を最初にランダムに定め、各点で常にその方向を取ることとし、論議を進めたが、各点ごとにランダムに線の方法をとっても、 $a/A$  という確率は変わらないことは、STRAND 法の節尾で述べたとおりである。

Table. 16 L 1 法における本数計算表  
Tree number calculation table in L 1 method

$h$	$\frac{l}{h}$	$h$	$\frac{l}{h}$	$h$	$\frac{l}{h}$	$h$	$\frac{l}{h}$
2	0.51085	11	0.090937	20	0.050028	29	0.034401
3	0.33647	12	0.083422	21	0.047647	30	0.033338
4	0.25130	13	0.076961	22	0.045451	31	0.032273
5	0.20065	14	0.071483	23	0.043443	32	0.031305
6	0.16704	15	0.066724	24	0.041718	33	0.030335
7	0.14713	16	0.062505	25	0.039990	34	0.029462
8	0.12513	17	0.058835	26	0.038451	35	0.028586
9	0.11118	18	0.055569	27	0.037103		
10	0.10012	19	0.052667	28	0.035753		

このことは STRAND 法, L 1 法, L 2 法 のすべてに通用する。したがって, L 2 法も本節と同様な方針で理論を説明する。

3.5 L 2 法注6

この方法は、線分の設定の段階までは、全く L 1 法と同じである。したがって, L 1 法で述べた説明がそのまま適用される。ただ異なるところは、線上よりレラスコープなどの断面積測定器を利用して検視し、カウント木の直径、樹高を測る。直径のみ測ると、平均直径、 $ha$  あたり断面積、直径階別本数の推定ができ、さらに樹高を測ると、平均樹高、材積の推定ができる。

ここでも一般理論がそのまま適用できる。断面積定数 1, 2, 2.25, 4 に応じて,  $\sin \alpha = 1/100$ ,  $\sin \alpha = \sqrt{2}/100$ ,  $\sin \alpha = 1.5/100$ ,  $\sin \alpha = 2/100$  ( $2\alpha$  が定角) となり,  $a_j$  の面積は  $(d_j l / 200) \operatorname{cosec} \alpha (\text{m}^2)$  となる。ただし, 直径  $d$  は, cm 単位の数値を用い, 線分の長さは, m 単位で測ったものを用いる。これは片側検視の場合は線の方角に向かって各木より垂直に  $(d_j \operatorname{cosec} \alpha) / 200$ メートルの長さの線分を出しており, これと定線分  $l$  とが交わるものと考え、その交わりの面積が  $a_j$  となるからである。

両側の検視の場合は、木が線分の方角に垂直に両側に  $(d_j \operatorname{cosec} \alpha) / 200$  m の長さの線分を伸ばしており、その交わる範囲の面積を  $a_j$  と考えればよいことは L 1 法と同一である。

Table 17. L 2 法における直径定数表  
Diameter factors in L 2 method

線の長さ Line length	断面積定数 BAF				備考 Remark
	1	2	2.25	4	
10m	$\frac{2,000}{d}$	$\frac{2,000\sqrt{2}}{d}$	$\frac{3,000}{d}$	$\frac{4,000}{d}$	$\frac{10,000}{a_j}$ は $\frac{20,000}{d \cdot l} \sqrt{\text{BAF}}$ に等しい。 $d$ の単位は cm。
15m	$\frac{4,000}{3d}$	$\frac{4,000\sqrt{2}}{3d}$	$\frac{6,000}{3d}$	$\frac{8,000}{3d}$	
15.7m = $5\pi$ m	$\frac{4,000}{\pi d}$	$\frac{4,000\sqrt{2}}{\pi d}$	$\frac{6,000}{\pi d}$	$\frac{8,000}{\pi d}$	
20m	$\frac{1,000}{d}$	$\frac{1,000\sqrt{2}}{d}$	$\frac{1,500}{d}$	$\frac{2,000}{d}$	

注6 従来 O 2 法として発表していたが, Line sampling の第 2 法の意味で L 2 法と改めた。

10,000/ $a_i$  の係数を示すと、Table 17 のとおりである。

この表は片側検視の場合で、線分の両側の木を検視した場合は、表の数値を 1/2 にしなければならない。表の係数の 1/ $d$  を省いたものは L1 法と同様直径定数ともいえよう。これを  $C$  とおくと、各林分因子の推定値は次のようになる。抽出線数は  $n$  とする。

直径  $d_p$  階の ha あたり本数

$$N_p = \frac{C}{n} \times \frac{\text{直径 } d_p \text{ のカウント本数の総合計}}{d_p} \dots\dots\dots(3.42)$$

ha あたり総本数

$$N = \frac{C}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj}}{d_j} \dots\dots\dots(3.43)$$

ha あたり林分断面積

$$G = \frac{C}{n} \cdot \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \delta_{kj} d_j \dots\dots\dots(3.44)$$

ha あたり林分材積

$$V = \frac{C}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} v_j}{d_j} \dots\dots\dots(3.45)$$

(Appendix 3 の表より  $v/d$  を求める)

$$\text{平均直径 } \bar{d} = \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \delta_{kj}}{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj}}{d_j}} \dots\dots\dots(3.46)$$

$$\text{平均樹高 } \bar{h} = \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} h_j}{d_j}}{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj}}{d_j}} \dots\dots\dots(3.47)$$

となる。

分散、標本誤差の推定については L1 法と同じであるので省略するが、(3.42)、(3.43) を用いて本数の推定をしたとき、1/ $d$  の値を求めなければならない。既述のように  $E(1/d) > 1/E(d)$  だから、直径測定を切り捨てて 2 cm 単位にとどめた場合は、1/ $d$  を  $(1/2) \log_e 10 \cdot \log_{10}\{(d+2)/d\}$  (Table 18 の A)、四捨五入により 2 cm 単位に測った場合は、 $(1/2) \log_e 10 \cdot \log_{10}\{(d+1)/(d-1)\}$  (Table 18 の B) により求

Table 19. 高萩アカマツ林における Experiments of three line sampling

	毎木調査値 Complete enumeration	推 定 値 Estimate			標 準 誤 Standard	
		STRAND法 STRAND'S method	L1 法 L1 method	L2 法 L2 method	STRAND法 STRAND'S method	L1 法 L1 method
N/ha (本)	1902	*	1.832	1.753	*	205
$\bar{d}$ (cm)	14.9	*	15.0	15.3	*	0.49
$\bar{h}$ (m)	16.0	16.4	15.9	15.8	0.60	0.77
G/ha(m <sup>2</sup> )	35.3	34.1	34.0	34.1	2.2	2.0
V/ha(m <sup>3</sup> )	286.4	277.2	276.4	273.2	13.8	14.5
$\Sigma gh$ /ha(m <sup>3</sup> )	578.2	559.5			27.9	

めるとよい。ただし、ここでも前述のすべての場合と同様一様分布を仮定して計算して表として示した。

Table 18. L 2 法における本数計算法  
Tree number calculation table in L 2 method

d	A)	B)	d	A)	B)
4	0.2027	0.2554	44	0.0222	0.0227
6	0.1438	0.1682	46	0.0213	0.0217
8	0.1116	0.1257	48	0.0204	0.0209
10	0.0912	0.1003	50	0.0196	0.0200
12	0.0771	0.0835	52	0.0189	0.0192
14	0.0668	0.0736	54	0.0182	0.0186
16	0.0589	0.0626	56	0.0175	0.0180
18	0.0527	0.0556	58	0.0170	0.0172
20	0.0477	0.0501	60	0.0164	0.0167
22	0.0435	0.0455	62	0.0159	0.0161
24	0.0400	0.0417	64	0.0154	0.0157
26	0.0375	0.0385	66	0.0149	0.0152
28	0.0345	0.0357	68	0.0145	0.0147
30	0.0323	0.0334	70	0.0141	0.0143
32	0.0303	0.0313	72	0.0137	0.0139
34	0.0286	0.0294	74	0.0133	0.0135
36	0.0271	0.0278	76	0.0130	0.0132
38	0.0256	0.0263	78	0.0126	0.0128
40	0.0244	0.0250	80	0.0123	0.0125
42	0.0233	0.0238			

### 3. 6 各種線抽出法の比較および点抽出と線抽出法との比較

ビッターリッヒ法の時にのべた高萩のアカマツ林および天城のスギ林で、各種の線抽出法を行なったので、その実例を下に示す。両地域とも線分の長さは 10 m で、両側検視した。

高萩のアカマツ林は、地形平坦で関東ロームにおおわれ、したがって地位の変化は見られず、一様と思われる。林床植生は関東地方で普通にアカマツ林下で見られるものが多いが、最近まで下草の採取が行なわれておったので、植生の繁茂は少ない。調査年における林齢は 35 年生で人工植栽によるものである。林冠閉鎖後、今日に至るまで間伐は、一度も行なわれないため過密状態となっている。

天城のスギ林は、特別経営時代の造林地で、調査時における林齢は 5 年ほどの幅があるが平均 58 年で、

#### 各種線抽出の実験結果 methods in Takahagi pine stand

差 error	信 頼 幅 Confidence interval			誤 差 Error			
	L2 法 L2 method	STRAND 法 STRAND'S method	L1 法 L1 method	L2 法 L2 method	STRAND 法 STRAND'S method	L1 法 L1 method	L2 法 L2 method
138	*		570	384	*	-70 (- 3.7%)	-149 (- 7.8%)
0.53	*		1.37	1.46	*	+ 0.1 (+ 0.7%)	+ 0.4 (+ 2.7%)
0.13	1.67		2.14	0.35	+ 0.4 (+ 2.4%)	- 0.1 (- 0.6%)	- 0.2 (- 1.3%)
2.2	6.1		5.6	6.1	- 1.2 (- 3.4%)	- 1.3 (- 3.8%)	- 1.2 (- 3.4%)
16.7	38.3		40.2	46.4	- 9.2 (- 3.2%)	- 10.0 (- 3.5%)	- 13.2 (- 4.6%)
	77.4				- 18.7 (- 3.2%)		

下田街道に接し、間伐は度々行なわれたらしく、林相は疎開し、径級、樹高の範囲も高萩より広く、地形も下部は平坦上部は傾斜強く、地位、成長ともに変化が大きい。

高萩では林分形数としては真の材積と  $\Sigma gh$  より計算した  $0.4954$  を用いた ( $G\bar{h}$  より求めた形数は  $0.51$  となり、 $0.5$  より大である)。

STRAND 法で、材積を推定すると、 $277.2 \text{ m}^3$  ときわめて毎木調査値に近い推定値を得た。その標準誤差は  $13.8 \text{ m}^3$ 、信頼幅は  $38.3 \text{ m}^3$  である。天城の例でも若干過小ではあるが、STRAND 法の  $\Sigma gh$  の推定は良い結果を得ているが、高萩の例とは反対にビッターリッヒ法よりは悪い。分散の面からもビッターリッヒ法が良いが、効率の点や  $\Sigma gh$  を求めるのに一方は直径、片方は樹高の測定を要することを考慮すると、一概にどちらがよいか断定できない (Table 10, 11, 13, 14 および 3.8 節参照)。

L1 法と L2 法の比較については、現地調査の点や、上の実行例などを見ても L1 法がまさる。特に L2 法の実行には材積を求めるために  $v/d$  表を必要とするが、この表の数値は  $fh$  表と同様、直径、樹高による変化が著しいため、L1 法のように直径だけで概略値を求めることは不可能で、直径、樹高ともに測定しなければならない。L1 法では直径測定は必要だが樹高については目測樹高を使用しても、 $fg$  の値の同一直径階内では樹高による差はきわめて少ない。したがって、L1 法を筆者は推奨したい。

なお、この表からわかることは毎木調査値に対し  $\bar{d}$  を除き、いずれの因子も過小推定であることである。これは、林縁効果の影響を修正していないために生じたものであるが、ビッターリッヒ法ほど顕著で

Table 20. 高萩アカマツ林におけるビッターリッヒ法と L1 法の比較  
Comparison of experiment of B method to that of L1 method  
in Takahagi pine stand

	毎木調査値 Complete enumeration	B 法 (9点) BITTERLICH'S method (9 points)			L1 法 (5線) L1 method			誤 差 Error	
		推定値 Estimate	$\sigma_{\bar{x}}$	信 頼 幅 Confidence interval	推定値 Estimate	$\sigma_{\bar{x}}$	信 頼 幅 Confidence interval	B 法	L1 法
N/ha(本)	1902	1775	161	371	1832	205	570	- 6.7%	- 3.7%
$\bar{d}$ (cm)	14.9	14.4	0.5	1.1	15.0	0.49	1.4	- 3.3	+ 0.7
$\bar{h}$ (m)	16.0	16.0	0.1	0.3	15.9	0.77	2.1	0	- 0.6
G/ha( $\text{m}^2$ )	35.3	32.4	1.8	4.2	34.2	2.0	5.4	- 8.2	- 3.7
V/ha( $\text{m}^3$ )	286.4	262.4	15.5	35.6	276.4	14.5	40.2	- 8.3	- 3.5
$\Sigma gh$	578.1594	528.44	30.9	71.4				- 8.6	
$\Sigma gh$ から 推定した STRAND'S volume(V)	286.4	261.8	15.3	35.3				- 8.6	

Table 21. 高萩アカマツ林におけるビッターリッヒ法と L1 法の分散  
Estimates of variances of estimates of BITTERLICH'S and  
L1 method in Takahagi pine stand

	本 Tree number	断 面 積 Basal area	材 積 Volume
ビッターリッヒ法 BITTERLICH'S method	25809.9	3.31	241.41
L1 法 L1 method	42132.6	3.79	209.35

はない。なお、L1, L2法ともに平均直径、平均樹高が毎木調査値にほとんど一致しているのは均質な林相なため、その重みに変化のないことが原因しているものと思われることは既述のとおりである。次に高萩での9点とったビッターリッヒ法と5線とったL1法の結果を比較してみよう (Table 20)。

この林分は、未間伐のまま放置したため、径級は小であるが、樹高はそのわりにかなり大きいため、ビッターリッヒ法で断面積定数4、9点の測定本数は73本で、L1法で5線で146本とビッターリッヒ法の2倍となった。平均値の分散はTable 21のとおりである。

今、観測本数が費用と正比例するものと考えたと効率性は平均値の分散と観測本数の積の逆数と考えてよからう。このような考え方から考察すると、ビッターリッヒ法はL1法よりまさっていることはこの林分については明らかである。しかしこの林は前述のような特殊な林分であるから、一概にこの林の結果だけから比較判定はできない。とくに、一般に樹高の変動係数は直径の変動係数より小であるので、さらに検討の要がある。

そこで、林相の異なる天城のスギ58年生林分について比較して見よう。なお、ここではビッターリッヒ法で断面積定数9/4、4、9を用い、線の方は東西と南北のものと同者をとったので、一括して結果を掲げておく (後述、断面積定数の変化と精度との関係の考察にも引用される)。Table 22に基づき天城スギ林の場合におけるビッターリッヒ法とL1法を比較して見よう。高萩における場合と同様に、カウント本数は費用に比例すると考えて、両者とも20線、20点の同じサイズの標本をとり、前と同様に効率性を測定本数×平均値の分散として考え比較することにした。そこで、まず分散のみを検討すると、分散の小

Table 22. 天城スギ林におけるビッターリッヒ法とL1法の実験結果

Experiments of BITTERLICH'S and L1 method in Amagi *Cryptomeria* stand

	毎木調査値 Complete enumeration	ビッターリッヒ法 BITTERLICH'S method			L1 法 L1 method	
		9/4	4	9	東 E-W	南 N-S
$N/ha$ 本	458	464.59 (+1.44%)	486.70 (+6.27%)	433.82 (-5.28%)	450.08 (-1.73%)	432.04 (-5.67%)
$G/ha$ $m^2$	59.11	56.475 (-4.83%)	58.400 (-1.58%)	53.100 (-10.52%)	56.787 (-3.92%)	52.702 (-11.69%)
$V/ha$ $m^3$	563.916	550.086 (-2.45%)	558.680 (-0.93%)	507.287 (-10.04%)	549.515 (-3.26%)	503.150 (-10.77%)
$\bar{d}$ cm	39.19	37.96 (-3.35%)	36.93 (-5.97%)	37.70 (-4.02%)	38.42 (-1.96%)	37.72 (-3.75%)
$\bar{h}$ m	20.84	20.39 (-2.17%)	19.87 (-4.67%)	20.09 (-3.60%)	20.66 (-0.86%)	20.02 (-3.93%)
標準偏差 Standard deviation	$N$	166.6761	222.8728	240.7853	181.7901	230.0677
	$G$	11.1883	13.0040	21.6357	15.5907	19.5177
	$V$	130.2855	156.6370	229.0194	180.2634	209.2980
標準誤差 Standard error	$N$	37.2699	49.8359	53.8412	39.98	51.88
	$G$	2.5018	2.9078	4.8379	3.4762	4.3325
	$V$	29.1327	35.0251	51.2103	39.84	46.76
	$\bar{d}$	2.0437	2.7563	2.8705	2.3841	2.5631
	$\bar{h}$	1.112894	1.5016	1.6347	1.62737	0.6968
信頼幅 (95%) Confidence interval	$N$	78.0065	104.3073	112.6906	83.61	108.59
	$G$	5.2363	6.0860	10.1258	7.276	9.0679
	$V$	60.9753	73.3081	107.1840	83.26	97.87
	$\bar{d}$	4.2776	4.3806	6.0080	4.98999	5.3645
	$\bar{h}$	2.3629	3.1428	3.4214	3.4061	1.8769

さい順からならべると (Bはビッターリッヒ法の略),

$N$  では, B(9/4), L1 東西, B4, L1 南北, B9

$G$  では, B(9/4), B4, L1 東西, L1 南北, B9

$V$  では, B(9/4), B4, L1 東西, L1 南北, B9

$\bar{d}$  では, B(9/4), L1 東西, L1 南北, B4, B9

$\bar{h}$  では, L1南北, B(9/4), B4, L1 東西, B9

分散の面からみると, ビッターリッヒ法では常に断面積定数が大きいと分散も大きく, L1 法では  $\bar{h}$  のみ例外であとは東西線が良い。東西線が良かったのは大体傾斜に沿った線が多かったことによるものであろう。ビッターリッヒ法の 9/4 は下述するようにカウント本数が全林木数よりも多く, 全林毎木調査よりも労力, 費用がかかるので, 分散が小さいのは当然のことである。

次に効率の面から検討してみよう。まず, カウント本数は,

ビッターリッヒ法 9/4→511本 (全林木数よりも大きい)

4→292本

9→118本

L1 法 東西→186本

南北→173本

であった。したがって, 前者と同様に考えて効率を計算すると, Table 23 のとおりである。

Table 23 および前表より,  $N G V$  では L1 法がビッターリッヒ法より一般にすぐれていることは推察される。 $\bar{d}$  では B 法の BAF 9, L1 法の東西線, 南北線,  $\bar{h}$  では南北線, B9, 東西線の順となっている。このことから平均直径, 平均樹高の推定にはあまり多くの点数を必要とせず, また点数が多いときは断面積定数の大きいものの方が良いことも推察される。ここで  $\bar{d}$ ,  $\bar{h}$  の推定よりむしろ問題とすべきは  $N G V$  のような全体の推定であることを示すと思われるので,  $N G V$  で最大の効率を示す東西線を基

Table 23. ビッターリッヒ法とL1法の効率の比較 その1

Comparison of efficiency of BITTERLICH'S method to L1 method Exp. 1

	ビッターリッヒ法 BITTERLICH'S method			L1 法 L1 method		
	9/4=2.25	4	9	東 E-W	西 南	北 N-S
$N$	709,802.8	725,215.1	342,067.5	297,341.5		465,679.2
$G$	3,198.3	2,468.9	2,761.8	2,247.7		3,247.3
$V$	433,693.6	358,212.3	309,454.2	295,260.1		378,263.8
$\bar{d}$	2,134.3	2,218.4	972.3	1,057.8		1,136.5
$\bar{h}$	651.3	658.4	315.3	492.6		139.1

Table 24. ビッターリッヒ法とL1法の効率の比較 その2

Comparison of efficiency of BITTERLICH'S method to L1 method Exp. 2

	ビッターリッヒ法 BITTERLICH'S method			L1 法 L1 method		
	9/4	4	9	東 E-W	西 南	北 N-S
$N$	0.42	0.41	0.87	1.0		0.63
$G$	0.70	0.91	0.81	1.0		0.69
$V$	0.68	0.82	0.95	1.0		0.78

準にして効率を比較すると、Table 24 のようになる。

Table 24 の結果から見ると、効率は、

N では、L1 東西線、B9、L1 南北線、B(9/4)、B4

G では、L1 東西線、B4、B9、B(9/4)、L1 南北線

V では、L1 東西線、B9、B4、L1 南北線、B(9/4)

となり、L1 東西線が最も良く、次には B9、B4 という順になると思われる。L1 東西線の最良となったのは、既述のようにこの林分の傾斜方向と L1 東西線が一致したものが多かったことによるものと思われる。

高萩の例、天城の例を比較検討すれば、ビッターリッヒ法、L1 法のどちらがまさるかは一概には決定できない。林相、地況により採用すべきではあると思われるが、ただ直径だけの測定でも L1 法は材積の概測ができることに長所がある。

なお、これらの 2 例では林縁効果による偏りを修正していないので、各推定値はほとんど全部過小となっていることに注意されたい。また、天城の実験例で注目すべきことはビッターリッヒのカウント木数のきわめて多いことで、BAF=9/4 で全林木数よりも 10% 以上も多く、BAF=4 で全林木数の 64% にも達し、かつ標本誤差を伴うことである。したがって、ビッターリッヒ法は小面積林分には、あまり有利な調査法でなく、このような林分では従来の全林毎木調査法がむしろ有効と思える。

### 3.7 林分形数を用いて材積推定する場合のビッターリッヒ法と STRAND 法との比較

ビッターリッヒ法では各点におけるカウント木の樹高より、STRAND 法では、直径の二乗をもとにして  $\sum gh$  を推定できることは既述のとおりである。

Table 25 の両林分の  $\sum gh$  に対する林分形数は高萩は 0.4954、天城は 0.4289 であるので、これを用いてビッターリッヒ法、STRAND 法による材積の推定を行なうと Table 26 のとおりである。

Table 25.  $\sum gh$  の推定の例  
Estimates of  $\sum gh$

		高萩 マツ 林 578.2 m <sup>8</sup> Takahagi pine stand				天城 スギ 林 1,314.7 m <sup>8</sup> Amagi <i>Cryptomeria</i> stand			
		推定値 Estimate	S.E.	信頼幅 Confidence interval	誤差 Error	推定値 Estimate	S.E.	信頼幅 Confidence interval	誤差 Error
ビッターリッヒ法 BITTERLICH'S method	9/4					1286.1	71.94	150.56	-28.6 (-2.2%)
	4	528.4	30.9	71.4	-49.8 (-8.6%)	1309.2	83.54	174.84	-5.5 (-0%)
	9					1188.9	120.29	251.75	-125.8 (-9.6%)
STRAND 法 STRAND'S method 10 m	東西 E-W	559.5	27.9	77.4	-18.7 (-3.2%)	1270.1	95.48	199.84	-44.2 (-2.8%)
	南北 N-S					1176.2	110.44	231.14	-138.5 (-10.5%)

ビッターリッヒ法、STRAND 法のいずれも推定値に対する信頼区間の幅が大きく 10% をこすが、毎木調査値との差は大体 10% 以下で、ビッターリッヒの BAF 4、および 9/4 と STRAND 法の東西線は差がきわめて小である。しかし、高萩のビッターリッヒの BAF 4 は悪い。 $\sum gh$  よりの材積推定を行なう場合、高萩では STRAND 法がよく、天城ではビッターリッヒ法がよい。

STRAND 法の S.E. が高萩でより小、天城でより大となったのは同法の計算は直径の二乗和をもととし、ビッターリッヒ法は樹高の和をもとにし、しかも高萩では無手入林なので直径変動少なく、天城では平均 58 年生の老齢林なので直径の変動がきわめて大であることによる。しかも周知のように、普通の場合

Table 26.  $\Sigma gh$  からの材積推定の例  
Estimates of volume from  $\Sigma gh$

		高萩, 毎木材積 266.4m <sup>3</sup> Takahagi, Complete enumeration				天城, 毎木材積 563.8m <sup>3</sup> Amagi, Complete enumeration			
		推定値 Estimate	S. E.	信頼幅 Confidence interval	誤差 Error	推定値 Estimate	S. E.	信頼幅 Confidence interval	誤差 Error
ビッターリッヒ法 BITTERLICH'S method	9/4					551.7	30.9	64.6	-12.3 (- 2.2%)
	4	261.8	15.3	35.3	-24.7 (- 8.3%)	561.6	35.8	75.0	- 2.35 (- 0.4%)
	9					510.0	75.0	108.0	-53.9 (- 9.6%)
STRAND法 STRAND'S method 10m	東西	277.2	13.8	38.8	- 9.2 (- 3.2%)	548.2	41.0	85.4	-15.7 (- 2.8%)
	E-W 南北 N-S								

備考 誤差は毎木調査値に対するもの。

合直径の変動は樹高の変動よりも大であるからである。

STRAND はその論文 (102), (103) において、林分形数として NYSSÖNNEN の形数表を用いることを提案しているが、この表は、 $G\bar{h} = \bar{h}\Sigma g$  に対する形数表で  $\Sigma gh$  表に対するものではない。既述のように、 $\Sigma gh - G\bar{h} = \Sigma (g - \bar{g})(h - \bar{h})$  に等しいが、林では  $G$  と  $h$  は正の相関をもつので  $\Sigma gh > G\bar{h}$  であり、一般に 0 ではない。したがって対応する林分形数も  $\Sigma gh$  に対するものは  $G\bar{h}$  より小となる。たとえば、高萩では 0.4954 に対し 0.5071、天城では 0.4289 に対し 0.4577 となっており、高萩では差は少ないが、天城ではかなりの差となっている。試みに天城において  $G\bar{h}$  に対する林分形数 0.4577 を用いて計算すると、どのようになるかを見てみよう。

Table 27.  $G\bar{h}$  による材積推定 (天城スギ林)  
Volume estimates from  $G\bar{h}$  (Amagi Cryptomeria stand)

		推定値 Estimate	S. E.	信頼幅 Confidence interval	誤差 Error
ビッターリッヒ法 BITTERLICH'S method	9/4	591.6	33.1	69.3	+ 27.7 (+ 4.9%)
	4	602.2	38.4	80.4	+ 38.3 (+ 6.8%)
	9	546.9	55.3	115.8	- 17.0 (- 3.0%)
STRAND 法 STRAND'S method	東西	385.0	43.7	91.5	+ 21.1 (+ 3.7%)
	E-W 南北 N-S				

(毎木調査値 Complete enumeration 563.9m<sup>3</sup>)

上の Table 27 より  $G\bar{h}$  に対する林分形数は一般に過大な推定値を与えることが判明しよう。したがって、林分形数は  $\Sigma gh$  に対するものを用いるのが妥当であるが、材積の概略値を知るだけならば収穫表などを利用してよからう。しかし、収穫表の林分形数は平均的なもので、たとえば、高萩の 0.4954 に対し、収穫表では 0.4944 とわずかに小さく、また天城では 0.4289 に対し、収穫表では 0.4755 と大きく、一定の傾向がないので注意を要する。しかし、 $\Sigma gh > G\bar{h}$  からみて、一般に収穫表の数値が大きいとは思われる。何となれば、高萩のアカマツ林は、全く無手入れの特殊な林であるからである。いずれにしても林分形数による方法は便利ではあるが、不安定性があり、用いる場合は慎重に行なわなければならない。とくに、ビッターリッヒ法では樹高を測る必要があるから、ビッターリッヒ法による場合は  $fh$  表により材積を求めた方が無難であろう。なお、前節の例と比較すれば、 $\Sigma gh$  から求めた材積とビッターリッヒ法で  $fh$  表より、L1 法で  $fg$  表から求めたものと真の林分形数を用いるときはほとんど推定値に差がない

ことが注意を引く (Table 20, 22, 26 参照)。

### 3.8 収穫表を利用して材積推定する場合

材積推定の方法としては筆者の考案した収穫表を利用する方法がある。

$$\hat{V} = \frac{\hat{G}\bar{h}_{\text{主}}}{G_i h_{i\text{主}}} \times V_i \dots\dots\dots(3.45)$$

ただし、添字  $i$  を付したものは、収穫表の値を示し、主は主林木という意味である。ここで  $\hat{G}$ ,  $\bar{h}_{\text{主}}$  は調査から得た数値である。

高萩の赤松林では 35 年で、ビッターリッヒ法では  $\hat{G}=32.4 \text{ m}^2$ ,  $\bar{h}=16.0$  だから 関東アカマツの収穫表から、2 等地ということがわかる。 $\bar{h}$  は主林木についてのものであるが、一般には全体の平均しかわからないので、代用させても誤差は僅少である。収穫表から、

$$\hat{V} = 241.9 \times \frac{32.4 \times 16.0}{32.4 \times 15.1} = 256.32 \text{ (ビッターリッヒ法のデータを用いたもの)}$$

(ビッターリッヒ法では  $262.4 \text{ m}^3$ )

L1 法の数値を利用すると、

$$\hat{V} = 241.9 \times \frac{34.2 \times 15.9}{32.4 \times 15.1} = 268.87 \text{ (L1 法のデータを用いたもの)}$$

(L1 法では  $276.4 \text{ m}^3$ )

毎木調査値  $286.6 \text{ m}^3$  よりそれぞれ  $30.1 \text{ m}^3$ ,  $17.9 \text{ m}^3$  の過小の値を得たが、林縁誤差はビッターリッヒ法では L1 法より大きいために、このような結果となったものと思われる。もし、 $G$ ,  $\bar{h}$  に毎木調査値を用いると、

$$\hat{V} = 241.9 \times \frac{35.3 \times 16.0}{32.4 \times 15.1} = 279.26$$

となり、わずか  $7.1 \text{ m}^3$  毎木調査値より小である。この値はビッターリッヒ法、L1 法のどれよりも毎木調査値に近い値を示し、もし  $\bar{h}$  に主林木の値を用いるならばさらにより精度の値が得られるであろう。

同じことを天城のスギについて確かめると、ビッターリッヒ法 (断面積定数 4) では、天城スギ 1 等地の収穫表から (林齢は 58 年だが計算の便宜上 60 年の値をとった)、

$$\hat{V} = 631.5 \times \frac{58.4 \times 19.9}{62.1 \times 21.4} = 552.3 \text{ m}^3$$

(ビッターリッヒ法では  $558.7 \text{ m}^3$ )

L1 法 (東西線) では、

$$\hat{V} = 631.5 \times \frac{55.7 \times 20.7}{62.1 \times 21.4} = 547.9 \text{ m}^3$$

(L1 法では  $538.3 \text{ m}^3$ )

毎木調査値では、

$$\hat{V} = 631.5 \times \frac{59.1 \times 20.8}{62.1 \times 21.4} = 584.1 \text{ m}^3$$

材積の毎木調査値は  $563.9 \text{ m}^3$  だから、誤差はそれぞれ、 $-11.6 \text{ m}^3$ ,  $-16 \text{ m}^3$ ,  $+20.2 \text{ m}^3$ , いずれも 5% 以下の誤差ではあるが、ビッターリッヒ法ではもとの推定値より悪く、L1 法ではもとの推定値よりよくなっている。両例を比較考察すれば、いずれにしてもプロットレス法と収穫表を利用する方法は大差ない結果が得られることが判明しよう。

## 第 4 章 プロットレスサンプリングにおける諸問題

## 4.1.1 林縁効果による偏り

調査対象林地でランダムに点を選んだとき、林縁木がカウントされ、その木の対応する拡大円（平田—EsSED 法やピッターリッヒ法のような点抽出法の場合）や拡大長方形（STRAND 法、L1 法、L2 法のような線抽出法の場合）が林地外にはみ出す場合が生じてくる。このようなとき定数係数を、他の完全に拡大領域が林内にある木と同一として、かけて値を求めると過小推定となる。そのために増山<sup>55)67)</sup> はピッターリッヒ法で拡大円をすべて囲む領域を考え、この中に点をおとしてサンプリングする方法を提案したが、この方法は林地の境界が断崖になっていたり、稜線になっていたり、水流に接していたりする場合などは実行不可能となる。したがって、この林縁効果の除去につき、このほかにも、日本では前沢・芳賀の方法<sup>44)</sup>や、北村の方法<sup>29)</sup>など提案され、アメリカ合衆国でも GROSENBAUGH<sup>41)</sup>、BARRET<sup>42)</sup>、BEERS<sup>43)</sup>の方法が提案されている。しかし、現地の技術者の多くはこれらの方法は行なわず、実際にはカウント木の拡大円が林地外にならぬよう、点が林の境界近くに落ちた場合、林の内側にずらしてサンプリングを行なってきた。この方法は 1955 年 HUSH の提案した方法<sup>62)68)</sup> とほぼ同じであるが、林縁の近くの点は抽出されないため、一般に偏りを生じ、とくに林縁と林内の林分構造が異なるときはその偏りは大きい。一般に林縁では、林木が疎立し、林内より材積が少ないことが多いので、HUSH の方法によれば過大な偏りを生ずることが多いだろう。ちなみに、名古屋営林局で実行した例ではすべて過大推定値を得たとのことである。筆者は 1959 年、この問題に気が付き、次に示す筆者の考案した方法のなかで第 2 のイ) 法を実行して見た。その後、1963 年一般理論の発見とともにこれからさらに別の方法をも考案し、実行し検討した。これと同時に 1959 年考案し、実行した方法についても一般理論から証明することができた。

一般理論から、各点において  $\sum \frac{x_j}{a_j} \times 10,000$  を求め、この平均を計算すれば、ha あたりの各種の特性値の不偏推定値が求まると述べたが、この場合、林内で  $a_j$  という領域内に点が落ちているかどうかかわかっていればよいこと、すなわち、領域の形状はいつでもよいが境界が事前に確定していること、ならびに  $a_j$  の面積が確定していることが条件であった。要するに調査の時、カウント木の  $a_j$  の面積がわかり、抽出点が  $a_j$  の領域内にあるかどうかかわかればよく、 $a_j$  の面積、形状はどのようなものであっても不偏推定値を求めるには支障はない。ただし、面積  $a_j$  は、断面積を最も効率高く推定したいときは断面積に比例させればよく、材積を目的とすれば材積に比例させればよいわけであることは明白である。次に筆者の考えた 2 方法を述べる。

ア) 抽出点と木との距離が木に最も近い境界との距離より短いときカウントし、長いときはカウントしない。これはこの木の林縁との最短距離 ( $l_j$  m) により、木の拡大円の半径を  $l_j$ 、 $a_j = \pi l_j^2$  に事前に固定することによって、面積  $A$  の林地において、 $a_j/A = \pi l_j^2/A$  という確率を、 $j$  木に与えることを意味する。たとえば、いま断面積定数 4、木の直径を  $d_j$  とするとき、拡大円の半径は  $100/4 d_j$  だから、

$$\left(\frac{x_j}{a_j}\right) \times 10,000 = \frac{g_j \times 10,000}{\pi \left(\frac{100}{4} d_j\right)^2} = \frac{\frac{\pi}{4} d_j^2 \times 10,000}{\pi \left(\frac{100}{4} d_j\right)^2} = 4$$

となり、カウントした木に 4 をかければ、そのまま ha あたり断面積合計の推定値となる。

いま、3 本の木をカウントしたとき、3 木の拡大円が林内にあれば、断面積は  $3 \times 4 = 12 \text{ m}^2/\text{ha}$  となる

が、2本の木だけはその拡大円が林内にあって、他の1本の木の拡大円が当該林地の外に一部をはみ出すときは、木と境界の最短距離  $l_j$  を測り、 $l_j$  を半径とする拡大円を考えて  $\{2 \times 4 + (g_j \times 10,000) / \pi l_j^2\} \text{ m}^2$  を計算し、推定値を求めるのである。

断面積以外の林分因子については、直接、 $(x_j/a_j)10,000$  を計算すればよい。なお、一般に断面積定数は  $g_j/a_j \times 10,000$  (ただし、この  $a_j$  は  $\pi(d_j/2)^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha$  で林外に拡大円がとび出したときはそのもとの拡大円) であるから、断面積定数を利用して計算を簡単にしたいときは (たとえば材積を求めるため  $fh$  表を用いるようなとき)、

$$\sum \frac{v_j}{a_j} \times 10,000 = \frac{\sum (f_j h_j) g_j \times 10,000}{a_j} = (\sum f_j h_j) \times \text{断面積定数}$$

だから、拡大円のはみ出す木については、

$$\frac{v_j a_j}{\pi l_j^2 a_j} \times 10,000 = \frac{f_j h_j \cdot a_j}{\pi l_j^2} \cdot \frac{g_j}{a_j} 10,000 = f_j h_j \times \frac{a_j}{\pi l_j^2} \times \text{断面積定数}$$

となるので、 $a_j / \pi l_j^2$  を計算し、これを weight と考えて  $f_j h_j$  にかけておいて、他の木の  $fh$  と加え、最後に断面積定数をかけてもよい。この方法の長所は、現場で判定しやすく、かつ林縁との最短距離を測るのみだから、実行しやすいのが長所である。ただし、次に述べるイ)の方法に比べ標準誤差がやや大きくなる欠点がある。したがって、広地域の調査の場合本法により林縁誤差を修正し、狭小な地域では次のイ)の方法をとるとよい。

この方法を、既述の天城国有林の146に小班の1haの実測地の位置図に、10点をとり実行して見たところ、毎木調査の林分断面積  $59.3 \text{ m}^2$  に対し、推定値は  $61.4 \text{ m}^2$ 、標準誤差  $7.25 \text{ m}^2$ 、95%信頼水準で信頼幅  $16.4 \text{ m}^2$  となった。林縁誤差を修正しない値は  $49.4 \text{ m}^2$  で、未修正の誤差  $-16.7\%$  となるのに対し、修正したものは  $+3.5\%$  ときわめて過少な値を示した。

イ) 他の1法は、カウント木に対し、断面積定数に応じた拡大円を描き、たとえば断面積定数1の場合は直径の50倍、4の時は25倍の円を描き、現地で境界と木の位置の略図をかき林内の拡大円の面積をドットグリッド法やプランメーター法で算出し、 $a_j$  を求める方法である。たとえば、断面積定数4のときカウントされた木の拡大円の面積の林内にある部分が、全体の1/2であれば断面積定数を2倍にする。この場合は、ア)法の修正拡大円  $a_j$  に対応するものは、もとの拡大円の林内の面積である。境界が複雑でなければ、木と境界の距離を測るだけで面積はもとまる。すなわち、Fig. 33のように拡大円に対し、境界が直線的に横切っておれば、林内の面積は、

$$\pi R^2 + l \sqrt{R^2 - l^2} - R^2 \cos^{-1} \frac{l}{R} \dots \dots \dots (4.1)$$

となる ( $l$  は木の中心より境界までの距離とする)。

なお、一般には、拡大円の中を2境界線が任意に横切る場合 Fig. 34のように3つの場合が考えられる。 $a$  のように2境界線が拡大円内で交わらない場合は、円内の面積は、

$$\pi R^2 + l_1 \sqrt{R^2 - l_1^2} + l_2 \sqrt{R^2 - l_2^2} - R^2 \left( \cos^{-1} \frac{l_1}{R} + \cos^{-1} \frac{l_2}{R} \right) \dots \dots \dots (4.2)$$

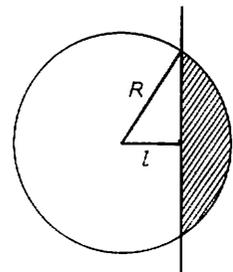


Fig. 33 拡大円と境界の関係その1  
Enlarged circle and stand boundary. 1.

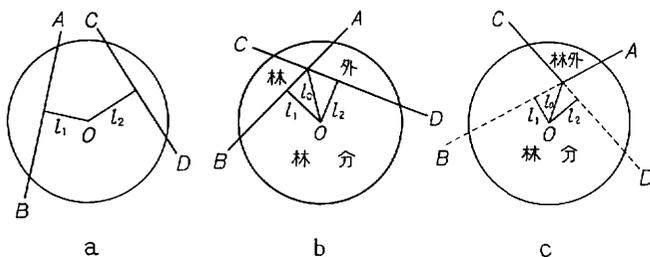


Fig. 34 拡大円と境界との関係 その2  
Enlarged circle and stand boundaries. 2.

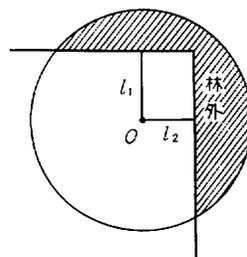


Fig. 35 拡大円と境界との関係 その3  
Enlarged circle and boundary. 3.

となることは前掲の式から当然判明することだろう。

図のbのように林内で2境界線が交わり、しかもその木の側の角度が $\pi$ より小さいときは、 $l_0$ を木より境界線の交点までの距離、 $l_1, l_2$ を両境界線に下した垂線とすると、

$$\frac{1}{2} \left\{ R^2 \left( 2\pi - \cos^{-1} \frac{l_1}{R} - \cos^{-1} \frac{l_2}{R} - \cos^{-1} \frac{l_1}{l_0} - \cos^{-1} \frac{l_2}{l_0} \right) + l_1 \sqrt{R^2 - l_1^2} + l_2 \sqrt{R^2 - l_2^2} + (l_1 \sqrt{l_0^2 - l_1^2} + l_2 \sqrt{l_0^2 - l_2^2}) \right\} \dots\dots\dots (4.3)$$

となる。

この特別な例として交角が $\pi/2$ の場合は、木と交点の距離を測る必要なく、(4.3)で

$$\cos^{-1} \frac{l_1}{l_0} + \cos^{-1} \frac{l_2}{l_0} = \frac{\pi}{2}, \quad l_1 \sqrt{l_0^2 - l_1^2} = l_1 l_2 = l_2 \sqrt{l_0^2 - l_2^2}$$

から

$$\frac{3}{4} \pi R^2 - \frac{R^2}{2} \left( \cos^{-1} \frac{l_1}{R} + \cos^{-1} \frac{l_2}{R} \right) + \frac{1}{2} \left( l_1 \sqrt{R^2 - l_1^2} + l_2 \sqrt{R^2 - l_2^2} \right) + l_1 l_2 \dots\dots\dots (4.4)$$

となる。

Cのように両境界線のなす角が木の側に対して $\pi$ よりも大きい場合は、

$$\pi R^2 - \frac{R^2}{2} \left( \cos^{-1} \frac{l_1}{R} + \cos^{-1} \frac{l_2}{R} - \cos^{-1} \frac{l_1}{l_0} - \cos^{-1} \frac{l_2}{l_0} \right) + \frac{1}{2} \left( l_1 \sqrt{R^2 - l_1^2} + l_2 \sqrt{R^2 - l_2^2} \right) - \frac{1}{2} \left( l_1 \sqrt{l_0^2 - l_1^2} + l_2 \sqrt{l_0^2 - l_2^2} \right) \dots\dots\dots (4.5)$$

となる。3/2 $\pi$ の場合は(4.5)の特別な例となる。

なお、この方法を1966年公表後、新潟大学の高田氏が、北村、大友、BEERSの3方法を折衷したものととして、拡大円の面積をSB、林外にはみだした部分をSAとすれば、SB/(SB-SA)をweightとする方法を発表しているが、これは筆者が式で発表しないで述べたため誤解を生じたいが、全く筆者の方法と一致する。すなわち、木の林内にある拡大円の面積がもとの拡大円の1/2のときは断面積定数を2倍にするということは $2 \times 4 = SB/(SB-SA) \times$  断面積定数を意味するものである<sup>84)</sup>。高田氏の式は、したがって全く筆者のものとも一致する。同氏は筆者の記述を単に式で表わしたにすぎない。この場合、

Table 28. 林縁効果による偏りの修正 (天城スギ林)  
Correction of bias due to edge effect (Amagi *Cryptomeria* stand)

		標準誤差 SE	信 頼 幅 Confidence interval	誤 差 Error
毎木調査による林分断面積 Complete enumeration of basal area	59.3m <sup>2</sup>		95%	
ア) 法による推定 Correction by a) method	61.4 "	7.25m <sup>2</sup>	16.4m <sup>2</sup>	2.1m <sup>2</sup> (+ 3.5%)
イ) 法による推定 Correction by b) method	54.1 "	4.02 "	9.1 "	- 5.2" (- 8.8%)
無修正 No correction	49.4 "	4.13 "	9.3 "	- 9.9" (-16.7%)

$x/(SB-SA)$  を直ちに計算すれば、イ) 法と同様に、

$$\frac{x \times 10,000}{SB-SA} = \frac{x \times SB \times g \times 10,000}{(SB-SA) \times g \times SB} = \frac{x \cdot SB}{(SB-SA)} \cdot \frac{\text{断面積定数} (=BAF)}{g}$$

となる。 $x$  が材積とすれば、 $\{gh/(SB-SA)\} \times (BAF/g) = \{fh \cdot BAF/(SB-SA)\}$  となるから  $10,000/(SB-SA)$  により、断面積定数は自動的に修正される。また  $x$  を断面積とすれば、 $g/(SB-SA) \times 10,000 = \{SB/(SB-SA)\} \cdot (g \cdot 10,000/SB) = \{SB/(SB-SA)\} \times BAF = \text{ウエイト} \times BAF$  となる。

したがって、筆者の方法と高田の方法は全く同一であることが判明しよう。

前にア) 法で述べた例をさらにイ) 法で計算してまとめると Table 28 のようになり、無修正の場合よりはるかに良好な値をうる。毎木調査値に近いものはア) 法の値だが、修正拡大円がイ) 法より小さいので標準誤差は大となる。しかしこの方法は現場では応用しやすく、また Appendix 3 により断面積定数を容易に求められる長所がある。

イ) 法を考案し実行したのは前記のように、1959年、大田原営林署黒羽国有林の48年生のスギ、ヒノキ混交林であった。この国有林面積は 12.4 ha で、市町村合併のため黒羽町に払い下げのため、営林署において毎木調査が同年行なわれた。ただし、署では直径のみ毎木調査し、樹高は樹高曲線により求め材積を算出した。したがって、正確な材積は不明なので材積の比較は行なわないことにした。調査地の地況林況の概要を述べると、八溝山系の南端の丘陵状の団地で、海拔 300~380m で斜面は主として南東に面し、適潤肥沃地で、地質はジュラ白亜系、基岩は砂岩、砂質壤土で、深度も大である。林況は明治48年に植栽したスギ、ヒノキ混交林(調査時林齢48年)で一部アカマツが群状に侵入している。この調査研究の目的は、各種器械の比較とビッターリッヒ法とプロットサンプリングの比較が目的であったが、同時に系統的抽出法とシンプルランダムサンプリングの比較もねらった。調査法はラインプロット法を採り、プロットは直径 10m と 20m の円形プロットとし、プロットの中でビッターリッヒ法によるカウントを行なった。抽出個数は、ラインプロットともに系統的なもの78、ラインをランダム、プロットを系統的にとったもの84、ライン、プロットともにランダムのもの84、さらにプロットで直径 20m 円形プロットのをライン、プロットともに系統的に配置したもの39個調査した。なおライン、プロットともに系統的な場合はラインの進み方はジグザグ形式をとった。実験の対象とした器械は扇田の考案による林分胸高断面積測定器、Calipless Bit LI, Spiegel Relaskope, 平田のコノメーター、タンジェントメーターであった。

林縁誤差の修正は(拡大円面積/拡大円の林内面積)を重みとして断面積定数を修正するイ) 法によった。

林縁におちた数がかかなりあり、また境界がきわめて複雑だったにもかかわらず、大面積のせい、林縁

Table 29. 太田原固有林における各種調査法による本数推定結果  
Estimates of tree numbers by several survey methods in Ōtawara national forest

抽出法および調査法 Survey method	樹 種 Species						ト ト 数 No. of plots	備 考 Remark	
	キ ス Cryptomeria	キ ノ ト Chamaecyparis	その他の針葉樹 Other softwood	広 葉 樹 Hardwood	キ ノ ト ノ キ ス Cryptomeria mixed with Chamaecy- paris	計 Total			
毎木調査 Complete enumeration	473.55	700.32	3.53	39.26	1173.87	1216.66			
Sys-Sys	10m円形 10m circular plot	(- 0.31) 472.09	( 5.82) 741.09	(-53.82) 1.63	( 3.92) 40.80	( 3.35) 1213.16	( 3.20) 1255.61	78	Line- plot ともに Sys
	扇田式によるB法 BITTERLICH'S method	(- 7.95) 435.90	( 4.25) 730.08	(-84.14) 0.56	(-58.89) 16.14	(- 0.67) 1165.98	(- 2.79) 1182.68	"	林縁効果 無修正 No correction
	"	(- 7.73) 436.94	"	"	"	(- 0.58) 1167.02	(- 2.71) 1183.72	"	林縁効果 修正 Bias- corrected
	20m円形 20m circular plot	( 0.44) 475.63	(- 8.16) 643.16		( 64.24) 64.48	(- 4.69) 1118.79	(- 2.74) 1183.72	39	"
Sys-Ran	10m円形 10m circular plot	(-12.64) 413.71	(- 7.65) 646.77	(158.35) 9.12	(102.34) 79.44	(- 9.66) 1060.48	(- 5.66) 1149.04	84	
	B法(扇田式) BITTERLICH'S method	(-16.21) 396.80	(-10.76) 624.97	(136.26) 8.34	(37.72) 54.07	(-12.96) 1021.77	(-10.89) 1084.18	"	林縁効果 無修正 No corrected
	"	(-12.64) 402.38	(- 9.90) 631.02	(137.39) 8.38	"	(11.97) 1033.40	(- 9.93) 1095.85	"	林縁効果 修正 Bias- corrected
Ran-Ran	10m円形 10m circular plot	(-12.62) 413.88	(- 6.38) 655.66	(364.82) 14.29	(108.48) 81.85	(- 8.89) 1069.54	(- 4.19) 1165.68	"	
	B法(扇田式) BITTERLICH'S method	(-13.33) 410.42	(- 1.85) 687.39	(16.71) 4.12	(- 3.02) 37.77	(- 6.48) 1097.81	(- 6.33) 1139.68	"	林縁効果 無修正 No correction
	"	(-12.75) 413.16	(- 1.56) 689.42	"	"	(- 6.07) 1102.58	(- 5.93) 1144.47	"	林縁効果 修正 Bias- corrected
	10m円形平均 10m circular plot	(- 8.52)	(- 2.74)			(- 5.06)	(- 2.18)		
	B法(扇田式)平均 BITTERLICH'S method	(-12.49)	(- 2.79)			(- 6.70)	(- 6.67)		林縁効果無修正 No correction
		(-11.04)	(- 2.40)			(- 6.21)	(- 6.19)		林縁効果修正 Bias- corrected

効果の影響は数値的にはきわめて小さく、Table 29, 30に示すように ha 当たり本数、断面積ともに修正値と無修正値の差が小さく、むしろ sampling error の方が大きく表われてきている。

次に、先の天城の例は現地地で20点抽出したものであるが、計算の便利のため該林分の位置図から任意に10点抽出し、本数、断面積、材積の推定値につき、無修正、ア)法による修正、イ)法による修正に関し、比較検討した (Table 31 参照)。

Table 30. 太田原国有林における各種調査法による断面積推定結果  
Estimates of basal areas by several survey methods in Ôtawara national forest

抽出および調査法 Survey method	サ Cryptomeria	シ Chamaecyparis	その他針 葉 Other softwood	樹 葉 Hardwood	サ シ ヒ ギ ス Cryptomeria mixed with Chamaecyparis	計 Total	備 考 Remark	
毎木調査 Complete enumeration	17.3755	21.4647	0.1917	0.0994	38.8402	30.1313		
Sys-Sys	10m 円形 10m circular plot	( 15.15 ) 20.0081	( 12.14 ) 24.0702	( -22.69 ) 0.1482	( 72.23 ) 0.1712	( 13.49 ) 44.0783	( 13.46 ) 44.3977	
	B BITTERLICH'S method	( 1.38 ) 17.6152	( 1.90 ) 21.8716	( -73.30 ) 0.0512	( 29.18 ) 0.1284	( 1.67 ) 39.4868	( 1.37 ) 39.6664	無修正 No correction
	"	17.6698	21.8716	0.0512	0.1284		39.7210	修正 Bias-corrected
Ran-Sys	20m 円形 20m circular plot	( 10.04 ) 19.1194	( 0.01 ) 21.4674		( 91.34 ) 0.1900	( 4.50 ) 40.5868	( 4.21 ) 40.7766	
	10m 円形 10m circular plot	( 3.81 ) 18.0377	( - 5.03 ) 20.3858	( 212.36 ) 0.5988	( 163.48 ) 0.2619	( - 1.07 ) 38.4235	( 0.39 ) 39.2842	
	B BITTERLICH'S method	( - 6.00 ) 16.3332	( - 9.37 ) 19.4524	( 173.35 ) 0.5242	( 139.44 ) 0.2380	( - 7.86 ) 35.7856	( 6.60 ) 36.5476	無修正 No correction
"	16.4235	19.6461	0.5286	0.2381		36.8363	修正 Bias-corrected	
Ran-Ran	10m 円形 10m circular plot	( 6.09 ) 18.4333	( - 8.71 ) 19.5951	( 193.01 ) 0.5617	( 121.33 ) 0.2200	( - 2.09 ) 38.0284	( -0.82 ) 38.8101	
	B BITTERLICH'S method	( - 0.52 ) 17.2856	( - 5.05 ) 20.3808	( 73.82 ) 0.3332	( -52.11 ) 0.0476	( - 3.02 ) 37.6664	( -2.77 ) 38.0472	無修正 No correction
	"	17.4861	20.4842	0.3333	0.0476		38.3513	修正 Bias-corrected

この例によれば、無修正の場合は著しくマイナスの偏りを生じ、それが sampling error よりも大きい  
ため、信頼区間内に毎木調査値を包含しない場合も生ずる(本数)。ア)法(内接円法)では推定値は  
やや大き目ではあるが、どの因子についても、全体的に見て毎木調査値に最も近い値を与えるが、標準誤  
差が大きく、他の両者の1.5倍~2倍もある。イ)法(林内面積計算法)は、かなり無修正の場合よりは  
毎木調査値に近いうえ、分散も無修正の場合とほぼ似たものとなっている。しかし、ア)法が常にやや大  
きい推定値を与えるのと反対に、イ)法では常にどの林分因子でも過小であるのは若干気がかりとなる。  
果たしてこれが、たまたまこの例にだけ出現したものかどうか、疑問とするところである。しかし、修正  
をすれば、それだけの効果は確実に向上することは事実である。

一方、黒羽の国有林のように、イ)法による修正と、無修正値がほとんど変化のない場合もある。この  
ことを考えると10ha以上の林地でビッターリッヒ法を行なう場合には(点数が多ければ)、無修正でよ

Table 31. 天城国有林におけるビッターリッヒ法の林縁バイアスの修正  
Correction of biases due to edge effect in BITTERLICH's method in Amagi forest

		毎木調査値 Complete enumeration	無修正 No correction	ア) 法 Correction by a) method	イ) 法 Correction by b) method
木数 Tree number	$N$	458	362.3 (0.79)	468.5 (1.02)	390.2 (0.85)
断面積/ha Basal area	$G$	59.1	50.4 (0.85)	61.4 (1.04)	54.7 (0.93)
材積/ha Volume	$V$	563.9	489.2 (0.87)	604.3 (1.07)	528.8 (0.94)
$\bar{d}$	cm	39.19	38.46 (0.98)	39.17 (1.00)	40.85 (1.04)
$\bar{h}$	m	20.84	21.80 (1.05)	21.17 (1.02)	21.81 (1.05)
標準誤差 SE	$N$		33.94	64.40	33.89
	$G$		4.05	7.59	4.02
	$V$		49.05	87.80	52.16
	$\bar{d}$		1.9612	3.5561	2.1124
	$\bar{h}$		0.9976	1.8263	1.0809
信頼幅 Confidence limits	$N$		76.08	145.70	76.67
	$G$		9.17	17.17	9.10
	$V$		110.96	198.60	117.99
	$\bar{d}$		4.4362	8.0440	4.7782
	$\bar{h}$		2.2566	4.1312	2.4450
区間推定 Interval estimation	木数 Tree number		285~439	323~615	313~467
	断面積 Basal area		41.2~59.6	44.2~78.6	45.0~63.2
	材積 Volume		378.2~600.2	405.7~802.9	410.8~646.8
	$\bar{d}$		36.41~45.29	31.12~47.21	36.08~45.63
	$\bar{h}$		19.55~24.06	17.04~25.30	19.36~24.25

いのではないかと考えられる。

以上要するに、サンプリングの効率の点や林縁誤差の問題からも、小面積の林分でプロットレスサンプリングを行なうことはあまり有利でない。とくに、ビッターリッヒ法では究極とする材積を求めるには、少なくともカウント木の樹高か直径、またはこの両者を測らなければならない（他のプロットレスサンプリングでも同様である）、しかも小面積林分ではカウント木数がすぶる多くなり、林縁誤差の修正を要する。したがって、内、外業ともに普通のプロットサンプリングより多大の労力を要することになり、効率が著しく低下する。それゆえ、プロットレスサンプリングを行なうためには、偏りが無視でき、林縁誤差の修正を必要としないほど大きい面積の林を対象としなければならないだろう。筆者としては人工林ならば 10 ha 以上なら大体よいと思われ、5~10 ha の間に修正すべきかどうかの境があると考えられ、5 ha 以下は林縁効果による偏りを修正しなければならないと思われる。このことは、もちろん樹種、林相、林分境界の複雑さにも関係するが、一般的な見解としては上述のことが述べられよう。

#### 4.1.2 林縁効果の偏りの除去についての諸方法

林縁誤差の問題は既述のように、日本では従来二、三の人が取りあげたのみで、あまり問題とされてい

なかったせいか、この問題については、海外での研究もほとんど紹介されていないが、アメリカ合衆国では GROSENBAUGH, BARRET, なお、筆者の方法発表後に T. W. BEERS の方法が発表されている。このような意味で、ここでは海外での諸研究を紹介し、若干検討したい。GROSENBAUGH は1958年、次のような修正法を提案した<sup>41)</sup>。

かれは林縁効果による偏りを slopover bias と称し、この除去法として点抽出法の場合は、図のように林縁付近の最大径木の拡大円の半径より少し大きい幅の周囲帯を林内に設ける。図の内帯に中心を有する A, B の木の重みを 1, 側帯に中心をもつ C, D の木の重みを 2, 隅帯に中心をもつ木には 4 の重みを与える。抽出点が側帯におちたときは 180°, 隅帯では 90° レラスコープなどを回して見る。抽出点の位置に関係なく、把握された木の重みは変わらない。またかれは、境界の複雑性に応じて 30°, 60°, 120°, レラスコープを回し、重みとして 12, 6, 3 を用いる方法を提案している。この方法は、筆者の一般理論よりイ) 法同様に容易に証明され、不偏であるが、他法に比べ標準誤差が大きくなる短所がある。これは林縁部にある木の抽出確率がア) 法などより小となり、断面積定数が内帯の木と著しく異なるゆえ、標準誤差が大きくなるものである。この点は筆者の考案したア) 法と同一である。しかも、複雑な林縁では、最大径木に応じた幅を設けることがア) 法より実行上困難ではなかるうか。

1961年発表された北村の方法<sup>42)</sup>は、林外にはみ出した円の部分を林内におり返す方法で、抽出点がおり返した部分に落ちた部分では 2 本と数え、林の境界の角が  $\pi/2$  のような場合は、三重に重なる部分が生ずるので、ここに抽出点がおちれば 3 本とカウントする。北村法はカウント木の胸高直径、測定点とカウント木との距離、林の境界線とカウント木との距離、林の境界線と測定点との距離などを測定しなければならないので、現地での実行は煩雑であろう、という高田氏と筆者も同意見である。なお、上の因子の値を用い計算を行わなければならないので北村はそのために、計算図表を作製している。この方法も不偏であることは容易に知られる。

北村法と似た考えの方法に BARRET 法<sup>43)</sup>がある。この方法は、境界の外にある拡大円の面積の分だけ、林内の拡大円の面積を拡大するものである。境界外にある拡大円の面積は、拡大円の半径を  $R$ 、木と境界までの距離を  $D$  とすれば、

$$S = R^2 \cos^{-1} \frac{D}{R} - D \sqrt{R^2 - D^2} \dots\dots (4.6)$$

いま、拡大円の半径を  $\Delta R$  だけ拡大して、その拡大した円の、林内面積がもとの拡大円の面積に等しいとすると、

$$S = \left[ \pi - \cos^{-1} \frac{D}{R} \right] \left[ 2R\Delta R + \Delta R^2 \right] - \frac{\Delta R^2 D}{\sqrt{R^2 - D^2}} \dots\dots (4.7)$$

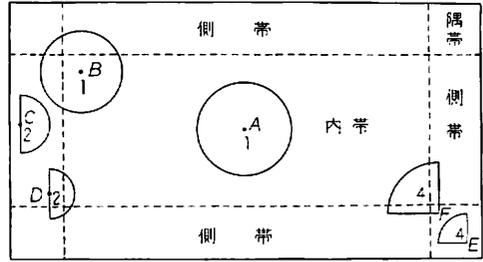


Fig. 36 グローセンボーの林縁バイアス修正法 (ピッターリッヒ法) GROSENBAUGH'S method.

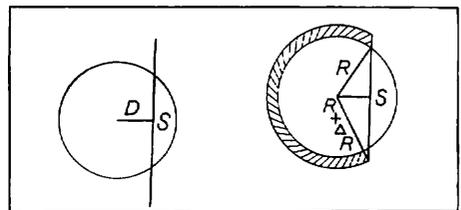


Fig. 37 BARRET による林縁バイアス修正法 (ピッターリッヒ法) BARRET'S method.

で近似できる。(4.6) と (4.7) の両式から、

$$\Delta R = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{2A} \dots\dots\dots (4.8)$$

ただし

$$A = \pi - \cos^{-1}\left(\frac{D}{R}\right) - \frac{D}{\sqrt{R^2 - D^2}}$$

$$B = 2R \left[ \pi - \cos^{-1}\left(\frac{D}{R}\right) \right]$$

$$C = D\sqrt{R^2 - D^2} - R^2 \cos^{-1}\left(\frac{D}{R}\right)$$

ここで  $R$  は木の直径の一定倍であることがわかっているから、 $\Delta R$  は断面積定数、木の直径、木と境界までの距離がわかっているれば求まる。BARRET は断面積定数 20 の場合の計算図表を作製し、木の直径と木と境界との距離を測定すれば、 $\Delta R$  を求められるようにした (ただし ft 単位)。境界付近の疑わしい木に対して  $\Delta R$  を図から求め、抽出点を  $\Delta R$  だけ木の方向に近づけ、その点で検視して、カウントされるかどうかを定める。かれはまた、プリズムを使用する場合は木の直径と、木と境界からの距離とを知り、それによりプリズムの回転角  $\theta$  を求め、それによりカウントするかどうかをきめることのできる計算図表を作成している。

筆者の方法を公表後、T. W. BEERS は筆者の (イ) 法と同じような考えの下に、抽出点を中心として、カウント木の拡大円を同心円状に描き、拡大円のはみ出す部分を除いた面積を用いて Weight を計算し、断面積定数を修正する方法をとっている。この方法は木が林内の一定位置に成立しているから、必ず偏りを生ずる (Fig. 38 参照)。

すなわち、いま、境界線上に  $A$  なる木があり、その拡大円の半分は林内にあるとしよう。拡大円の林内部に抽出点がおちれば、 $A$  がカウントされ、そこで  $A$  木と同じ拡大円を描くと、その円の林内における面積の平均は、明らかに拡大円の半分の面積よりも大きいことが判明しよう。このときは正の偏りを生ずる。

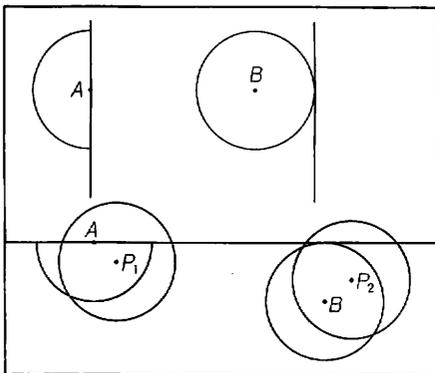


Fig. 38 BEERS 法の例  
BEERS' method.

一方、 $B$  木はその拡大円が林縁と接しており、したがって全部林内にある場合を考え、もしこの中に標本点がとられた場合、そのすべての点における拡大円の面積の平均値は、 $B$  木の拡大円より小となることは当然であり、したがって、この場合は負の偏りを持つ。この方法は一見便利なようであるが、偏りを修正する方法としては不適當である。以上の各方法は、ほぼ類似した点を持つが、芳賀と前沢の方法<sup>4)</sup>は若干異なる立場から、偏りの修正を試みている。かれらは、木が境界に立っていること、林の境界が直線的なこと、林の角隅における木の偏りは無視しうること、林分密度が林縁でも林内でも均一なことを仮定して、相対的な偏

り ( $e_{cat}$ ) を求めている。すなわち、

$$e_{cat} = \frac{2LP \sum r_j^3}{3\pi T \sum r_j^2} = \frac{f \cdot 2LP\bar{r}}{3\pi T} \dots\dots\dots(4.9)$$

$L$  は林の周辺の長さ、 $P$  は拡大円の半径の木の半径の倍数、 $r$  は木の半径、 $T$  は林地面積、 $\bar{r}$  は木の平均半径、 $f = 1 + (\sigma_r/\bar{r})^2 + \dots\dots\dots \approx 1$  である。この方法が実際にあうという人もいるが、仮定が多いこと、林分の周囲長、平均直径を知らなければならないことにより実用上制限されるであろう。

点抽出法についての林縁効果による偏り修正の方法は上述のとおりであるが、筆者の方法は  $x/a$  の  $a$  はきわめて自由にとるが、GROSENBAUGH の方法は  $a$  は側帯の木に対しては  $a/2$  とし、隅帯の木に対しては  $a/4$  とする方法であり、BARRET や北村の方法は  $a$  はあくまでももとの拡大円の面積に等しいものとしてとる方法を考えるものである。芳賀・前沢の方法は、林縁外にとびだした拡大円の部分を考慮して、相対的な偏りを求め修正しようとするもので、他の諸法と若干異質的なものと考えられる。

最後に  $x_j/a_j$  の  $a_j$  について、各方法を区分してみると、次のようになる。

$a_j$  を変える方法

GROSENBAUGH の方法、ア) 法、イ) 法、BEERS 法。

$a_j$  を変えない方法

北村法、BARRET 法、増山法。

偏りを直接修正する方法

芳賀・前沢の方法。

4.1.3 線抽出法における林縁バイアスの修正

線抽出法の場合の偏りの修正法としては筆者のイ) 法が適用できる。この場合は長方形の面積を計算すればよいから、一般に計算は簡単である。ただし、林の境界付近に点がおちて、線分の長さが境界のため定長に達しない場合でも木の拡大領域をイ) 法により計算し、拡大領域がすべて林内にあると仮定した場合の面積と、現に林内にある拡大領域の面積との比を weight として、その木に対する定数を修正するのみでよく、線分の長さは境界により定長とならなくともよい。木の領域はもちろん、点の上下に線を延ばす場合は、木を中心とし線分の方に長方形を描き、線分を点より上に延ばす場合は、木より下方に線分側に長方形を描けばよい (Fig. 39 参照)。

両側検視の場合は、木の両側に長方形を考えればよい。そして、境界内の部分の面積を計算し、これを  $a_j$  とし、 $x_j/a_j$  を計算するか、または  $a_j/a_j'$  ( $a_j$  は完全な長方形で  $a_j'$  に林外の部分を合わせたもの) を  $x_j/a_j$  の Weight として計算し、前述の線分ごとに定まった定数にかければよい。

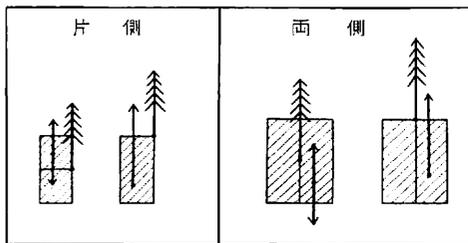


Fig. 39 線抽出法のバイアス修正の考え方  
Correction of bias in line sampling.

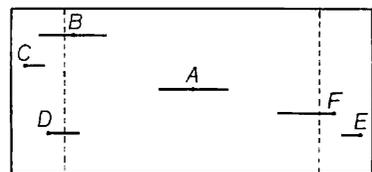


Fig. 40 グローセンボーの線抽出法のバイアス修正  
GROSENBAUGH'S method.

また、広い地域では、線の両側では問題はないが、ただ線分  $l$  の一部のみが境界をはみだす場合がある。このような場合は、はみ出した部分と等しい長さだけ、線分を林内におりかえし、その線上からカウントすればよい。この方法によれば定数を修正しなくともよいという便宜さがある。この方法は不偏であることは直ちにわかる。

線抽出法における偏りの修正法については、他にはまだ GROSENBAUGH の方法しか発表されていない。かれは両側検視の場合、抽出線と平行に周囲帯を設け、この帯内の木については、内部の木の重み 1 に対して、2 倍の重みを与える。この場合も、抽出線の位置は関係しない。帯の幅は樹高、直径の最大拡大長を考慮して定める。

一般に境界が複雑な場合は、不規則な形の地域を若干の長方形の地域に分けて線抽出法を行ない、長方形以外の残りの不規則な形の地域ではプロットサンプリングを行なうことをかれは奨めている。この場合  $w_i$  をプロットの面積とし、 $y_i$  を 1 プロットの総計値、 $\bar{y}_w$  を ha あたりの平均値とすれば、

$$\bar{y}_w = \frac{\sum y_i}{\sum w_i} \dots\dots\dots(4.10)$$

分散の推定値は

$$\hat{v}(\bar{y}_w) = \frac{N-n}{N} \frac{1}{\sum w} \frac{\sum \left\{ \frac{1}{w_i} \frac{(y_i - w_i \bar{y}_w)^2}{n-1} \right\}}{n-1} = \frac{N-n}{N} \frac{1}{\sum w} \frac{\sum \frac{y_i^2}{w_i} - \frac{(\sum y_i)^2}{\sum w}}{n-1} \dots\dots\dots(4.11)$$

となることが SCHUMACHER と CHAPMAN により述べられているが、筆者には比推定法を用いる分散の計算法が妥当ではないと思われる。

4. 2 拡大定数の変化による推定値の母分散の変化

拡大定数、たとえばピッターリッヒ法における断面積定数  $g_j \times 10,000 / a_j = 10,000 \sin^2 \alpha$  や、L1 法の  $h_j \times 10,000 / a_j = (10,000 \tan \beta) / l$  が変わると、すなわち  $a_j$  が変わると、一体母分散はどう変わるだろうか。このことにつき線抽出法、ピッターリッヒ法につき理論的に考究してみよう。まず、線抽出法の場合を考えると各  $a_j$  の面積は、 $lh \cot \beta$  だから線長または検視角によって変わる（線分の方角はランダム定方向とする。以下の議論でも同じものとし、特にことわらない）。したがって分散も両者 ( $l, \beta$ ) に応じて変わってくる。しかし、この場合は長方形の面積が問題となるのだからそのどちらか一方が変わる場合を考えれば十分である。いま、ここでは線長を  $kd$  とし、 $k$  が変化するにつれて分散などがどのように変化するかを見よう。 $y_k$  の分散式

$$V(y_k) = \frac{1}{A} \left\{ \sum_j \frac{x_j^2}{a_j} + 2 \sum_{l < m} \frac{a_{lm} x_l x_m}{a_l a_m} - \frac{(\sum(x))^2}{A} \right\}$$

で括弧内の第一項は線長が大となるにともない常に減少する。第三項は常数だから第二項の係数がどのように変化するかをしらべればよい。Fig.41 で線長を  $kd$ 、 $l$  木と  $m$  木の距離を  $C_{lm}$ 、 $m$  木の水平方向の直線に対し  $l$  木の垂線をおろし、その交点と  $m$  木の距離を  $b_{lm}$  とする。その拡大領域が相手の木を含んでも含まなくとも一般に、

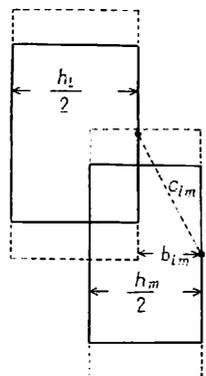


Fig. 41 線抽出法で線長が変わった場合  
Variable line length in line sampling.

$$\frac{a_{lm}}{a_1 a_m} = \frac{4 \left( \frac{h_m}{2} - b_{lm} \right) \left( kd - \sqrt{C_{lm}^2 - b_{lm}^2} \right)}{k^2 d^2 h_l h_m}, \quad (\tan \beta = 2 \text{ とする}) \dots\dots (4.12)$$

が成り立つ。

この式で  $h_l, h_m (h_m/2 - b_{lm})$  は常数  $d$  も一定とみなせるから、これらを見捨  $(kd - \sqrt{C_{lm}^2 - b_{lm}^2})/k^2$  を  $k$  について微分すると  $(-kd + 2\sqrt{C_{lm}^2 - b_{lm}^2})/k^3$  となるから、一般の林では  $h_m/2 > b_{lm}$  であるので  $kd > 2\sqrt{C_{lm}^2 - b_{lm}^2}$  である限り  $a_1 a_m / a_{lm}$  も単調減少である。  $kd = 2\sqrt{C_{lm}^2 - b_{lm}^2}$  のとき微分は 0 となり  $a_1 a_m / a_{lm}$  は極大値をとる。したがって、標本線上における立木の垂線の足の間の距離の 2 倍に等しい線長のとき、分散が最大に近いと思われる。一般に標本線上で少なくとも 3 本以上カウントするのが普通だから、  $kd_{lm} > 2\sqrt{C_{lm}^2 - b_{lm}^2}$  としてよからう。したがって、(2.13) 式は

$$1 \left\{ \sum_j \frac{x_j^2 \tan \beta}{kd h_j} + 4 \sum_{l,m} \frac{\left( \frac{h_m}{2} - b_{lm} \right)}{k^2 d^2 h_l h_m} \right\} \times (kd - \sqrt{C_{lm}^2 - b_{lm}^2}) - \frac{(\sum x)^2}{A}$$

となり、その  $k$  についての一次微分は、  $h_m/2 > b_{lm}$ ,  $kd_{lm} > 2\sqrt{C_{lm}^2 - b_{lm}^2}$  ならば常に単調減少となる。したがって、線長が大になるほど分散が小さくなると考えてよからう。このことは、拡大図形が大きいほど、分散が小なることを意味する。  $\beta$  についても  $\beta$  が小さいほど拡大図形が大になるので分散が小なることが容易に証明できる。

次にビッターリッヒ法で拡大円の半径を  $kr, kR$ , ( $r > R$ )  $b$  を両木の距離とすると (p.69 および Fig. 28 参照),

$$\begin{aligned} \frac{a_{lm}}{a_1 a_m} &= \frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{k^2 R^2} \cos^{-1} \frac{d^2 + k^2 r^2 - k^2 R^2}{2 dkr} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{k^2 r^2} \cos^{-1} \frac{d^2 - k^2 r^2 + k^2 R^2}{2 dkR} - \frac{\sqrt{A}}{2 k^4 r^2 R^2} \right\} \dots\dots (4.13) \end{aligned}$$

( $A = 2d^2 k^2 r^2 + 2d^2 k^2 R^2 + 2k^4 r^2 R^2 - d^4 - k^4 r^4 - k^4 R^4$  とする)

ビッターリッヒ法で拡大円の交点が両円の中心から、両中心を結ぶ直線に直角な垂線の間にあるときは  $\arccosine$  の中はともに正であるが、拡大円を大きくしていくと、その交点は小さい方の円の中心から出ている垂線に近づき、さらにこの垂線より大円の中心に対し、反対の方に移る。このときでも、  $a_{lm}$  の公式は成立するが、  $r > R$  のときは括弧内の第二項の  $\arccosine$  の中は負となる。もちろんこのことは微分には関係ない。いま、  $k$  につき、  $1/\pi^2$  を除き (4.13) の括弧内を  $k$  について偏微分すると、

$$-\frac{2}{k^3 R^2} \cos^{-1} \frac{d^2 + k^2 r^2 - k^2 R^2}{2 dkr} - \frac{2}{k^3 r^2} \cos^{-1} \frac{d^2 - k^2 r^2 + k^2 R^2}{2 dkR} + \frac{2\sqrt{A}}{k^5 r^2 R^2}$$

( $\arccosine$  の中を共に正にすると)

$$= -\frac{2}{k^3 R^2} \sin^{-1} \frac{\sqrt{A}}{2 dkr} - \frac{2}{k^3 r^2} \sin^{-1} \frac{\sqrt{A}}{2 dkR} + \frac{2\sqrt{A}}{k^5 r^2 R^2} \dots\dots (4.14)$$

( $\sqrt{A}/2 dkr$ ,  $\sqrt{A}/2 dkR$  は 0 より大、1 より小だから展開すれば)

$$\begin{aligned} &= -\frac{2}{k^3 R^2} \left\{ \frac{\sqrt{A}}{2 dkr} + \frac{1}{6} \frac{A^{\frac{3}{2}}}{(2 dkr)^3} + \dots \right\} - \frac{2}{k^3 r^2} \left\{ \frac{\sqrt{A}}{2 dkR} + \frac{1}{6} \frac{A^{\frac{3}{2}}}{(2 dkR)^3} + \dots \right\} \\ &\quad + \frac{2\sqrt{A}}{k^5 r^2 R^2} < -\frac{2\sqrt{A}}{dk^4 r R^2} - \frac{2\sqrt{A}}{dk^4 r^2 R} + \frac{2\sqrt{A}}{k^5 r^2 R^2} = \frac{-2\sqrt{A}}{dr^5 r^2 R^2} (kr + kR - d) < 0 \dots (4.15) \end{aligned}$$

$a_{lm}$  は 2 円が接するまでは 0 だから、それまでの分散式は

$$\frac{1}{A} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^N x_j^2}{\sum_{j=1}^N a_j} - \frac{\left( \sum_{j=1}^N x_j \right)^2}{A} \right\}$$

で表わされる。これは明らかに  $a_j$  については単調減少関数である。接した場合は  $kr+kR=d$  で  $a_{lm}=0$  で、このとき、 $kr+kR=d$  で分散式の  $a_{lm}$  も  $a_{lm}/a_l a_m$  を  $k$  で偏微分した結果も 0 となる。 $kr+kR > d$  では上の計算より  $a_{lm}/a_l a_m$  を偏微分したものは常に負だから、結局分散式は常に  $k$  について単調減少であることがわかる。一方  $k$  を大きくしていくと、 $r > R$  とすれば、前述のように  $\cos^{-1}\{(d^2 - k^2 r^2 + k^2 R^2) / 2dkR\}$  の arccosine の中は負となる。この場合

$$\begin{aligned} \cos^{-1} \frac{d^2 - k^2 r^2 + k^2 R^2}{2dkR} &= \pi - \sin^{-1} \sqrt{1 - \left( \frac{d^2 - k^2 r^2 + k^2 R^2}{2dkR} \right)^2} \\ &= \pi - \sin^{-1} \frac{\sqrt{A}}{2dkR} \left( 0 < \sin^{-1} \frac{\sqrt{A}}{2dkR} < \frac{\pi}{2} \right) \dots\dots (4.16) \end{aligned}$$

となる。この値は  $\pi/2$  以上であるから、少なくとも、上式の  $\sin^{-1}(\sqrt{A}/2dkR)$  より大である。負項が大となるからこの場合にも  $a_{lm}/a_l a_m$  が単調減少関数であることがわかる。

このことから、 $k$  が大になるにともない、すなわち、断面積定数が小になるに従って、分散は小に、逆に断面積定数が大になるに従って分散も大になることがわかる ( $\Sigma$  は木だけに関係する)。

分散を小にするために断面積定数を小さくすれば、カウントすべき本数が多くなり、検視角も小さくなるのでカウントすべきかどうか判断に迷い誤測を生じやすくなる。もちろん、カウント本数が多くなるから、労力、費用、時間も多くなる。それゆえ (費用  $\times$  分散) の逆数 = 効率を考えてビッターリッヒ法の断面積定数を選び、また線抽出法での線長や検視角を定めなければならない。

Table 32. 天城スギ林の BAF の変化にともなう標準誤差と変動係数の変化  
Change of standard errors and coefficients of variation  
corresponding to the change of BAF in Amagi forest

BAF	N (458本)			G (59.11m <sup>2</sup> )			V (563.92m <sup>3</sup> )		
	9/4	4	9	9/4	4	9	9/4	4	9
標準誤差 SE	37.27	49.84	53.84	2.50	2.91	4.84	29.13	35.03	51.21
変動係数 Cv	36.39	48.66	52.57	18.96	22.04	36.67	23.14	27.82	40.68
(Cv) <sup>2</sup>	1324.2	2367.8	2763.6	359.5	485.8	1344.7	535.5	774.0	1654.9
(Cv) <sup>2</sup> /BAF	588.5	592.0	307.1	159.8	121.4	149.4	238.0	193.5	183.9

なお、ここでは上の理論を実証するため具体的な例をあげ、分散の変化を考察してみよう。実例としては、前述の天城スギ林で、断面積定数 9/4, 4, 9 について測定した結果、N (本数)、G (断面積)、V (材積) について Table 32 の結果に見られるとおりで上記の理論と一致していることが明らかである。

オーストリアの E. PFLÜGBEIL<sup>89)</sup> は約 90 年生のストロームツの 18 ha ほどの林分で 9 か所からなる標本をとり、断面積定数 1, 2, 4, 6.25, 9, 16, 25 と 0.03 ha の円形プロットを、ha 当たり断面積について比較している (Table 33)。その結果によると、断面積定数 2 が最もよく、定数が大きくなるにつれ、とくに 6.25 以上になるとともに急に悪くなっている。これは分散の推定による標本変動を合わせ考えても、悪いものであると考えられ、断面積定数 1 が 2 より悪いのは、サンプリングエラーによるものと考え

Table 33. ストローブ松林におけるBAFの変化にともなう各種推定値の変化  
Change of estimates corresponding to the change of BAF in white pine

	0.03ha 円形 Circular plot	断 面 積 定 数 BAF						
		1	2	4	6.25	9	16	25
平 均 Mean	45.0m <sup>2</sup>	42.6	45.1	44.8	49.6	44.1	47.1	41.8
標 準 誤 差 SE	2.0m <sup>2</sup>	2.2	2.0	2.8	4.0	4.1	4.7	8.4
変 動 係 数 Cv	13.5%	14.8	14.4	18.2	24.7	33.1	28.9	59.8

られる。かれはさらに、両対数方眼紙の x 軸に断面積定数 (BAF) をとり、縦軸に変動係数をとると、+0.5 の傾斜をなす直線となることを述べている。Boon も熱帯林の調査で  $\log(Cv) = a' + 0.5 \log(BAF)$  が成立し、PRODAN のような  $(Cv)_j^2 \cdot (BAF)_j = (Cv)_i^2 \cdot (BAF)_i$  の関係のあることを一応認めている。PFLÜGBEIL も BAF が 2~6.25 の間ではこの関係が成りたつことを認めている。しかし、天城のスギ林の例ではこの関係は成立しない (Table 32)。PFLÜGBEIL はさらに直径階別木数、材積についても比較しているが、その結果は、断面積定数の最小である 1 と 0.03 ha 円形プロットとはきわめてよく類似しているが、2, 4, ……と断面積定数が大になるにつれてしだいに差が大きくなり、小径木が少なく、大径木の割合が大きくなっていることを述べている。

実例につき母分散を計算し比較すれば最もよいが、實際上困難なので次のような実験を行ない分散の変化をしらべてみた。天城のスギ林における立木位置図より、4 本の木を選び、断面積定数の変化にともなう ha あたり断面積の母分散を計算すると Table 34 のようになった。

ここでピッターリッヒ法を行なうとし、各木の最大拡大円 (ここでは断面積定数 1) を完全に包む方形の地域 (面積 0.2940 m<sup>2</sup>) を考え、断面積定数が、1, 4, 16, 32 の場合の ha 当たりの母分散を計算すれば Table 36 のようになった。

Table 34. 4 本の木の直径、樹高 (天城スギ)

Diameters and heights of four trees (Amagi <i>Cryptomeria</i> )				
木の番号 No. of tree	No. 1	No. 2	No. 3	No. 4
直 径 Diameter	46.2cm	49.4	45.2	36.1
樹 高 Height	24.0m	22.0	20.0	20.0

Table 35. 4 本の木間の距離

Real distances between trees			
	1	2	3
2	8.32m		
3	7.12	9.05m	
4	9.16	4.73	6.63m

Table 36. 4 本の木についてのピッターリッヒ法の BAF に対する母分散 (面積 0.2940 m<sup>2</sup>)

Population variances of four trees corresponding to B-populations with constant BAF (Area 0.2940 m<sup>2</sup>)

断面積定数 BAF	分 散 Variance	割 合 Proportion	Relative-variance	割合/BAF Proportion
1	2.3496	1	0.5247	1.00
4	18.1062	7.71	4.0436	1.93
16	50.6192	21.54	11.0305	1.35
32	133.8397	56.96	29.8903	1.78

Table 37. L 1 法における線長の変化に対する母分散 (面積 0.2940m<sup>2</sup>)  
Population variances corresponding to the line length in L 1 method (Area 0.2940m<sup>2</sup>)

線 長 Line length	片 側 One side			両 側 Both sides		
	分 散 Variance	割 合 Proportion	Rel.-variance	分 散 Variance	割 合 Proportion	Rel.-variance
20m	27.2993	1.7005	6.0952	16.0451	1	3.5825
15m	35.2194	2.1950	7.8636	21.0741	1.3127	4.7053
10m	47.0508	2.9324	10.5052	28.4139	1.7709	6.3441

備考：線の方向は標本点を中心とし、上下にとったものも、上または下の一方方向にとったものも、分散は同じになる(地域が広いから)。ピットーリッヒ法の結果では BAF の変化の割合よりも分散の増加速度が大きく、とくに断面積定数 4 の場合著しく、16 の場合はそれほどでもない。いずれにしても断面積定数が大になるにつれて rel.-variance も急速に増大している。この場合もちろん、断面積定数 1 の場合が最も良好である。

さらにこの地域で L 1 法での断面積の母分散を計算した。この場合、拡大領域は各木の断面積に比例せず樹高に比例させているので、ピットーリッヒ法にくらべ分散は当然大きくなる。

L 1 法では、分散の点では、両側検視の 20 m が当然最も小さいが、効率の面から見ると、片側検視の方がやや良好である。これは森林では等面積ならば、できるだけ細長な形の標本地は、異質的なものを含むから、正方形や円形のプロットより良いという一般的見解を裏書きするものである。線長の効率を見ると、この場合は 20 m より 15 m の方がやや良好で、10 m がさらに良好である。これは分散の増加割合は両側検視の 20 m を 1 とすれば、15 m では 1.3333, 10 m では 2.0000 であればよいのに、この資料では、片側ではその割合に比し分散の割合は、15 m で 0.9676, 10 m で 0.8619, 両側では、15 m で 0.9845, 10 m で 0.8855 となっているからである。なお、これは、ピットーリッヒ法の分散を対比するために、ピットーリッヒ法の場合と全く等しい 0.2946 ha なる面積をとったために生じたもので、L 1 法でこの 4 本の拡大図形を完全に包含する最小と思われる面積 0.1153 ha をとれば、Table 38 のように線長が短くなるにともない、効率は悪くなる(もちろん、分散も増大する)。しかし、この効率の低下は、ピットーリッヒ法ほどでなく、とくに片側検視の場合は、効率はほとんど変わらない。なお、両側検視は 20 m の場合を除き、片側検視より効率は悪い。

20 m の両側検視のよかったのは、林分構造(木の配置など)に依存するものが大きいと思われる。

Table 38. L 1 法における線長の変化に対する母分散 (面積 0.1153 ha)  
Population variances corresponding to the line length in L 1 method (Area 0.1153ha)

線 長 Line length	分 散 Variance		Rel.-variance	
	片 側 One side	両 側 Both sides	片 側 One side	両 側 Both sides
20m	51.9126 (1)	23.2118 (1)	1.7827	0.7971
15m	72.1107 (1.3870)	36.0371 (1.5525)	2.4767	1.2375
10m	108.2833 (1.9673)	54.7551 (2.3589)	3.5124	1.8803

備考：片側、両側ともにこの場合は線分の基点に関係なく、分散は等しい。( ) は 20 m の分散との比。

Table 39. (20×20)m<sup>2</sup> 内におけるビッターリッヒ法の母分散  
Population variances of B-populations in (20×20)m<sup>2</sup> plot

断面積定数 BAF	ア) 法による修正 Corrected value by a) method		イ) 法による修正 Corrected value by b) method	
	分散 Variance	Rel.-variance	分散 Variance	Rel.-variance
1	161.6088	0.6681	0.0046	0.00002
4	161.6088	0.6681	27.0884	0.1120
16	188.3873	0.7788	166.6177	0.7788
32	774.6830	3.2025	774.6830	3.2025

Table 40. (20×20)m<sup>2</sup> 内におけるL1法の母分散  
Population variances of L1 populations in (20×20)m<sup>2</sup> plot

	分散 Variance				Rel.-variance			
	片側 One side		両側 Both sides		片側 One side		両側 Both sides	
	下 Downward	上下 Up- and downward	下 Downward	上下 Up- and downward	下 Downward	上下 Up- and downward	下 Downward	上下 Up- and downward
20m	464.5351	174.3609	200.2318	22.5795	1.9199	0.7206	0.8275	0.0933
15m	464.5351	218.4001	200.2318	33.6470	1.9199	0.9226	0.8275	0.1391
10m	428.3466	308.9235	174.0342	95.7273	1.7703	1.2768	0.7193	0.3956

Table 41. (10×10)m<sup>2</sup> 内におけるビッターリッヒ法の母分散  
Population variances of β-populations in (10×10)m<sup>2</sup> plot

断面積定数 BAF	イ) 法修正 Correction by a) method	
	分散 Variance	Rel.-variance
1	0	0
4	20.6905	0.3325
16	476.4262	7.6571
32	1210.2616	19.4531

備考: 10m×10m の方形内では4本の木はすべて境界より1m以内にあり、ア)法による修正は不適当と思われるので、計算を省いた。

Table 42. (10×10)m<sup>2</sup> 内におけるL1法の母分散  
Population variances of L1 populations in (10×10)m<sup>2</sup> plot

	分散 Variance				Rel.-variance			
	片側 One side		両側 Both sides		片側 One side		両側 Both sides	
	下 Downward	上下 Up- and downward	下 Downward	上下 Up- and downward	下 Downward	上下 Up- and downward	下 downward	上下 Up- and downward
20m	18869.7766	7461.3434	5094.6000	0	4.8742	1.9273	1.3160	0
15m	"	7604.7134	"	81.3911	"	1.9644	"	0.0210
10m	"	8164.1635	"	189.5732	"	2.1089	"	0.0490

備考: 下は起点が立木位置図の上方にあり、線が下方に延びているもの、上、下は起点は、線分の中央にあり、上、下に定線分が延長されたもの。

この場合の L1 法の rel.-variance をビッターリッヒ法と比較すると、後者では、断面積定数が大きくなるとともに、急速に大きくなっているが、L1 法では、増加がきわめて小である。とくに片側検視の場合増加は小であり、rel.-variance はほとんど変わらない。

以上要約するに、ビッターリッヒ法では、断面積定数の増大速度よりも rel.-variance の増加速度が大であるが、L1 法では、線長の減少と大体比例して rel.-variance は増加する。いずれの場合も拡大領域が減少するにともない。分散は増大することは、理論的にも実際的にも確かめられた。

さらに伊実林で、この 4 本の木の成立する地域を 20m×20m と 10m×10m との両者を仮定して、林縁効果は、ビッターリッヒ法では、ア) 法とイ) 法による修正を、L1 法ではイ) 法による修正を行なって比較した (この 4 本の木の占有面積は実際には 10m×10m~20m×20m である) (Table 39~42 参照)。

上記諸表より、ア) 法による林縁効果による偏りの修正を行なう場合は、イ) 法より分散が大きいくこと、L1 法では一定長の線分を抽出する場合、林分面積が小さいときは起点を線分の中心にもってくと分散がはるかに小になることなどが判明すると同時に、前述した各木の拡大領域の減少は分散の増大をもたらすこと (ただし線抽出 L1 法で、線分の起点を線分の端にした場合は不規則であり、林況により変わる)、L1 法では 20m の片側検視は 10m の両側検視と対応するものと考え、林縁効果による偏りのはいるおそれの少ないときは、片側検視の方が、やや効率が高いことなどがうかがえる。

#### 4. 3 林の群度による母分散の変化

同一本数、同一の大きさの林木からなる林分でも、成立する林木の間隔が近くなると分散の公式から、分散が大きくなるということが推察されるということを既述し、さらに、同一本数、同一の大きさの林木からなる林分でも林木の位置を固定して考えると、その成立する林地面積が大となれば、分散は小となるが、rel.-variance は逆に大きくなると述べたが、本節ではこれらにつき理論と実例により考察する。

(2.13) 式より  $y_k$  の分散は、

$$V(y_k) = \frac{1}{A} \left\{ \sum_j^N \frac{x_j^2}{a_j} + 2 \sum_{l < m}^N \frac{a_l x_l x_m}{a_l a_m} - \frac{\left( \sum_j^N x_j \right)^2}{A} \right\}$$

である。群度は木間の距離に関するので上の公式で、群度の変化に応じて変わるものは  $a_{lm}$  だけである。したがって、 $a_{lm}$  がどのような性質をもつ関数であるかをしらべればよい。

線抽出法では一定の長方形が近づくことになるから、重なり面積は大となる。したがって、 $a_{lm}$  は距離  $d$  について単調減少関数となる。

ビッターリッヒ法では  $a_{lm}$  は、前に述べた (3.1) 式を次のように変形できる。

$$a_{lm} = r^2 \cos^{-1} \frac{a^2 + r^2 - R^2}{2dr} + R^2 \cos^{-1} \frac{d^2 - r^2 + R^2}{2dR} - \frac{1}{2} \sqrt{2(d^2 r^2 + d^2 R^2 + r^2 R^2) - (d^4 + r^4 + R^4)} \dots \dots \dots (4.17)$$

根号内を  $A$  とおく。 $d$  は 2 本の木の距離、 $r$  と  $R$  は両木の拡大円の半径とする。

$a_{lm}$  を  $r, R$  が一定とし、 $d$  について偏微分すると、 $-\sqrt{A}/d < 0$  となり、この関数は  $d$  については単調減少関数ということがわかる。したがって、木間の距離が相互に近よると分散は大となり、一様に離れると小になることがわかる。また、rel.-variance についても同様な事実が成立することは当然であるが、この間の関係を次のモデルによって実例で示そう。

Table 43. 当初の木間の距離  
Real distances between trees

	No. 1	No. 2	No. 3
No. 2	8.32m		
No. 3	7.12	9.05m	
No. 4	9.86	4.73	6.63m

Table 44. 内側に1/3だけちぢめた距離  
Distances shortened by 1/3

	No. 1	No. 2	No. 3
No. 2	5.98m		
No. 3	5.25	6.03m	
No. 4	6.57	2.82	4.24m

Table 45. 内側に2/3だけちぢめた距離  
Distances shortened by 2/3

	No. 1	No. 2	No. 3
No. 2	3.56m		
No. 3	3.27	3.02m	
No. 4	3.29	1.07	1.96m

Table 46. ビッターリッヒ法における断面積の母分散と Rel-variance (haあたり)  
Population variances and Rel-variances of basal area in  $\beta$ -populations  
corresponding to the change of BAF's and shortend distances

断面積 定数 BAF	分散 Variance			Rel-variance		
	当初の距離 Initial distance	内側へ1/3縮少 Shortened by 1/3	内側へ2/3縮少 Shortened by 2/3	当初の距離 Initial distance	内側へ1/3縮少 Shortened by 1/3	内側へ2/3縮少 Shortened by 2/3
1	2.3496	2.6727	2.9101	0.5247	0.5969	0.6499
4	18.1062	20.3352	23.8247	4.0436	4.5414	5.3207
16	50.6192	72.1694	92.5620	11.3047	16.1175	20.6718
32	133.8397	159.2744	294.6851	29.8903	35.5786	65.8117

先の天城のスギ立木4本について、林木の間隔を内側に1/3, 2/3とちぢめた場合、断面積の母分散について計算するとTable 46のようになる。

このようにビッターリッヒ法, L1法, いずれの方法でも、群度が大きくなると、分散, rel-varianceが大になることは理論ならびにTable 46および47の実例より明らかである。したがって、同一の本数、直径、樹高からなる林分でも群度が大きいと、サンプリングの精度はおち、均一な配置の林分ほど、精度高く推定できることが推察されよう。

次に面積の変化に伴う rel-variance の変化をしらべてみよう。 $y_k$  の分散式を  $(\Sigma x/A)^2$  でわり、rel-variance の式をもとめると、rel-variance は、

$$\frac{A \left\{ \sum_j \frac{x_j^2}{a_j} + 2 \sum_{l < m} \frac{a_{lm} x_l x_m}{a_l a_m} \right\} - (\Sigma x)^2}{(\Sigma x)^2} \dots \dots \dots (4.18)$$

となる。面積の変化に伴う rel-variance の変化は分子の第一項のみに関係するが、これから直ちに A がますにともない rel-variance は単調に増加することがわかる。また分散は A で偏微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(y_k)}{\partial A} &= -\frac{1}{A^2} \left\{ \sum_j \frac{x_j^2}{a_j} + 2 \sum_{l < m} \frac{a_{lm} x_l x_m}{a_{lm}} - \frac{2 \left( \sum_j x_j \right)^2}{A} \right\} \\ &= -\frac{1}{A^2} \left\{ \sum_j \left( \frac{2}{A} - \frac{1}{a_j} \right) x_j^2 + 2 \sum_{l < m} \left( \frac{2}{A} - \frac{a_{lm}}{a_l a_m} \right) x_l x_m \right\} \dots \dots \dots (4.19) \end{aligned}$$

Table 47. L1 法における断面積  
Population variances and rel-

a) 面積 Area 0.2940 ha

線長 Line length	分 散 Variance					
	片 側 One side			両 側 Both sides		
	当初の距離 Initial distance	内側へ1/3縮少 Distanceshort- ened by 1/3	内側へ2/3縮少 Distanceshort- ened by 2/3	当初の距離 Initial distance	内側へ1/3縮少 Distanceshort- ened by 1/3	内側へ2/3縮少 Distanceshort- ened by 2/3
20m	27.2993	35.5139	44.7428	16.0451	19.0556	22.0284
15m	35.2194	46.6812	59.6832	21.0741	25.5567	30.0627
10m	47.0508	65.4699	87.3640	26.4139	36.5433	45.0191

b) 面積 Area 0.1152 ha

20m	51.9126	72.8617	96.3974	23.2118	30.8894	38.4707
15m	72.1107	101.3408	134.4990	36.0371	47.4687	59.0110
10m	102.2833	149.2563	205.0913	54.7551	75.4869	97.1023

Table 48. 面積の変化によるビッターリッヒ法の Rel-variance  
Rel-variances in B-populations corresponding  
to the change of stand areas

BITTERLICH'S method			
面積 Area 断面積 定数 BAF	2,940m <sup>2</sup>	400m <sup>2</sup>	100m <sup>2</sup>
1	0.524	0.0003	0
4	4.044	0.120	0.005
16	13.048	0.779	0.123
32	29.890	3.203	0.311

Table 49. 面積の変化による L1 法の Rel-variance  
Rel-variance in L1 -populations corresponding to the change of stand areas

L1 法									
線長 Line length	面積 Area	片 側 One side				両 側 Both sides			
		2,940m <sup>2</sup>	1,153m <sup>2</sup>	400m <sup>2</sup>	100m <sup>2</sup>	2,940m <sup>2</sup>	1,153m <sup>2</sup>	400m <sup>2</sup>	100m <sup>2</sup>
20m	6.095	1.7827	0.7206	1.9273	3.582	0.7971	0.093	0	
15m	7.864	2.4727	0.9026	1.9644	4.705	1.2375	0.139	0.021	
10m	10.505	3.5124	1.2768	2.1089	6.344	1.8803	0.391	0.049	

の母分散と Rel.-variance

variances of basal area in L1 sampling

Rel.-variance					
片 Initial distance	側 One side		両 Initial distance	側 Both sides	
	内側へ1/3縮少 Distance short- ened by 1/3	内側へ2/3縮少 Distance short- ened by 2/3		内側へ1/3縮少 Distance short- ened by 1/3	内側へ2/3縮少 Distance short- ened by 2/3
6.0952	7.9293	9.9899	3.5825	4.2548	4.9184
7.8636	10.4227	13.3257	4.7053	5.7061	6.7167
10.5052	14.6155	19.5061	6.3441	8.1592	10.0516
1.7827	2.5020	3.3102	0.7971	1.0607	1.3211
2.4762	3.4800	4.6186	1.2375	1.6301	2.0261
3.5124	5.1254	7.0427	1.8803	2.5922	3.3344

$(2/A) - (1/a_j)$  と  $(2/A) - (a_{lm}/a_{am})$  は、 $A$  が極端に小さい林地でない限り、(4.19) は負となる。すなわち、面積  $A$  に関する限り、rel.-variance が単調増加となるに反し、分散は逆に単調減少となることがわかる。

いま、これを前掲の4本の木の例により、具体的にみてみよう。この例では、4本の木の位置はそのまま、その成立する土地の面積のみ変わるものとする。

ここでL1法は、標本点を線の中心におく方法をとるものとした。

ビッターリッヒ法、L1法、いずれにおいても rel.-variance は面積が小さいほど小さくなる傾向を示しているが、分散は逆の傾向を示すことが表より察知される。なお、Table 50, 51 では 400m<sup>2</sup>, 100m<sup>2</sup> の地域では、イ) 法による林縁効果の修正値を掲げた。

要するに、林木の本数、大きさ、位置を与えられたものとして固定し、林地のみを拡大すると、分散は小になるが、rel.-variance は逆に大きくなり、サンプリングの精度は悪くなる。

したがって、増山の不偏性の条件を適用してサンプリングを行なうときは、精度が低下するおそれが生ずるだろう。

Table 50. 面積の変化によるビッターリッヒ法の母分散  
Populations variances in B-populations corresponding  
to the change of stand areas

面積 Area	2,940m <sup>2</sup>	400m <sup>2</sup>	100m <sup>2</sup>
断面 定数 BAF			
1	2.3496	0.0046*	0*
4	18.1062	27.0883	20.6905*
16	50.6192	166.6177	476.4262
32	133.8397	774.6830	1210.2616

備考 \* は面積  $A$  の割合に拡大円が大きすぎることによる異常な値である。

Table 51. 面積の変化による L1法の母分散  
Population variances in L1-populations corresponding  
to the change of stand areas

線長 Line length	面積 Area	片側 One side				両側 Both sides			
		2,940m <sup>2</sup>	1,153m <sup>2</sup>	400m <sup>2</sup>	100m <sup>2</sup>	2,940m <sup>2</sup>	1,153m <sup>2</sup>	400m <sup>2</sup>	100m <sup>2</sup>
20m		27.2993	51.9126	174.3609	7461.3434	16.0451	23.2118	22.5795*	0*
15m		35.2194	72.1107	218.4001	7604.7134	21.0741	36.0371	33.6470	81.3911
10m		47.0508	102.2833	308.9235	8161.1635	28.4139	54.7551	95.7273	189.5732

備考 \* の値については Table 50 の備考参照。

4.4 プロットレスサンプリングで立木断面内に抽出点がおちた場合、測定不能なため生ずる偏り

プロットレスサンプリングにおいて、図上または航空写真、あるいは現場で直接標本点を抽出する場合、立木断面内に点がおちる場合があるかもしれない。その場合、線抽出法なら、一応、その点を仮定して、木の地ぎわ部分の大きさを考慮し、線分を延長する。また線分の上に木がある場合も同様に処理すればよい。したがって、この場合にはあまり問題にならないだろう。しかし、ピッターリッヒ法では、立木断面の中に入り測定できないので、実際にこのようなことが起これば、カウント木と点の距離より遠めの位置にずらして、観測し、問題なくカウントされるものはそのままカウントし、多少疑問に思われるものは、直径を測り、標本点と木の距離を測定して、それらによりカウントすべきかどうか決定しなければならないだろう。

ところで、林内に1点を抽出し、調査しようとするとき、立木断面におちる確率は  $\sum_{j=1}^N g_j/A$  となる ( $A$  は林の面積,  $g_j$  は立木断面積,  $N$  は総本数)。日本の林分では、ha あたり断面積は 70~80 m<sup>2</sup> が最大だから、確率は 7/1000~8/1000 となり、きわめて小さい、ha あたり5点とっても 4/100 ぐらいで、通常統計学でよくいわれている20回に1回にも達しない。現にこのような場合は、今までほとんど起っていないので問題にするにたらないと思われるが、一時問題となったので、取りあげて見た (この偏りの上限については、1966年の日林誌 No. 1 に南雲が証明している<sup>75)</sup>)。林分の総断面積を  $G$  とし、拡大円で画された領域個々の面積を  $\pi_\alpha$  ( $\alpha=0.1, \dots, M$ ) とすれば、 $\pi_\alpha$  の領域には平均して、 $G\pi_\alpha/A$  の立木断面積が含まれるであろう。したがって、 $\pi_\alpha$  の中では  $\pi_\alpha - (G\pi_\alpha/A)$  のみが調査可能地域の面積となる。このような場合、 $y_k = \sum_{j=1}^{nk} x_j/a_j$  の期待値はどうか計算してみると

$$\begin{aligned}
 E(y_k) &= E\left\{\sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj}x_j}{a_j}\right\} = \frac{\pi_0}{A^2}(A-G) \times O + \frac{\pi_1(A-G)}{A^2} \cdot \sum_{j=1}^N \delta_{1j} \frac{x_j}{a_j} \\
 &+ \dots + \frac{\pi_M}{A^2}(A-G) \sum_{j=1}^N \delta_{Mj} \frac{x_j}{a_j} \\
 &= \frac{(A-G)}{A} \left\{ \frac{\pi_1}{A} \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{1j}x_j}{a_j} + \dots + \frac{\pi_M}{A} \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{Mj}x_j}{a_j} \right\} \\
 &= \frac{(A-G)}{A} \cdot \frac{\sum_{j=1}^N x_j}{A} \dots\dots\dots(4.20)
 \end{aligned}$$

あるいは  $j$  木の拡大円の面積を  $a_j$  とすれば、

$$\begin{aligned}
 E(y_k) &= E \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} x_j}{a_j} = \sum_{j=1}^N \frac{x_j}{a_j} E \delta_{kj} = \sum_{j=1}^N \frac{x_j}{a_j} \cdot \frac{a_j - G}{A} \\
 &= \sum_{j=1}^N \frac{x_j (A - G)}{A^2} = \frac{A - G}{A^2} \sum_{j=1}^N x_j
 \end{aligned}$$

となる。ただし、このことは平均的にいえるものである。

偏りは

$$\frac{1}{A} \sum x_j - \frac{A - G}{A} \cdot \frac{1}{A} \sum x_j = \frac{1}{A} \sum x_j \times \frac{G}{A} = \frac{\sum x_j}{A^2} G \quad (\text{m 単位}) \dots\dots\dots (4.21)$$

ha あたり  $10,000 \times (\sum x_j G / A^2)$  となる。

もし、 $x$  が断面積とすると、 $\sum x_j = G$  だから、これは  $(G^2 / A^2) \times 10,000$  となる。したがって 1 ha 100m<sup>2</sup> の林分断面積があるとすると

$$\frac{(100)^2 \times 10,000}{(10,000)^2} = 1 (\text{m}^2)$$

だけ過小推定となりにすぎない。これはたとえば 1 ha 100m<sup>2</sup> の断面積をもつ林分で 1 m<sup>2</sup> に相当するから、ほとんど問題にならないであろう。

### 第5章 プロットサンプリングとプロットレスサンプリングとの関係について

プロットサンプリングと、プロットレスサンプリング特にポイントサンプリング (点抽出法) の代表的であるピッターリッヒ法のいずれがよいかはよく議論され、これまで種々の研究が発表されている。

プロットサンプリングも、円が重なってもかまわないとし、円の中心をランダムに林内にとるとすると第2章で述べた一般理論が適用できる。

注：今までの理論では木の断面は正円と仮定していたが、一般には正円でない。正円でなくても、木をかこむ領域の境界が凸図形をなし、木の表面から  $r$  の距離にあれば、この図形の面積は、STEINER の公式から

$$S(r) = S + Lr + \pi r^2 \quad (S \text{ は木の断面面積で、} L \text{ は木の周長})$$

で計算できるが、ピッターリッヒ法では、正円でない場合は、 $r$  が一定とならないので計算が困難である。このようなときは、GROSSENBAUGH によれば、断面が長円の場合は、近似的に平均直径として  $\{(\text{最大直径})^2 + (\text{最小直径})^2\} \div 2$  の平方根を用いるとよいとしている<sup>41)</sup>。しかし、ここでは木の胸高断面が前と同じく正円と仮定して議論を進めることにする。

いま、各木の中心から  $R$  の半径をもつ円を各木について考えるとすると、第2章の一般理論の公式がすべて成立することは明白である。

この場合は  $a_j$  は一定の定数  $\pi R^2$  となる。したがって林地にランダムに点をとり、その点を中心として半径  $R$  の円内の木を測定した場合、 $\frac{1}{n \cdot \pi R^2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \delta_{kj} x_j \times 10,000$  は特性値  $x$  の 1 ha あたりの合計の不偏推定値となる。これは、従来の円形プロットをとった場合、ha あたりの  $x$  の合計の推定公式と全く一致する。従来の円形プロット抽出法では、プロットを重ねり合わないよう、プロットを設定していたが、一般理論から円形プロットが重なって一向差しつかえがないことがわかる。むしろ、一定の大きさの円形プロットで平面をおおいつくせない以上、このように考えてサンプリングを行なった方がよいかもしれない。ただし、この場合母分散は、

$$\frac{1}{A} \left[ \frac{1}{\pi R^2} \sum_{j=1}^N x_j^2 + 2 \sum_{l < m}^N \frac{R_{lm} x_l x_m}{\pi^2 R^4} - \frac{\left( \sum_{j=1}^N x_j \right)^2}{A} \right] \dots\dots\dots(5.1)$$

となり、分散は大きくなるであろう。 $R_{lm}$  は  $l$  木と  $m$  木との円の交わりの面積で  $R_{lm}$  はこの両木の距離 ( $d$ ) と  $R$  に関する(ただし、 $2R > d$  の場合のみ交わる)。 $R_{lm}$  は両円の交わりの部分の面積であるから、

$$\begin{aligned} R_{lm} &= 2 R^2 \cos^{-1} \frac{d}{2R} - \frac{d}{2} \sqrt{4R^2 - d^2} \\ &= 2 R^2 \cos^{-1} \frac{d}{2R} - dR \sqrt{1 - \frac{d^2}{4R^2}} \dots\dots\dots(5.2) \end{aligned}$$

となる。(5.1) の値の大小は、第 2 項のみにより決定され、 $\sum_{l < m}^N R_{lm} x_l x_m$  のみによって定まる。この値は、木の大きさ、距離 ( $d$ )、採用される円の大きさ ( $\pi R^2$ ) に関係するが、対象林分を定めた場合、採用する円の面積  $\pi R^2$  だけに依存することがわかる。

2 円が交わるまでは、 $R_{lm}=0$  だから、 $\sum_{j=1}^N \frac{x_j^2}{a_j}$  が単調減少関数で、交わってから前に証明したように  $a_{lm}/a_l a_m$  は単調減少関数(この例では  $a_l = a_m = \pi R^2$ ,  $a_{lm} = R_{lm}$ ) だから、分散式そのものは採用する円については単調減少関数となる。したがってこの場合も、費用を考えに入れて最適の円の大きさを決定するのが最もよい。効率 (= (1/費用) × (1/分散)) は、樹種、林相、林型、地況、対象面積の広狭により支配されるので一概にどの大きさの円がよいといえない。以上のことはプロットが長方形をとる場合でも同様である。

次にプロットサンプリングとビッターリッヒ法のいずれが精度が高いかを検討してみよう。両法を比較する場合、同数の円形標本地と同数の標本点をとることとし、さらにビッターリッヒ法では採用する BAF により調査本数が異なるので、円形プロットによる調査本数の総計と、ビッターリッヒ法の調査本数の総計がほぼ同じになるような BAF と円形プロット面積  $a = \pi R^2$  を採用したと仮定しよう。

したがって、 $\operatorname{cosec}^2 \alpha \sum_{i=1}^N g_i = N \pi R^2 = Na$  となるよう検視角を定めて調査したとする(ただし、 $N$  は  $ha$  あたり本数  $g_i$  は単木断面積。ゆえに、 $\bar{g} \operatorname{cosec}^2 \alpha = \pi R^2 = a$ )。円形プロットを不重複で抽出した場合、林地面積を  $A \text{ m}^2$  とすれば、総計値の推定は、

$$\frac{A}{na} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \delta_{kj} x_j$$

として行なわれる(ただし、 $n$  は標本プロット数、 $\delta_{kj}$  は  $j$  木が  $k$  番目の円形プロット内にあるとき 1 をとり、そうでないときは 0 をとる。 $x_j$  はある円に含まれれば他の円には含まれない)。

$n$  個の円を抽出した場合は、円したがって各単木の抽出確率は、

$$y_k = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^N \delta_{kj} x_j, \quad \frac{A}{a} = M$$

とすると  $n/M$  で、総計の推定値の母分散は近似的に、(有限母集団修正を省略)

$$\frac{M^2 \sum_{k=1}^M (y_k - \bar{Y})^2}{n \cdot M} = \frac{M}{n} \left\{ \sum_{k=1}^M y_k^2 - \frac{\left( \sum_{k=1}^M y_k \right)^2}{M} \right\} = \frac{A}{na} \sum_{k=1}^M \left( \sum_{j=1}^N x_j \right)_k^2 - \frac{\left( \sum_{j=1}^N x_j \right)^2}{n}$$

ただし  $\left( \bar{Y} = \frac{\sum_{k=1}^M y_k}{M} \right)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{A}{n\pi R^2} \sum_1^N x_j^2 + \frac{2A}{n\pi R^2} \sum_{k=1}^M \sum_{l < m} x_{kl} x_{km} - \frac{\left(\sum_1^N x_j\right)^2}{n} \\
 &= \frac{A}{n} \left\{ \frac{\sum_1^N x_j^2}{a} + 2 \sum_{k=1}^M \sum_{l < m} \frac{x_{kl} x_{km}}{a} - \frac{\left(\sum_1^N x_j\right)^2}{A} \right\} \dots\dots\dots (5.3)
 \end{aligned}$$

となる。

ビッターリッヒ法で  $n$  点を抽出する場合の母分散の式は、

$$\frac{A}{n} \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{x_j^2}{a_j} + 2 \sum_{l < m} \frac{a_{lm} x_l x_m}{a_l a_m} - \frac{\left(\sum_1^N x_j\right)^2}{A} \right\} \dots\dots\dots (5.4)$$

となる。(5.4) 式の第3項は  $\left(\sum_1^N x_j\right)^2 / n$  だから、(5.3) の第3項と一致する。したがって、両式の分散を比較するには (5.3) と (5.4) の正の2項を比較すればよい。いま、断面積を例にとり論ずると (5.4) の第1項は、 $(A/n) \sum_{j=1}^N (x_j^2/a_j)$  であるが、

$$x_j = g_j, \quad a_j = g_j \operatorname{cosec}^2 \alpha - \frac{g_j N \pi R^2}{\sum g_i}$$

とすると (p.112 第19行目より、 $\operatorname{cosec}^2 \alpha = N \pi R^2 / \sum g$ )

$$\frac{A}{n} \sum_{j=1}^N \frac{g_j^2}{g_j} \frac{\sum g_i}{N \pi R^2} = \left( \frac{A}{n \pi R^2} \right) \frac{(\sum g_j)^2}{N}, \quad \frac{A}{n \pi R^2} \sum (g_j^2 - \frac{(\sum g_j)^2}{N}) = \frac{A}{n \pi R^2} \sum (g_j - \bar{g})^2$$

となることから、(5.3) の第1項  $(A/n \pi R^2) \sum_1^N g_j^2$  より小さいことは明らかである。(5.4) の第2項は、

$$\frac{2A}{n} \sum_{l < m} \frac{a_{lm} g_l g_m}{\operatorname{cosec}^4 \alpha g_l g_m} = \frac{2A \left(\sum_1^N g_j\right)^2}{n N^2 \pi^2 R^4} \sum_{l < m} a_{lm} = \frac{2A}{n} \cdot \bar{g}^2 \sum \frac{a_{lm}}{a^2}$$

となり、(5.3) の第2項は

$$\frac{2A}{n} \sum_k \sum_{l < m} \frac{a_{kl} g_{km}}{a}$$

となり、

$$\frac{a_{lm}}{a^2} \leq \frac{1}{a}$$

であるが、この大小の評価は、 $a_{lm}$  が樹間距離、直径、拡大円の大きさに依存すること、および  $\sum g_{kl} g_{km}$  は  $k$  円内の木のみ関係するので  $\bar{g}^2$  との比較は困難であるが、一般には  $\sum x_l x_m$  が (5.3) ではプロット内の林木間の積和の  $M$  個の合計に対し、(5.4) ではこのような制限がないので、(5.4) の第2項は (5.3) の第2項より大きくなる可能性もある。なお、第1項も  $x$  として  $g$  をとった場合は (5.4) の方が小さかったが、それ以外の因子 (材積など) をとった場合には必ずしも (5.4) の方が小さいと言えないだろう。したがって、(5.3) と (5.4) から不重複プロット法とプロットレス法の精度の比較は困難である。

しかし、面積  $\pi R^2$  の円形標本地を重複抽出することはビッターリッヒ法の拡大円を皆等しく考えた場合に相当し、本数を除く各因子の分散は大きくなることが考えられる。ただし、考えられることは  $x$  と  $a$  が一定の比例関係にあるときは、プロットレスサンプリングの分散は本数を除く因子については小さいように思われる。

Table 52. 太田原国有林におけるプロットおよび  
Results of experiments of plot- and plotless

抽出調査法 Survey method		測定個数 Sample size	推定本数 No. of trees	イ) 法により 修正した推定 断面積 Corrected estimates of basal area by b) method	断面積の標 準誤差 S. E.
毎木調査 Complete enumeration			1,217本	39.1m <sup>2</sup>	
系統法 Systematic	直径10m円形地 Circular plot with 10m diameter	78	1,256	44.5	1.6325
	BITTERLICH's method	78	1,184	39.7	1.5533
	直径20m円形地 Circular plot with 20m diameter	39	1,184	40.6	1.8665
Ran-Sys	10 m 円形地 Circular plot with 10m diameter	84	1,149	39.4	0.7564
	B 法 BITTERLICH's method	84	1,095	36.8	1.4154
Ran-Ran	10 m 円形地 Circular plot with 10m diameter	84	1,166	39.1	1.2840
	B 法 BITTERLICH's method	84	1,144	38.5	0.9355

備考 Remark: 断面積定数は4である。

Table 53. 太田原国有林におけるプロットおよびプロットレスサンプリングの  
Average time for measurement of plot- and plotless sampling

	測定か所数 Sample size	測定本数 Observed trees	平均直径観測時間 Average time for diameter measurement		平均樹高 Average height
			1本当たり per tree	1か所当たり per point or plot	1本当たり per tree
10m円形プロット Circular plot with 10m diameter	246	2,316 <sup>本</sup>	0.5052	4.7561	1.3040
B 法 BITTERLICH's method	246	2,355	0.7291	6.9797	1.6756
20mプロット Circular plot with 20m diameter	39	1,431	0.6827	25.0513	1.3871

次に、この問題を実例によって検討してみよう。まず、プロットサンプリングとビッターリッヒ法との比較の例として昭和34年（1959年）前橋営林局太田原営林署の黒羽国有林で行なった結果を述べる。前に述べたように、この国有林はスギが大半で尾根筋にヒノキが植栽され、アカマツ、広葉樹が混在する面積12 ha 余で、売払いのため、直径は全林毎木調査で、樹高は樹高曲線を用いて、材積を算定してあった。この調査と同時にサンプリングを行なったもので、サンプリング方式としては、前述のように、系統的なline-plot 法と、ラインをランダムにとり、その上でプロットを系統的にとる方法、ラインをランダムにさらにその上でプロットをランダムにとる副次抽出法の方法を行なった。林縁効果による偏りの修正は、イ) 法により行ない、推定値および標準誤差の計算は既述のような理由から断面積についてのみ行なった。この実験の結果によれば、標準誤差については、直径10m 円形標本とビッターリッヒ法については優劣をつけ難い（ただし、標準誤差の計算は近似計算で、しかも若干偏りがある）。しかし、直径測定に

プロットレスサンプリングの結果

sampling in the Ottawa National Forest

同 右 信 頼 幅 Confidence interval	無修正の推定断面積 Noncorrected estimates	1 か所平均観測本数 Average observed trees per point or plot	1 か所平均直径測定時間 Average time for diameter measurement per point or plot	1 か所平均樹高測定時間 Average time for height measurement per point or plot
		木	分	分
3.2487	44.4	9.8462	5.5897	18.0641
2.6931	39.7	9.9615	8.1282	16.9103
3.7722	40.8	36.6923	25.0513	50.8974
1.6224	39.2	8.8929	4.2619	10.5833
3.0360	36.5	9.2619	6.7024	12.4524
2.7542	38.8	9.1667	4.4762	9.6667
2.0067	36.0	9.5240	6.1905	13.4643

調査時間  
in Ottawa National Forest

測定時間 time for measurement 1 か所当たり Per point or plot	平均測定時間 Average time for measurement	
	1 本当たり Per tree	1 か所当たり Per point or plot
12.2764	1.8092	17.0325
16.0407	2.4047	23.0203
50.8974	2.0699	75.9487

については、ビッターリッヒ法では全平均で1本あたり、0.73分を要し、10m 円形地内の同平均0.51分よりも約1.44倍も多くかかったことは全く意外で、樹高測定は、ビッターリッヒ法ではカウント木が飛んでいるので、約1.28倍の時間を要したが、この程度は妥当であろう。したがって、費用の面を考えると、この林の場合円形プロット法が有利のように思われる。

注：プロットが境界におち、完全な円形標本地がとれない場合は既述のように次のような推定を行ない、修正を行ったものと、無修正のものとを表にかかげ対比してある (SCHEMACHER & CHAPMAN による)。

$w_i$  を各プロットの面積、 $y$  をその測定値の合計とし、1 ha あたりの平均を  $\bar{y}_w$  とすれば、

$$\bar{y}_w = \frac{\sum y_i}{\sum w_i}$$

分散の推定値

$$\hat{v}(\bar{y}_w) = \frac{N-n}{N} \frac{1}{\sum w} \frac{\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{w_i} (y_i - w_i \bar{y}_w)^2 \right\}}{(n-1)} = \frac{N-n}{N} \frac{1}{\sum w} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{\sum w_i} - \frac{(\sum y_i)^2}{(\sum w_i)^2}$$

1964年、1965年、1966年の3年間林業講習所研修生により、天城の学術参考保護林で行なった調査結果でもプロットサンプリングの方が、若干良い結果を得ている。

日本ではこのほかに高田が吉無田国有林で行なった例がある<sup>105)</sup>。対象小班個数は30~50年生の小班が16、120年生の小班が3の計19小班、その面積は357.20 haである。調査は面積30 ha以上の小班では10、それ以下の小班では5個の点を抽出し、そこで15m×15mのプロットサンプリングを行ない、一方この

標本点から各小班ごとに設けた基線の水平方向で進行方向に 15m の直線をのぼし、ジュコースコープで平均樹高を推定するとともに、この両端の点で BAF=4 のビッターリッヒ法を行なった、その結果によれば全小班の平均断面積の推定はプロットサンプリングでは 45.2m<sup>2</sup>、推定百分率誤差は 3.3%、ビッターリッヒ法では 42.2m<sup>2</sup> で推定百分率誤差は 2.9% となり、各小班ごとに見ると推定百分率誤差が、プロットサンプリングの方が高いのは 19 のうち 10 であった。林齢の高い 120 年生の小班を除いた平均は、プロットサンプリングでは 40.8m<sup>2</sup>、百分率誤差は 2.1%、プロットレスサンプリングでは 39.7m<sup>2</sup>、百分率誤差 2.2% であった。一方、測定に要した時間は、直径測定は毎木の方がビッターリッヒ法の約 2 倍の測定時間を要し、樹高測定時間は、毎木の方がジュコースコープの約 3.7 倍の測定時間を要した。なお、平均樹高については、プロットサンプリングによる場合はジュコースコープより一般にはるかに百分率誤差が小さい。

かれはさらに材積推定を行なっているが、プロットサンプリングの方が推定値が若干高く、かつわずかに精度もよい。しかし、測定費用を考慮すると、プロットレスサンプリングの方がプロットサンプリングよりも有効な調査法であると結論している。

なお、かれの発表した結果を見ると、個々の小班におけるビッターリッヒ法の推定値にかなり異なるものがあり、最大約 18m<sup>3</sup> もちがうものがある。さらに全体平均で見ると、プロットレスサンプリングの結果は断面積は 3m<sup>2</sup>、材積では約 15m<sup>3</sup> も、プロットサンプリングの結果より小さいことが注意をひく。したがって、かれのいうように精度的にはやはり、プロットサンプリングはプロットレスサンプリングより一般的には良く、費用を考慮すると、プロットレスの方がよいかもしれない。ただし、ジュコースコープによる本数推定のため測定時間を除いており、またプロットの場合プロット設定時間を除いているから断言はできないだろう。

1965 年、発表されたカナダの C. L. KIRBY<sup>68)</sup> の実験では Saskatschewan の異齡天然混交林で、277 か所の面積 1/5 acre 固定標準地の中心に標本点を取り、断面積定数 10 を用い、これを母集団からの任意標本とみなして解析を行なっている。

その結果によると、林分断面積の変動係数は樹高が高くなるほど減少するが、平均してポイントサンプルはプロットサンプルに比べて変動係数は 10% ほど大きい。断面積の推定値は、1in 以上の木については、ポイントサンプルでは 129.40 Sq·ft/acre、プロットサンプリングでは 135.20 Sq·ft/acre となり、標準偏差は 48.2、36.3 でプロットサンプルの方がよい結果を示している。これについては、ポイントサンプルは標本点の中心の選定に偏りがあったためであろうと Kirby は説明している。一方、3.6in 以上の直径の木については、ポイントサンプルは推定値が 124.00、プロットサンプルでは 123.30 となり、ほとんど差はなくなるが、標準偏差は 51.8 と 42.1 で、プロットサンプルは  $(51.8)^2 / (42.1)^2 = 1.51$  で 5 割ほど精度が良い。一般にプロットサンプルは、アメリカの文献では 1/5 acre 円形プロットの場合 1.2~3.1 倍の精度の良さを示しているが、このことは、林木の配置状態、比較する標本のサイズの小さかったこと、何 in 以上の直径を測ることにしたかというようなことが原因であるとかれは説明している。

直径階ごとの木数がポイントサンプルでは Kirby の場合はプロットサンプルに比べて一般に少なく、特に小径級の場合著しいが、太田原営林署の黒羽国有林での実験例では、特にこのような傾向はみられなかった。

これより前 1954 年に、GROSENBAUGH と W. S. STOVER も両者を比較した結果を発表している。プロッ

Table 54. GROSENBAUGH と STOVER の例  
Experiment by GROSENBAUGH and STOVER

	ポイントサンプル Point sample		プロットサンプル Plot sample	
	平均 Average	標準偏差 Standard deviation	平均 Average	標準偏差 Standard deviation
断面積 Basal area	(ft.) <sup>2</sup> 53.76	38.2	53.80	32.0
全材積 Total volume	(ft.) <sup>3</sup> 692.1	662.9	691.7	603.4
利用材積 Merchantable volume	(bd. ft.) <sup>3</sup> 3,260	3,848	3,297	3,663

Table 55. Eagles Depot での調査結果  
Experiment in Eagles Depot by KENDALL and SAYN-WITTGENSTEIN

	断面積 Basal area		総材積 Total volume	
	平均 Average	標準偏差 Standard deviation	平均 Average	標準偏差 Standard deviation
BITTERLICH's method	97.6	37.4	2,279	862
1/5 acre plot	97.3	21.3	2,246	510

Table 56. Forbes Depot での調査結果  
Experiment in Forbes Depot by KENDALL and SAYN-WITTGENSTEIN

	断面積 Basal area		総材積 Total volume	
	平均 Average	標準偏差 Standard deviation	平均 Average	標準偏差 Standard deviation
BITTERLICH's method	115.3	38.3	2,686	847
1/5 acre plot	115.0	25.2	2,669	656

トの面積は 1/4 acre で直径 6.95 in 以上の木について 1/10 in 単位で直径を測り、さらにこのプロットと面積 1/40 acre の同心円内の 4.95~6.95 in の直径の木については 1/10 in 単位で直径を測り、2.95~4.95 in の木については本数のみ数えた。一方、ポイントサンプルについては直径 1 in 以上のものを対象とした。地点数は 665 であった。この結果は Table 54 のとおりで精度は、プロットサンプルの方が 20%ほどよいが、調査時間労力のことや、また推定値にほとんど差がないことも合わせ考えると、ポイントサンプルの方がよいと述べている。

また、1957年、R. H. KENDALL と SAYN-WITTGENSTEIN<sup>31)</sup> は Petawa 地方の天然生林の Eagle Depot と Forbes Depot の2か所でプロット法とプロットレス法の比較を行なっている。Eagle Depot では地点70、直径 4 in 以上の木のみ対象とし、Forbes Depot では地点 50、直径 1 in 以上の木を対象として測定した。その結果は Table 55 と Table 56 のとおりである。

この場合も標準偏差はプロットサンプルの方が小さいが、平均値はほとんどちがわない。しかし、直径階別本数曲線はかなり異なりビッターリッヒ法では小径木の本数推定は過少になっている。これらについ

Table 57. De Soto 国有林の調査結果  
Experiment in De Soto by AFANASIEV

林 班 Compartment	断 面 積 Basal area		材積 (直径 6in と 8in のもの) Volume (Diameter 6" and 8")		材積 (直径 10in 以上のもの) Volume (Diameter over 10")	
	BITTERLICH	1/5 acre	BITTERLICH	1/5 acre	BITTERLICH	1/5 acre
1	+ 103.8	+ 66.3	+ 80.7	+ 56.6	+ 111.1	+ 100.8
2	- 11.0	- 9.7	- 3.3	+ 34.4	- 12.1	- 13.1
3	+ 0.8	+ 11.6	- 15.1	+ 19.7	+ 5.5	+ 28.4
4	- 7.9	- 4.2	+ 57.7	+ 7.9	- 22.7	- 20.9
5	- 5.4	- 15.8	- 34.6	- 3.2	+ 16.4	+ 4.7
6	- 22.7	- 12.6	- 22.9	- 8.4	- 19.8	- 14.4
7	- 19.6	- 38.5	- 38.6	- 34.3	+ 3.2	+ 10.1
8	+ 2.6	+ 5.2	+ 16.9	+ 19.8	- 1.8	+ 4.1
計	+ 1.5	+ 2.15	+ 4.7	+ 1.71	+ 4.6	+ 5.91

Table 58. インド国立林試での調査結果  
Experiment by Chacko in Indian F. R. I

	断 面 積 Basal area				
	BAF 2, 296	BAF 3, 444	BAF 4, 591	BAF 5, 739	20×20m プロット
平 均 Average	24.22	26.00	26.17	27.27	25.76
標 準 誤 差 SE	1.379	1.467	1.766	1.903	1.599
標準誤差の平均に対する百分率 SE × 100 average	5.7	5.6	6.7	7.0	6.2
95% 信 頼 域 Confidence interval 95%	21.46~26.98	23.07~28.93	22.64~29.70	23.46~31.08	22.56~28.96
	本 数 No. of trees				
	BAF 2, 296	BAF 3, 444	BAF 4, 591	BAF 5, 739	20×20m プロット
平 均 Average	439	447	469	484	433
標 準 誤 差 SE	33.2	29.9	38.9	51.4	20.2
標準誤差の平均に対する百分率 SE × 100 average	7.6	6.7	8.3	10.6	4.7
95% 信 頼 域 Confidence interval 95%	373~505	387~507	591~547	381~587	393~473

では前の 2 例と全く一致する。

M. AFANASSIEV<sup>1)</sup> も南部ミシシッピの De Soto 国有林で面積 296.4 acre の Long-leaf pine の二次林についてポイントサンプルとプロットサンプルの比較調査を行なった。本数はおおよそ 30,000 本で、大きさは直径は 5.1 in ~ 2.4 in で、林齢はほぼ同齢で 35 年であった。なお、残存木も林内諸所に点在していた。調査は全数調査と 1/5 acre 円形プロットを用いた抽出率 10% の調査と、その円形標本地の中心でビッターリッヒ法を行なった。標本点の選び方は line-point 法で完全に系統的な方法をとっている。その結果は、Table 57 に示すように毎木調査値に対する誤差が挙げられているだけであるが、この結果から、かれはビッターリッヒ法の誤差が少ないことと、調査時間が短いことから、ビッターリッヒ法がより良いと述べている。

Table 59. VUOKILA の調査結果(標本点数と面積)  
Experiment of VUOKILA (Sample points and areas)

地区 District	面積 Area	標本点数 No. of Sample points	備考 Remark
No. 1	46.0 ha	187	合理的経営の私有林(ただし、林齢、蓄積に著しい差がある)
No. 2	9.7	109	国有林(同上)
No. 3	57.4	128	国有林(蓄積の変動少ない)
No. 4	294.6	637	国有林(老齢、混交の密生林)

Table 60. VUOKILA の調査結果(材積)  
Experiment of VUOKILA (volume)

地区 District	プロットサンプリング Plot sampling	ビッターリッヒ法 BITTERICH'S method
No. 3	116m <sup>3</sup> ±55m <sup>3</sup> (変動係数 47%)	121 ± 61 (50%)
No. 4	156 ± 91 ( " 58%)	169 ± 104 (62%)

アメリカ合衆国以外の例として、インドの林業試験場で V. J. CHACKO, A. C. RAWAT と G. S. NEGI の行なった例がある<sup>26)</sup>。場所は同林試構内の面積 45.32 ha のチール(Chir)の人工播種林で林齢は33~38年だが、サンプリングの目的として、一母集団として扱った。この林地内を道路が東南から西北に貫通しているので、これを基線として扱い、この道に直角に7本の線をランダムに選び、1線だけは2点、他の6線は3点を標本点として選び、これらの点を中心としてビッターリッヒ法を行なうと同時に20m×20mプロットをとり、調査を行ない、断面積ならびに木数について比較検討している。なお、ビッターリッヒ法を行なうときは、プリズムを用い、ftを用いたときの断面積定数 10, 15, 20, 25(メートル法ではそれぞれ Table 58 の定数に相当する)を使用した。

断面積、木数ともに5種の推定値は多少異なるが、有意差はない。ただし、木数推定の標準誤差は20m×20mプロットが特に小さいのが顕著である。かれらは、断面積定数としては、30~40年のチール林分では、2.296 か 3.444 がよいと述べている。なお、この場合も断面積定数が 2.296 を除き、一般に大きくなると、標準誤差が大きくなるのに気がつくであろう。

欧州の例では PFLÜGGEIL<sup>89)</sup> の前に引用した例がある。かれの場合でも 0.03 ha の円形プロットの断面積推定値の標準誤差ならびに変動係数が最小になっていた。フィンランドの VUOKILA<sup>123)</sup> は、1959年の同国の林試報告で Table 59 に示す4地区(合計面積 407.7 ha)に対して、断面積定数1のビッターリッヒ法を行ない、さらに第3、第4地区では円形プロットサンプリングを行ない、両者を比較している。

抽出法は系統的サンプリングを採用した。このうちプロットサンプリングを行なった第3および第4地区で、材積について述べているが、Table 60 に示すように標準誤差はビッターリッヒ法が大である。

しかし、かれは、断面積推定だけなら、1ポイント平均1分45秒ですみ、直径を毎木調査して2本のメジアンの木の高さを目測するなら6分ですみ、この木に成長錐を入れるなら7分ですむと述べ、ビッターリッヒ法はきわめて経済的で、同じ精度をうるに円形プロット法の10~20%の費用ですむと述べ、大いに賞賛している。

以上、筆者らの実験例ならびに各国の実験例を挙げたが、太田原国有林の例を除く以外のすべての例

で、同一個数を抽出した場合は、プロットレスサンプリングはプロットサンプリングより若干精度が劣るように述べられている。ここで注目すべきことは、採用したプロット面積と断面積定数との関係である。たとえば、本数と断面積の推定値について述べられている例につき、平均断面積に対応する平均直径（算術平均直径よりやや大きい）を求めて、採用した断面積定数に対応する拡大円の面積を比較して見ると、KENDALL らの例では Eagle Depot では約 0.029 acre, Forbes Depot では約 0.016 acre で、比較プロット面積 0.2 acre よりはるかに小さい。またインドの Спасско らの例でも、断面積定数 10, 15, 20, 25 に対応する円はそれぞれ約 260m<sup>2</sup>, 174m<sup>2</sup>, 129m<sup>2</sup>, 103m<sup>2</sup> で、比較プロット面積 400m<sup>2</sup> よりもはるかに小さい、したがって、プロットサンプリングにおいては、調査本数が多いと思われ、精度がよいのは当然であろう。太田原国有林の場合は断面積に基づく平均直径は 20.2 cm で、断面積定数 4 をもってビッターリッヒ法を実行することは半径 5 m の円形プロットをとることに対応する。Table 53 から知られるように 10m 円形プロットの測定本数は 2,311 本、ビッターリッヒ法のそれは 2,355 本、のようにその差が 2% にもならない。この場合の断面積の推定値の標準偏差をみると、Table 52 によれば、系統法ではビッターリッヒ法、Ran-Sys 法では 10m 円形プロット法、Ran-Ran 法ではビッターリッヒ法が精度良く、いずれが良いか、その優劣はつけ難い。従来の発表された例は、断面積定数とプロット面積との関係を考慮せず行なった実験結果がほとんどすべてのようで、そのため、ビッターリッヒ法が精度は悪いという結論を下したものと思われる。このことはプロットレスサンプリングのすべてについて共通で、おそらくプロットレスサンプリングは木の大きさに比例した確率比例抽出である以上、求めようとするものは木の本数を除く他の林分因子ならば、精度の面ではプロットサンプリングにはそれほど劣るようなことはないであろう。ただし、木の本数は、プロットサンプリングでは、プロット面積が同一だから、確率比例抽出のようになり、プロットレスサンプリングよりは当然精度よく推定できるであろう。

しかし、森林調査では、一般に本数よりも ha あたり材積、ha あたり断面積、平均直径、平均樹高を必要とし、かつ、太田原の例にみるような精度であれば、プロットの境界をきめなければならないプロットサンプリングより、プロットレスサンプリングは効率の点でははるかに勝るものであろう。もちろん、天然林か人工林か、あるいは林相や地床の状態も関係するので、プロットレスサンプリングが常に勝るとは断言できないことは当然であり、要は調査者の適切な判断をまつものである。

また、プロットレスサンプリングにも上記ビッターリッヒ法以外にも各種の方法があり、どの方法がよいか問題となろう。森林調査の目的の第 1 は材積であり、次に成長量、直径分布、地位判定のための平均樹高であろう。このような観点からみれば、単に材積だけを知ろうとすれば STRAND 法が最も便利であろう。この方法では、直径を測るだけで林分形数がわかれば容易に材積が求められ、LOREY の平均樹高も推定できる。これに反し、ビッターリッヒ法は、材積を推定するには少なくとも樹高を測定し、樹高の和に林分形数をかけなければならない。直径分布を推定するにはビッターリッヒ法では可能であるが、STRAND 法では可能でない。しかし、単に第 1 の目的である材積だけに限定すると、STRAND 法は労力や時間の少なくてすむ直径のみを測定すればよいから、ビッターリッヒ法より勝るといってよからう。

しかしながら、現在、日本では  $\bar{h}\Sigma g$  に対する林分形数は収穫表より知られるが、 $\Sigma gh$  に対するものは知られていない。したがって、STRAND 法は用いることができないし、ビッターリッヒ法でも材積を推定しようとするれば、直径、樹高を測定し、 $fh$  表 (=  $v/g$  表) により材積を求めなければならない。L1 法も同様直径、樹高の測定をし、形状断面表 ( $fg$  表、 $v/h$  表) により材積を求めなければならないが、 $fg$

表は  $fh$  表に比べ、同一樹高階では、その値の変化がきわめて少ないので、直径は測らなければならないが、樹高は樹種や直径によってはほとんど測る必要なく、また目測樹高でも推定材積にはほとんど影響しないという利点を L1 法はもっている(周知のように、森林調査では、樹高測定が労力、時間をきわめて多く要するので、樹高測定の簡略化は調査上きわめて重要である)。また現地での調査においても、線の設定は短い時間ですみ、カウントは大部分が目測が可能である。さらに  $v/h$  表は  $v/g$  表より計算も容易で簡単に材積表から作れる(Appendix 1, 2, 3 参照)。このようなことを考慮すれば、L1 法は、材積推定だけを目的とした場合はビッターリッヒ法に勝るものと思われる。

最後にプロットサンプリングとプロットレスサンプリングについて総合的に検討してみよう。森林調査においては、プロットサンプリングでは、周囲測量に多くの時間を要し、しかも、長方形のプロットでは、しばしば周測して、界線が閉じない場合も生じたりするので、長方形のプロットより精度は落ちるが、円形プロットを採用する国が、アメリカ合衆国、西ドイツ、東ドイツ、オーストリアとしいだいに多くなってきている。しかし、この円形プロットも、上記の諸国のように地形一様で傾斜の少ない国ならば、現地におけるプロットの設定も容易であろうが、日本のように、地形の変化の多い傾斜も区々な国では、プロットの設定が容易でなく、普通中心より 4~8 方向にメートル縄を伸ばして設定しているので、設定の労力、時間は長方形プロットほどではないにしても無視できない。この点プロットレス法はきわめて便利であり、精度も決してプロット法に比し悪くはない。もちろん、このプロットレス法は地床状態により実行できない個所もあるので、そのような場合は円形プロット法をとらざるを得ないだろう。プロットレス法として、前掲の理由より L1 法が差し当たり、最も良い方法と思われるが、将来、 $\Sigma gh$  に対する林分形数表が完成すれば STRAND 法、L1 法のいずれも用いられよう。なお、成長量の推定は、現在のところ、プロットレス法では確立した良い方法がないので、収穫表を利用するか、またはとくに成長量の推定を重視する場合は、プロットレス法とプロット法を重ねたダブルサンプリングを行なうことも考えられよう。

## む す び

1948年、BITTERLICH がいわゆるビッターリッヒ法と呼ばれるプロットレスサンプリングを確立して以来 20年の間にこの方法を応用して、断面積だけでなく、本数や材積を推定する諸方法が工夫され、個々に実用化されてきた。一方、同法を発展させたものとして、平田—ESSED 法、STRAND 法などが生まれた。とくにビッターリッヒ法は各国で研究され、実用化されたが、それとともに、諸種の問題が生じた。

筆者は、標本抽出調査理論の立場からプロットレスサンプリングのすべてに適用する一般理論を確立し、それより新たな L1 法、L2 法というプロットレスサンプリングの方法を考案し、一般理論より、ビッターリッヒ法、平田—ESSED 法、STRAND 法、L1 法、L2 法における  $ha$  あたりの材積、円柱体体積、断面積、本数などの不偏推定値、標本誤差の推定の方法を理論的に見出し、平均直径、平均樹高などの一致推定量を求める方法を与え、かつその標本誤差の計算方法を示した。これとともに、従来から問題となっていた林縁効果による偏りを除去する 3 種の方法を導き、立木断面内に抽出点がおちた場合無視することによる偏りは無視してよいことを証明した。また、拡大定数の大小と推定値の標本誤差との関係、群度と分散との関係、林分の因子が一定な場合の森林面積と相対分散との関係を理論上からも実例からも明らかにした。最後に従来のプロット法とプロットレス法を内外の実例により比較検討し、プロットレス法は従来いわれているように決してプロット法より精度が劣るものでなく、比較するプロットの大きさが妥

当でなかったことを指摘し、効率の面からはむしろプロットレス法が有利であるが、日本の地況、林床状態、林相などから調査者の適切な判断をまつことを要請した。

この報告に記載したことはほとんどが従来説明されておらず、また一部実行されていたものもあるが、標本調査理論から証明されていなかった。筆者は10年以上もこれらの問題につき研究中であったが、たまたま、1966年第1回の林業統計研究会のシンポジウムが京都で開催された折、一応取りまとめて講演し、その要約を統計数理研究所彙報14巻1号に、ついで1967年9月 IUFRO の第14回ミュンヘン大会の Proceedings に発表し、さらに今回第4章、第5章において一層理論的に追求し、事例もふやし、全体的に再検討し、取りまとめたものである<sup>84)118)</sup>。

### 要 約

この研究では標本理論の立場から、プロットレスサンプリングのすべての方法に通用する統一的な理論を作り、それに基づいて、従来から、論議されているプロットレスサンプリングにおける諸種の問題に説明を与え、かつ新たな2種のプロットレスサンプリングを提案し、プロットサンプリングとプロットレスサンプリングの比較検討を行なった。

“はじめ”において、1948年、W. BITTERLICH が、いわゆるビッターリッヒ法を発表して以来、世界各国にどのようにして普及していったかを略述し、平田-EsSED 法、STRAND 法への発展につき説明し、この研究の目的を述べた。

第1章においては、プロットレスサンプリングに総称されるビッターリッヒ法、平田-EsSED 法、STRAND 法についてその内容を紹介するとともに、考案者のそれぞれの方法に対する証明および他の人による証明を紹介した。ここではとくに、BITTERLICH の1947年に発表した論文の内容を引用し、K. F. Stöhr の角度加算法、S. Spurr の点密度は初めはBITTERLICH が考え出したものであって、これに基づいて、1948年のビッターリッヒ法が生まれたことを述べた。ビッターリッヒ法の証明としては BITTERLICH 自身の証明、L. R. Groenbaugh、甲斐原一郎、H. D. S. Finch、木部 均と大友栄松らのそれぞれの証明を挙げた。平田-EsSED 法については平田の証明法を引用し、この平均樹高は二乗平均に基づく平均樹高（この証明は第3章で筆者の一般理論より行なっている）だから、算術平均樹高よりも平均して高い値を与えることを述べた。STRAND 法については、わかりやすい W. BITTERLICH の証明を紹介した。

第2章はこの研究の第一の核心をなすものである。筆者は面積  $A$  (m<sup>2</sup>) の林地にある  $N$  本の木に対し、形状は現地でその境界がわかればどんな形のものでよいが、その面積  $a_j$  ( $j=1, \dots, N$ ) が一定な領域を考え、さらにその領域内の各点は  $x_j/a_j$  の値をもつとした。 $x_j$  は木の直径、樹高、断面積、材積等何でもよいが、木数を問題にするときは  $x_j=1$  とする。 $N$  本の木に対し、このように  $N$  個の領域を考えると、ある地点は若干個の木の領域に囲まれる。その地点の値は関与する領域の点に与えられた値の和に相当する値をとるものと考え、その値を  $y_k$  とすると、

$$y_k = \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} x_j}{a_j} \dots\dots\dots (2.1)$$

( $\delta_{kj}$  は  $k$  地点が  $j$  番目の木の領域に含まれるときは1をとり、そうでないときは0をとるものとする。以下同様。)

全林地を、 $y_k$  が同じ値をとるような領域に分割し、その面積を  $\pi_i$  とすれば、 $y_k$  の抽出される確率は  $\pi_i/A$  となる。このように考えて (2.1) 式の期待値を計算すれば (2.4) 式に示すように  $(\sum_{j=1}^N x_j)/A$  とな

り、 $y_k$  は  $x$  の単位面積あたりの合計不偏推定値となることを証明した。したがって、ha あたりの合計を求めるには、10,000倍した (2.6) 式を用いればよい。ビッターリッヒ法の断面積定数 (BAF) は  $x_j = g_j$  の場合、すなわち  $10,000 g_j/a_j$  である。

(2.1) の分散は同様な考えの下に、

$$Var(y_k) = \frac{1}{A} \left\{ \frac{\sum_1^N x_j^2}{\sum_1^N a_j} + 2 \sum_{l < m}^N \frac{a_{lm} x_l x_m}{a_l a_m} - \frac{\left( \sum_1^N x_j \right)^2}{A} \right\} \dots\dots\dots (2.13)$$

となることを証明した (ただし  $a_{lm}$  は  $l$  木と  $m$  木の領域の交わりの面積)。この証明法としては、J. CORNFIELD の方法によってもよく、同一の結果 (2.23) 式が得られることを示した。上述から判明するように、ここでは無限母集団からの点抽出を考えているので、 $n$  点とった場合の平均値の分散の推定値は普通の統計理論により容易に求められる。なお、本数の推定については、逆数の平均を求める形になるから、逆数の算術平均は算術平均値の逆数より大であることを証明し、括約した直径を用いる場合の従来の BITTERLICH の木数計算表を修正し、四捨五入の場合 (2.26 式)、切捨て法の場合 (2.27 式) の木数表 (Table 3) を示し、平田—ESSED 法の場合にも本数計算が可能であることを示し、樹高階別本数表 (2.28 式、Table 5) を作製した。

平均樹高、平均直径の推定法としては、原点を通る回帰の場合、比の推定法として考えられる 3 種の場合 (分子の分散が分母に比例する場合、分母の 2 乗に比例する場合、コンスタントの場合) と、J. E. KERRICH の方法の 4 種について検討し、Table 6 の実例と Table 8 のモデルの計算から、KERRICH の方法が最も mean squares error が小さいことを示したが、普通広く用いられる比推定法で十分実用にたえることを述べ、さらに天城国有林における実験結果を Table 9 に示し、Fig. 13~26 に 4 種の方法の検討のための図を掲げた。

ビッターリッヒ法における断面積と材積の推定、母分散の式、母分散の推定法については、標本調査理論の立場から PALLEY と HORWITZ の研究がある。両者の研究の結果は、筆者の一般理論の特種な場合であることを証明した。なお筆者が、無限母集団からのサンプリングを考え、同じ値をもつ部分集合に分割し、その上で確率測度を考えて証明したのに対し、かれらは初めから、材積や断面積の推定式を提示し、 $L/K^2$  を断面積定数として分離して証明しており、その証明の手法に差のあることを示した。

第 3 章においては、筆者によるプロットレスサンプリングの一般理論を従来のビッターリッヒ法、平田—ESSED 法、STRAND 法へ適用し、さらに L1 法、L2 法を提案した。ビッターリッヒ法は水平的な検視角を  $2\alpha$  とすれば、一般理論の  $a_j = g_j \operatorname{cosec}^2 \alpha$  という特別な場合で、いわゆる断面積定数は  $\sin^2 \alpha \times 10,000$  で、(2.13) 式の  $a_{lm}$  は  $l$  木と  $m$  木の拡大の半径を  $r$ 、 $R$  とし、その中心間の距離を  $d$  とすれば、

$$a_{lm} = r^2 \cos^{-1} \frac{d^2 + r^2 - R^2}{2dr} + R^2 \cos^{-1} \frac{d^2 - r^2 + R^2}{2dR} - \frac{1}{2} \sqrt{2(d^2 r^2 + d^2 R^2 + r^2 R^2) - (d^4 + r^4 + R^4)} \dots\dots\dots (3. 1)$$

となる。

この実例として、高萩と天城の例をあげ、毎木調査値と比較検討した。両例ともによく適合するが、対象面積の狭小による林縁効果の偏りのため過小推定となった (Table 10, 11 参照)。さらにビッターリッヒ法における本数、断面積、材積、円柱体積、平均樹高、平均直径の推定式を、(3.3) から (3.9) までの

式にまとめて、記載した。

平田-EsSED 法は平均樹高を推定する方法として発表されているが、この方法は検視角を  $\beta$  とするとき (2.1) 式の  $a_j = \pi h_j^2 \cot^2 \beta$  となる場合で、平田-EsSED 法の平均樹高は樹高の二乗和を平均し、開平した樹高であることを証明し、この分散の推定式を求め、実例を示した。なお、一般理論から平田-EsSED 法でも二乗平均樹高のみならず、ビッターリッヒ法同様すべての林分因子が求められ、その推定式として、(3.16)～(3.23) 式を示し、分散の計算法を示した。

STRAND の  $\Sigma gh$  の推定法は (2.1) 式で  $a_j = (5\pi h_j)/2$  となる場合で、 $\Sigma g$  の推定法は (2.1) 式で  $a_j = (5\pi d_j)/2$  となる場合であり、その証明を行ない、なお、 $\Sigma gh - \bar{h}\Sigma g > 0$  であることから、収穫表などから計算した林分形数を用いると、STRAND 法の材積推定は過大になることを実例によっても示した。また、STRAND の平均樹高は LOREY の平均樹高となることを証明し、STRAND 法の調査の2例を示した。

さらに、STRAND 法を一般理論から検討し、L1法とL2法を新たに提案した。この2方法はSTRAND法の線分の長さ  $5\pi m$  でなく、任意の一定長とし、L1法の検視角としてはSTRANDの定角  $\cot \beta = 1/2$  をとり、器具としては平田のコノメーターを若干修正して用い、L2法は線分上で、ビッターリッヒ法を歩きながら行なうものである。(2.1) 式の  $a_j$  はL1法では  $1/2 h_j l (m^2)$ 、L2法では  $a_j$  は、 $d_j l / 200 \operatorname{cosec} \alpha (m^2)$  となり、一般理論がそのまま適用でき、林分因子の各種推定式を(3.36)～(3.41)、(3.42)～(3.47) 式として示し、L1法の場合の線長 ( $l$ )、定角 ( $\beta$ ) に応じた乗数をTable 15、L2法の場合は、線長と断面積定数に応じた乗数をTable 15とTable 17に掲げ、本数計算表もそれぞれ、Table 16、18に示した。次にこれらのプロットレスサンプリングの比較検討を天城のスギ林、高萩のアカマツ林について行なった。林分形数による材積推定法としてはビッターリッヒ法とSTRAND法の優劣はきめ難いが直径測定だけで足りるSTRAND法がやや勝るように思われる。L1法とL2法との比較はL1法が勝る。現在  $\Sigma gh$  に対する林分形数表ができていないことやあらゆる因子を求めることができることなどの理由から、点抽出法の代表としてビッターリッヒ法、線抽出法の代表としてL1法を取りあげて、さらに同例により比較検討したところ、高萩ではビッターリッヒ法が勝り (Table 20, 21)、天城ではL1法の東西線 (Table 22～24) が逆に良い結果を示した。最後に収穫表を用いて、ビッターリッヒ法、L1法のデータから材積推定する方法を実例により示し、その結果はビッターリッヒ法によるものとL1法によるものとあまり違わなかった。これらの材積計算の基礎となった  $fh$  表、 $fg$  表、 $v/d$  表はAppendex 1, 2, 3として添付した。

第4章においてはプロットレスサンプリングにおける諸問題について解明を与えた。最も問題となっていた林縁効果による偏り (slopover bias) については2つの修正法を提示し、実例を示した。第1のア)法は拡大円として木と林縁までの距離を半径とする円の面積を、(2.1) 式の  $a_j$  とするもので、第2のイ)法は拡大された領域の林内の面積を  $a_j$  とするもので、どちらの方法でも不偏推定値が得られる。

ビッターリッヒ法ではこの両法が適用できるが、ア)法はイ)法より現場での実行が容易だが、分散がより大きいという短所があるが、広地域での調査ではア)法の方がより有効と思われる。木の直径と距離に応じた断面積定数表をAppendex 4として記載した。また、イ)法では林地内の拡大円を計算するための公式を、境界が拡大円を1線で切る場合、2線で切る場合にわけて(4.1)、(4.2)、(4.3)、(4.4)、(4.5) 式であたえた。無修正の場合とア)法、イ)法による修正した結果を比較したところ、修正結果はきわめて良好であった (Table 28)。なお、従来発表された slopover bias の修正法として、増山、北村、芳賀と前沢、GROSENBAUGH、BARRET、BEERSの方法を紹介し批判した。このうち、BEERSの方法には誤りがあ

る。GROSENBAUGHの方法は筆者の方法と同様(2.1)式の $a_j$ を調査に便利のように変えるものであるが、他の方法はすべて $a_j$ を変えない方法をとっているもので、したがって断面積定数は変わらない。線抽出法ではイ)法またはGROSENBAUGHによる修正法があるが、線分の一部が林外にとび出しただけのときはとび出した線長に等しい部分だけ折返し調査すればよい。

拡大定数の変化にともない、母分散は変化するが、線、点いずれの抽出法でも、木に与える領域が大きいくほど、分散が小さくなることを理論的に証明し(4.12, 4.15, 4.16式)、天城スギ林やE. PFLÜGBEILの実例をあげ、さらに4木の木のモデルにより、ビッターリッヒ法では断面積定数1, 4, 16, 32, L1法では線長を20, 15, 10mとし、その母分散を計算し、実証した(Table 36, 37)。なお、L1法では片側検視20mは両側検視10mよりやや精度はよい。さらに、sloper biasのある場合のビッターリッヒ法、L1法のア)法やイ)法による修正した場合の分散をも検討し、上述の結論が正しいことを確かめた。

同じ広さの林地に、林木がこみあって成立しているか、一樣に成立しているか、すなわち、精度は分散にどのように影響するかというと、一樣に成立していれば分散は小さい。このことを、(4.17)式をもととし、理論的に証明し、さらに、4木の木のモデルを取り、その位置を1/3, 2/3ずつ近づけた場合の分散を、ビッターリッヒ法、L1法につき計算し、実証した(Table 43~47)。

次に同一の構造を有する森林の成立する面積が大きくなると、分散は小になるが、相対分散は大きくなることも分散式から理論的に示し、その実証を4木の木のモデルにより与えた(Table 48~51)。

最後に、点抽出法で立木幹断面内に抽出点がおち、それを無規した場合の偏りの平均を計算し、(4.21)式を求め、それが実際上問題にならないことを示した。

第5章においてはプロットサンプリングとプロットレスサンプリングの比較につき取り扱った。初めに、重複抽出による円形プロット法はプロットレスサンプリングで、拡大円の面積が同一であるという特別な場合と考えられることを示し、その推定式、母分散の公式を示した。次にプロットサンプリングとプロットレスサンプリングの代表としてビッターリッヒ法を取りあげ、精度、効率の面から検討すると、ビッターリッヒ法は断面積に比例する確率抽出であり、断面積は直径、樹高、材積に相関があるので、これらの推定には円形プロット法より精度も効率も高いと思われるが、(5.3)と(5.4)の分散式を比較した場合、 $a_{lm}$ が樹間距離、木の直径、拡大円の大きさに関係すること、(5.3)式の第2項のcross productの和が各円内にとどまるに反し、(5.4)式の第2項のcross productの和は制限がないことなどにより、一概にビッターリッヒ法が精度がよいとはいえない。そこで、太田原国有林、吉無田国有林の高田の実験、アメリカ合衆国のC. L. KIRBY、同じくGROSENBAUGHとSTOVER、カナダのR. H. KENDALLとSAYN-WITGENSTEIN、アメリカ合衆国のM. AFANASIEV、インドのV. J. CHACKOほか2名、フィンランドのY. VUOKILAらの実験例をあげた(Table 52~56)。かれらの結論するところは、ビッターリッヒ法は精度はやや劣るが、調査に時間、労力が少なくすむから効率の面では円形プロット法に勝るといふことである。しかし、かれらの採用した円形プロット面積は対応する断面積定数よりはるかに大きいものが多いので、比較することは妥当でない。そこで、筆者らの実験した太田原のスギ、ヒノキ林はちょうど両者が対応するので、それを検討したところ、ビッターリッヒ法が必ずしも精度が劣るとはいえないことがわかった。したがって、プロットレスサンプリングは、大面積の森林調査では時間、労力、費用の節約ができ、しかも精度もほぼ対応する大きさの円形プロットに匹敵する効率の高い調査法といえよう。しかし、境界の状態にもよるが、ほぼ5ha以下の林分ではsloper biasを生じ、その修正を必要とするから、あま

り好ましくはない。ただし、10 ha くらい以上の林では slopover bias は、はいても修正しなくとも、修正値とほとんど差はないので (Table 52), 10 ha 以上の林ではプロットレスサンプリングはきわめて有効な調査法といえよう。

結言すれば、この研究は、プロットレスサンプリングについての統一的な理論を樹立し、母分散式を誘導し、従来の未解決のいくつかの問題を解決し、新たな諸知見を提示した。Appendex として関東地方におけるスギ、ヒノキ、アカマツ、広葉樹などの  $fg$  表、 $fh$  表、 $v/d$  表、slopover bias の修正のためにア) 法を用いるときの計算早見表を付した。

### 謝 辞

撰筆するにあたり、当初の原稿を閲読され、とくに母分散などの J. CORNFIELD の証明法による結果と筆者の証明結果の一致することを指摘された上智大学齋藤金一郎教授、種々ご教示をいただいた都立大学本部 均教授、本論文を完成するにあたって種々ご支援を賜わった九州大学井上由扶教授、木梨謙吉教授、林業試験場原 敬造経営部長、大内 晃経営第1科長、西沢正久測定研究室長、中島航測研究室長はじめ、現地調査、資料の収集計算に協力していただいた測定、航測両研究室の各位、ならびに林試四国支場都築 経営研究室長、九州支場粟屋経営研究室長、とくに、この報告の諸実例の計算の大部分を行なっていた樋渡ミヨ子技官、一部の計算を担当していただいた葉袋技官、原稿を浄書していただいた椎林技官、その他逐一記載を略するが、現地営林局署の方々など、このほかご援助をいただいた各位、これらの方々に対し、衷心より感謝の意を表する次第である (1968年3月)。

### 文 献

- 1) AFANASIEV, M.: The Bitterlich method of cruising—Why does it work?. Jour. Forestry, 55, 216~217, (1957)
- 2) —————: Some results of the use of the Bitterlich method of cruising in an even-aged stand of long-leaf pine. Jour. Forestry, 56, 341~343, (1958)
- 3) AVERY, T. E.: Gross volume estimation using "Plotless cruising" in southeast Arkansas. Jour. Forestry, 53, 206~207, (1955)
- 4) BARRET, J. P.: Correction for edge effect bias in point-sampling. Forest Sci., 10, 52~65, (1964)
- 5) BARTLETT, M. S.: Fitting a straight line when both variables are subject to error. Biometrics, 5, 207~212, (1949)
- 6) BAUMANN, H.: Rationelle Stichprobenverfahren in der Forsteinrichtung. Allg. Forst- u. Jagdztg., 126, 11~22, (1955)
- 7) BEALE, E. M. L.: Same use of computers in operational research. Industrielle organization, 31, 27~28, (1962)
- 8) BEERS, T. W.: The direct correction for boundary-line slopover in horizontal point sampling. Purdue Univ. Research Progress Report 224, 8 pp., (1966)
- 9) BITTERLICH, W.: Die Winkelzählmessung. Allg. Forst- u. Holzwirtschaft., 58, 94~96, (1947)
- 10) —————: Die Winkelzählprobe. Allg. Forst- u. Holzwirtschaft., 59, 4~5, (1948)
- 11) —————: Das Relaskop. Allg. Forst- u. Holzwirtschaft., 60, 41~42, (1949)
- 12) —————: Die Winkelzählprobe. Zbl. ges. Forst- u. Holzw., 71., 191~205, (1951)

- 13) ————— : Die Winkelzählprobe. Forstwiss. Zbl., 71, 215~225, (1952)
- 14) ————— : Das Spiegel-Relaskop. Osterr. Forst- u. Holzwirtschaft., 7, 1, Jan. (1952)
- 15) ————— : Neues vom Spiegelrelaskop. Holz-kur., 10, (1955)
- 16) ————— : Die Weiterentwicklung der optischen Zählmessung in der Bestandesaufnahme. Allg. Forstztg., 66, 185~186, (1955)
- 17) ————— : Das neue Relaskop. Allg. Forstztg., 69, 259~299, (1958)
- 18) ————— : Relaskoptechnik. Centbl. f.d. Ges. Forstw., 76, 1~35, (1959)
- 19) ————— : Die Entwicklung der Winkelzählprobe. Archiv f. Forstw., 9, 136~148, (1960)
- 20) ————— : Vorteile der variablen Probekreistechnik. Allg. Forstztg., 70, 121~123, (1960)
- 21) ————— : Relaskopische Probeflächen nach Strand. Allg. Forstztg., 72, (1961)
- 22) ————— : Relaskop mit Breitskala. Allg. Forstztg., 73, 62~65, (1962)
- 23) ————— : Anwendung und Weiterentwicklung der Winkelzählprobe. Allg. Forstztg., 78, 11~13, (1967)
- 24) BRUCE, D.: Prism cruising. Portland, Oregon, 61 pp., (1961)
- 25) CAROW, J.: Bitterlich's method of direct basal area estimation. Mich. Acad. Sci., Arts, and Let. Papers 28, 125~132, (1952)
- 26) CHACKO, V. J., A. S. RAWAT and G. S. NEGI : A point sampling trial with prisms at New Forest. Ind. For., 90, 348~359, (1964)
- 27) COCHRAN, W. G.: Sampling techniques. John Wiley, 413 pp., (1963)
- 28) CORNFIELD, J.: On samples from finite populations. Jour. Amer. Stat. Assoc., 39, 236~239, (1944)
- 29) CROMER, D. A. N.: Basal area per acre. Austral. Forester., 16, 57~61, (1952)
- 30) DEMING, W. E.: Sample design in business research. John Wiley, 517 pp. (1960)
- 31) DES RAJ, : Ratio estimation in sampling with equal and unequal probabilities. J. Indian Soc. Agric. Statist., 6, 127~138, (1954)
- 32) ————— : A note on the variance of the ratio estimate. J. Amer. Statist. Ass., 59, 895~898, (1964)
- 33) DILWORTH BELL.: Variable plot cruising. Oregon, 48 pp., (1961)
- 34) DURBIN, J.: A note on the application of Quenouillé method of bias reduction to the estimation of bias. Biometrika, 46, 477~480, (1959)
- 35) ESSED, F. E.: Estimation of standing timber. H. Veenman & Zonen, 60 pp., (1957)
- 36) FERGUSON, J. H. A.: Optische grondvlakbepaling volgens de method Bitterlich. Tectona, DI, x LI, 56~62, (1951)
- 37) FINCH, H. D. S.: Plotless enumeration with angle gauges. Forestry, 30, 173~192, (1957)
- 38) GOODMAN, L. A. and H. O. HARTLEY : The precision of unbiased ratio-type estimates. J. Amer. Statist. Ass., 57, 491~508, (1958)
- 39) ————— : On the exact variance of products. J. Amer. Statist. Ass., 55, 708~713, (1960)
- 40) GROSENBAUGH, L. R.: Plotless timber estimates... new, fast, easy. Jour. Forestry, 50, 32~37, (1952)
- 41) ————— : Point-sampling and line-sampling. South. Forest Expt. Sta. Occas. Paper 160, 34 pp., (1958)

- 42) ————— and W. S. STOVER : Point-sampling compared with plot-sampling in southeast Texas. *Forest Sci.*, 3, 2~14, (1957)
- 43) GÜDE, H. : Anleitung zur Aufnahme von Bitterlichproben. *Allg. Forstztg.*, 66, 306~308, (1955)
- 44) HAGA, T. and K. MAEZAWA : Bias due to edge effect in using the Bitterlich method. *Forest Sci.*, 5, 370~376, (1959)
- 45) HANSEN, M. H., W. N. HURWITZ and W. G. MADOW : Sample survey methods and theory, Vol. II, John Wiley, 332 pp., (1953)
- 46) HARTLEY, H. O. and A. ROSS : Unbiased ratio estimates. *Nature*, 174, 270~271, (1954)
- 47) 平田種男 : Bitterlich 法による樹高の推定, *日林誌*, 37, 11, 479~480, (1955)
- 48) ——— : Bitterlich 法と調和平均, *東大演習林*, 11, 9~14, (1956)
- 49) ——— : 光学的なコノメーター, *日林誌*, 41, 5, 178~179, (1959)
- 50) ——— : 定角測定法の研究, *東大演報*, 56, 1~76, (1962)
- 51) HUNT, E. V., R. D. BAKER and L. A. BISKAMP : Point-sampling from two angles. *Stephan F. Austin Sta. College Bull.* 6. 81 pp., (1964)
- 52) HUSH, B. : Results of an investigation of the variable plot method of cruising. *Jour. Forestry*, 53, 570~574, (1955)
- 53) ————— : Comments on the variable plot method of cruising. *Jour. Forestry*, 54, p. 41, (1956)
- 54) ————— : Forest mensuration and statistics. *Ronald*, 154~175, (1963)
- 55) 甲斐原一郎 : 新しい森林蓄積の調査法—積分幾何学の標本調査法への適用, *農業統計研究*, 1, 1, 16~36, (1955)
- 56) KEEN, E. A. : The relaskop. *Empire Forestry Rev.*, 29, 253~264, (1950)
- 57) KENDALL, R.H. and L. SAYN-WITTGENSTEIN. : An evaluation of the relaskop. *Canada Dept. of Northern Affairs and Natural Resources. Forest Research Div. Tech. Note*, 77, 26 pp., (1959)
- 58) KENDALL, M. G. and A. STUART. : The advanced theory of statistics. 1. Charle Griffin.
- 59) KERRICH, J. E. : Fitting the line  $y=ax$  when errors of observation are present in both variables. *Amer. Statist.*, 20, 1, p. 2, (1966)
- 60) 木梨謙吉 : 新しい林分材積測定法, *林業経済*, 5, 5, 28~31, (1952)
- 61) KINASHI, K., M. NISHIZAWA and T. KITAGAWA : New developments of sampling designs in forest inventories. *Bull. Kyushu Univ. For.*, 35, 1~84, (1962)
- 62) 北村昌美 : 林分境界による Bitterlich 法の偏りの補正について, 第 71 回日林講, 84~86, (1961)
- 63) KIRBY, C. L. : Accuracy of point sampling in white spruce-aspen stands of Saskatchewan. *Jour. Forestry*, 63, 924~926, (1965)
- 64) KOOP, J. C. : A note on the bias of the ratio estimate. *Internati. Statist. Conf.*, 141~146, (1951)
- 65) 航測研究会 : 測定し易い新しい測樹器 Dendrometer, *林業技術*, 281, 26~30, (1965)
- 66) 黒川忠雄 : タンジェントメーターについて, *林業技術*, 239, 7~10, (1962)
- 67) MASUYAMA, M. : A rapid method of estimating basal area in timber survey. *Sankhya*, 12, 291~302. (1953)
- 68) MATERN, B. : On the geometry of the cross-section of a stem. *Medd. Stogsforskn Inst.*, 46, 11, 1~28, (1965)
- 69) ————— : Some applications of the theory of geometric probabilities. *Uppsatser*

- fran Statens skogsforskningsinstitut, Nr., 72, 453~458, (1959)
- 70) MICKEY, M. R. : Some finite population unbiased ratio and regression estimators. J. Amer. Statist. Ass., 54, 594~612, (1959)
- 71) MÜLLER, G. : Das Baumzahlrohr. Allg. Forstztg., 64, 249~251, (1953)
- 72) MUNRO, D. D. : Some personal errors in point sampling. Forest Chronicle, 42, 407~413, (1966)
- 73) MURTY, M. N. and N. S. NANJAMMA : Almost unbiased ratio estimates based on interpenetrating subsample estimates. Sankhya, 23 (B), 381~392, (1961)
- 74) MURTHY, V. N. and C. S. PILLAI : A note on the expectation of the reciprocal and square root of a random variable. Amer. Statistician, 20, 5, p. 30, (1966)
- 75) 南雲秀次郎 : WZP 面における測定不能面による Bias, 日林誌, 48, p. 36, (1966)
- 76) 西沢正久・川端幸蔵 : ポイントサンプリングの利用について—カラマツ調査の一例, 第 73 回日林講, 56~59, (1962)
- 77) ———— : 角度測定法の応用について, 統計数理研究所彙報, 14, 1, 29~46, (1966)
- 78) NYVSSÖNEN, A. : Metsicön kuutiomäärän arvioiminen relaskoopin avulla. Comm. Inst. For. Fenniae, 44, 6, 1~31, (1955)
- 79) OLKIN, I. : Multivariate ratio estimation for finite populations. Biometrika, 45, 154~165, (1958)
- 80) OSUMI, S. : Distribution of Bitterlich's count and its application in testing homogeneity of stand structure. 日林誌, 45, 283~288, (1963)
- 81) 大隅真一 : ビッターリッヒ法に関する研究, 京都府大学報農学, 16, 42~87, (1964)
- 82) 大友栄松 : ビッテルリッヒ法について (1), 林試研報, 122, 145~153, (1960)
- 83) 大友栄松・西沢正久ら : ビッテルリッヒ法について (2), 林試研報, 122, 155~168, (1960)
- 84) 大友栄松 : プロットレスサンプリング, 統計数理研究所, 73 pp., (1966)
- 85) ———— : 角度測定法に関する研究, 統計数理研究所彙報, 14, 1, 1~15, (1966)
- 86) PALLEY, M. N. and L. G. HORWITZ : Properties of some random and systematic point sampling estimators. Forest Sci., 7, 52~65, (1961)
- 87) ———— and W. G. O. REGAN : A computer technique for the study of forest sampling method and point sampling compared with line sampling. Forest Sci., 7, 3, 282~294, (1961)
- 88) PASCUL, J. N. : Unbiased ratio estimators in stratified sampling. J. Amer. Statist. Ass., 56, 70~87, (1961)
- 89) PFLÜGBEIL, : Versuch über die Verwendung verschiedener Zählfaktoren zur Ermittlung der relativen Bestandeskreisfläche nach dem Verfahren der Winkelzählprobe von Bitterlich. Cbl. ges. Forstwesen, 81, 24~40, (1964)
- 90) PRODAN, M. : Genauigkeit der Winkelzählprobe nach Bitterlich. Allg. Forstztg., 64, 96~100, (1953)
- 91) ———— : Holzmess Lehre. J. D. Sauerländer, 310~357, (1965)
- 92) QUENOUILLE, M. H. : Notes on bias in estimation. Biometrika, 43, 353~360, (1956)
- 93) RAO, J. N. K. : The precision of Mickey's unbiased estimator. Biometrika, 54, 321~324, (1967)
- 94) RAO, T. J. : On unbiased ratio estimators. J. Indian Stat. Inst., 117~121, (1966)
- 95) ROBSON, D. S. : Applications of multivariate polykays to the theory of unbiased ratio-type estimation. J. Amer. Statist. Ass., 52, 511~521, (1957)

- 96) SAITO, K.: Theoretical consideration on the use of supplementary information sample survey designs. *Sophia Economic Review*, 4, 2, 5, 1, 6, 1, (1958~1959)
- 97) SASTRY, K. V. R.: Unbiased ratio estimators. *J. Indian Soc. Agric. Statist.*, 19~29, (1965)
- 98) 扇田正二・前沢完次郎: Bitterlich 法による林分胸高断面積測定装置について, *東大演習林*, 10, 69~76, (1955)
- 99) SPURR, S. H.: A measure of point density. *Forest Sci.*, 8, 85~96, (1962)
- 100) STAGE, A. R.: An aid for comparing variable plot radius with fixed plot radius designs. *Jour. Forestry*, 56, p. 593, (1958)
- 101) STÖHR, K. F.: Ein Vorschlag zur Erreichung einer höheren Genauigkeit bei Probeflächenaufnahme nach der Winkelzählprobe. *Allg. Forst- u. Jagdztg.*, 130, 23~29, (1959)
- 102) STRAND, L.: "Relaskopisk" hoyde-og kubikk massebestmmelese. *Norsk Skogbruk*, 3, 535~538, (1957)
- 103) ———: Sampling for volume along a line. *Det Norske Skogforsksvesen*, Nr. 51, pp. 327~331, (1958)
- 104) SUKHATME, : Sampling theory of surveys with applications. *Indian Society of Agric. Stat.*, pp. 491, (1953)
- 105) 高田和彦: 角度測定法の誤差について (1) 水平方向の測定, *森林計画会報*, 67, 4~8, (1959)
- 106) ———: 胸高断面積による材積推定の研究 (10) 吉無田国有林における plot sampling と plotless sampling の比較, *日林誌*, 41, 45~57, (1959)
- 107) ———: 定角測定法による林積推定法の研究, *新潟大演報*, 1, 1~50, (1962)
- 108) ———: Systematic Forest における Bitterlich 法の Bias. *新潟大, 農林研究*, 18, 95~101, (1966)
- 109) TIX, M.: Comparison of some ratio estimators. *J. Amer. Statist. Ass.*, 60, 294~307, (1965)
- 110) TRUNER, M. E.: Straight line regression through the origin. *Biometrics*, 16, 483~485, (1960)
- 111) UNTERDÖRFER, C.: Die Bestandesstanzahl nach der Winkelzählprobe. *Allg. Forst- u. Jagdztg.*, 126, 176~179, (1955)
- 112) VUOKILA, Y. : On the accuracy of the relascope method of cruising. *Comm. Inst. Fenniae*, 514, 62 pp. (1959)
- 113) WANNER, J.: Die Schnellkreisprobefläche. *Allg. Forst- u. Holzwirt. Ztg.*, 57, 68~70, (1946)
- 114) WANNER, J.: Die Probefläche ohne Probefläche. *Allg. Forst- u. Holzwirt. Ztg.*, 59, 97~98, (1948)
- 115) WEST-NIELSEN, G.: En grundflademaler. *Hedeselsk. Tidsskr*, 73, 271~274, (1952)
- 116) 山田茂夫: 簡易林分材積測定法, *林業調査会*, 123, (1960)
- 117) YATES, F.: Sampling methods for censuses and surveys. *Charles Griffin*, 440, (1960)
- 118) OHTOMO, E: Researches on the Angle-Count Method based upon the Sampling Theory; *Proceedings of 14th IUFRO congress*, Part, 6, 439~456, (1967)

**Theoretical Research on Plotless Sampling Methods  
in Forest Survey**

Eishoh OHTOMO<sup>(1)</sup>

Summary

In this research the author has formed a unified theory from the angle of sampling theory, which holds good on all kinds of methods of plotless sampling. He has undertaken to make clear various problems of plotless sampling that have been under discussion, and to compare plotless sampling with plot sampling and, besides, has proposed two new methods for plotless sampling.

In the introduction, the purpose of the research is stated, followed by an outline describing how plotless sampling is gradually being popularized all over the world since the so-called BITTERLICH'S method was announced in 1948 by W. BITTERLICH, and explaining the development into HIRATA-ESSED'S method and STRAND'S method.

In Chapter 1, the author introduces not only the details of plotless sampling including BITTERLICH'S method, HIRATA-ESSED'S method and STRAND'S method, but also the proof of each method by each originator and the others. Especially, in this chapter, mention is made of the angle-summation method by K. F. STÖHR and the fact that BITTERLICH'S method appeared in 1948 by developing the point density method proposed by S. SPURR which was thought out by BITTERLICH himself at first, borrowing from a paper published in 1947 by BITTERLICH. For the proof of BITTERLICH'S method, the following enumeration is given: the proofs by BITTERLICH himself; L. R. GROSENBAUGH; I. KAIBARA; H. D. S. FINCH; K. HONDA and E. OHTOMO. As to HIRATA-ESSED'S method, the proof by HIRATA himself is explained, and the estimated value of the tree height mean by this method appears the mean square proved in Chapter 3 by the author's general theory. As to STRAND'S method, the proof by BITTERLICH is introduced.

Chapter 2 forms the genesis of this research. Let us assume that as stand area  $a$ , ( $j=1, \dots, N$ ) shows some defined domain and each point in this domain has the value of  $\frac{x_j}{a_j}$  ( $j=1, \dots, N$ ) to  $N$  trees in the forest-stand having an area  $A$  ( $m^2$ ). In this case, trees of any shape will do if the boundary is clear in the field. By  $x$ , either one of the diameter of the tree, the height, the basal area or the tree volume is meant, but when concerned with tree number,  $x=1$ . As the result of considering  $N$  domains to  $N$  trees, one point on the stand is surrounded by a few domains concerned. Now  $y_k$  is considered to be equivalent to the sum of the values given to one point in the domains concerned, that is

$$y_k = \sum_{j=1}^N \frac{\delta_{kj} x_j}{a_j} \dots\dots\dots (2. 1)$$

( $\delta_{kj}$  is 1 when the  $k$ -th point is included in the domain which includes the  $j$ -th tree. If not,  $\delta_{kj}=0$ . And so forth.)

If the whole forest area is divided into domains where each  $y_k$  is equal and its area is  $\pi_a$ , the probability of  $y_k$  to be selected is  $\pi_a/A$ . From this it follows that the expected value

of the estimator in Formula (2. 1) becomes  $\frac{\sum_1^N x_j}{A}$  shown as Formula (2. 4), so  $y_k$  becomes

Received July, 6, 1971

(1) Forest Management Division

an unbiased estimator of sum of values of  $x$  per unit area. Therefore, Formula (2. 6) multiplied by 10,000 is used for the total value per hectare. When  $x=g$ , the basal area factor (B A F) is 10,000  $g_j/a_j$  in BITTERLICH'S method.

The variance of Formula (2. 1) is as follows:

$$\text{Var} (y_k) = \frac{1}{A} \left\{ \sum_1^N \frac{x_j^2}{a_j} + 2 \sum_{l < m}^N \frac{a_{lm}x_l x_m}{a_l a_m} - \frac{\left( \sum_1^N x_j \right)^2}{A} \right\} \dots\dots\dots (2.13)$$

( $a_{lm}$  is the area of the intersectional part of two domains of  $l$  tree and  $m$  tree.)

As proof of this, the method by CORNFIELD also produces the same result, Formula (2. 23). Hereupon, the estimate of variance of mean is easily calculated by using a general statistical theory as sampling from infinite population is considered. In order to estimate tree number, however, the mean of inverse number should be calculated, so proof is given that the arithmetic mean of inverse number is usually larger than the inverse number of arithmetic mean, first; and then the author modifies a calculation table of tree number published by BITTERLICH in the case of rounded values of tree diameters, and makes out a calculation table of tree number (Table 3), in both cases counting fractions of 1 cm and over as a whole number, and excluding those of less in Formula (2. 26), and of rounding downwards to the nearest even cm in Formula (2. 27). Moreover, as is proved, it is possible to calculate tree number in HIRATA-ESSED'S method and also make out a table of calculation of tree number by tree height (Formula 2. 28, Table 5).

Regarding the estimation method for average height and average diameter, the author examines three kinds of cases to be considered by the regression method where a regression line passes through the origin, namely, the ratio method (when variance of numerator is proportional to the value of denominator, and to the square of denominator, and when it is constant), and the logarithmic transformation method by J.E. KERRICH. Judging from the calculation of examples in Table 6 and models in Table 8, it is seen that mean squares error is least in the method by KERRICH, but the ratio method being in general use is fit enough for practical use. Furthermore, the result of experiment in Amagi national forest is shown in Table 9, and illustration for examinations of these four methods in Figure 13~26.

As to the estimation of total basal area and volume of a forest stand, the formula of population variance and the estimation of population variance, there is only one research reported by PALLEY and HORWITZ from an angle of theory of sampling survey. It is proved that the result of this research is applied to some specific case in the author's general theory. While he assumes that a whole stand area is divided into sub-sets where the same values are taken and probability measures on sub-sets are defined, and sampling is considered from an infinite population, they present the estimation formulae of stand-volume and basal area from the start taking  $L/K^2$  as basal area factor (B A F). Thus, there are some differences between their methods and the author's.

In chapter 3, the author applies his general theory of sampling to BITTERLICH'S method, HIRATA-ESSED'S method and STRAND'S method, and proposes two new methods by developing and improving STRAND'S method.

If a horizontal visual angle is  $2\alpha$  in BITTERLICH'S method, it corresponds to a special case in the general theory:  $a_j = g_j \text{cosec}^2\alpha$  and B A F is  $\sin^2\alpha \times 10,000$ . When radius of enlarged circle of  $l$ -tree and  $m$ -tree are  $r$  and  $R$ , and the distance between central points is:

$$a_{lm} = r^2 \text{COS}^{-1} \frac{d^2 + r^2 - R^2}{2dr} + R^2 \text{COS}^{-1} \frac{d^2 - r^2 + R^2}{2dR} - \frac{1}{2} \sqrt{2(d^2 r^2 + d^2 R^2 + r^2 R^2) - (d^4 + r^4 + R^4)} \dots (3. 1)$$

As examples, the forest stands in Takahagi and Amagi are described, examined, and a comparison of true values with estimated value made; but both stand areas are small, so the estimated values are smaller than the true values owing to the edge-effect, which happens often in forests having small areas (Cf. Table 10 & 11). In addition, the author completes the estimation formulae for tree number, stand basal area, stand volume, cylindrical volume of the stand, average tree height and average tree diameter in Formula (3. 3) to (3. 9).

HIRATA-ESSED's method is published as the method for estimation of average tree height, where visual angle is  $\beta$ , then average tree height becomes  $a_j = \pi h_j^2 \cot^2 \beta$  in Formula (2. 1). HIRATA-ESSED's height can be proved to be an extracted value of the square root of mean of squares, and the formulae for the estimation of variance are shown with examples. Through his general theory the author explains that it is possible to obtain not only the mean square value of tree height but also any kind of stand factors even in HIRATA-ESSED's method as in BITTERLICH's method, and shows the estimation formulae and how to calculate variance in Formula (3. 16) to (3. 23).

The estimation formula for  $\Sigma gh$  by STRAND is  $a_j = 5\pi h_j^2 / 2$  in Formula (2. 1) and that of  $\Sigma g$  is  $a_j = 5\pi d_j^2 / 2$  in Formula (2. 1). When applying stand form factor calculated by yield tables, the estimation of stand volumes by STRAND's method is over-estimated because  $\Sigma gh - \bar{h}\Sigma g > 0$ . Mean height by STRAND's method is equal to the LOREY's mean height and two examples of survey for STRAND's method are given. Further, the author examines STRAND's method through his general theory and proposes two new improved methods. In those two new methods, the length of a line is not  $5\pi m$  in STRAND's method, but an arbitrary length. In the 1st method of improved STRAND's method,  $\cot \beta = 1/2$  is considered as the visual angle as in STRAND's method, and "Conometer" invented by HIRATA is used as a utensil. In the 2nd method of improved STRAND's method, survey by BITTERLICH's method is done walking on a line.  $a_j$  is  $h_j l^2 / 2$  ( $m^2$ ) in the 1st method and  $d_j l \cdot \text{cosec} \alpha / 200$  ( $m^2$ ) in the 2nd method, so the general theory can be applied as it is. Various estimators for stand factors are shown in Formula (3. 36) to (3. 41), Formula (3. 42) to (3. 47). Multipliers which meet the length of line ( $l$ ) and fixed angle ( $\beta$ ) in the 1st method are shown in Table 15, and Table 15 and Table 16 for that which meet the length of a line and BAF in the 2nd method. The tables for calculation of tree number are also shown in Table 16 and Table 18.

Next to be examined and compared are the plotless sampling methods to *Cryptomeria* forest stand in Amagi and pine stand in Takahagi. There is little to choose between BITTERLICH's method and STRAND's method as the estimation method for stand volumes by stand form factor, but it seems that STRAND's method is somewhat preferable because only measurement of diameter is required. When comparing the 1st method of line sampling with the 2nd method, the 1st method is more than a match. As the result of examination in the same examples by adopting BITTERLICH's method as the most important method in point sampling, and the 1st method of improved STRAND's method as the most important method in line sampling, for the reason that there is no stand form factor table for  $\Sigma gh$  now, and all kinds of values of factors necessary for forest management planning can be calculated, BITTERLICH's method is superior in Takahagi (Table 20 & 21), and the 1st sampling of line set in direction of east and west has a good result, contrary to expectation in Amagi. At the end, another estimation method for stand volumes with the aid of yield tables is described, giving actual examples by data in BITTERLICH's method and the 1st method of line sampling. It results in little difference between BITTERLICH's method and

the 1st method. Table  $fh$ ,  $fg$  and  $v/d$  which are necessary for the estimation of stand volumes are given as Appendix 1, 2 and 3.

In Chapter 4, various problems in plotless sampling are treated. Regarding slopover bias caused by edge-effect which has been widely criticized, the author proposes two modification methods describing actual examples. In the first modification method, a-method, the area which diameter is a distance between tree and forest border is  $a_j$  in Formula (2. 1) as an enlarged circle, and in the 2nd method, b-method,  $a_j$  is the area of enlarged domain in the stand. Unbiased estimates can be calculated by either method.

In BITTERLICH's method, these two methods are applicable. a-method is practiced easier than b-method in the field, but a-method has the fault that variance is large. In surveying a large area, a-method seems more effective and a table of B A F is shown as Table 4 in accordance with the diameter and distance of tree. In b-method, the formulae for calculating enlarged circle within the stand edge are described in Formulae (4. 1), (4. 2), (4. 3), (4. 4) and (4. 5) in two cases: one is when enlarged circle is cut by one border line, and the other by two border lines. As the result of comparison among cases adjusted by a-method, b-method and case without adjustment, the results of the case with adjustment are very desirable (Table 28). The author introduces and criticizes methods by MASUYAMA, KITAMURA, HAGA-MAEZAWA, GROSENBAUGH, BARRET and BEERS as adjustment methods. Among those, the method by BEERS has some mistakes. In the method by GROSENBAUGH,  $a_j$  in Formula (2. 1) is changeable in order to make survey convenient as in the method by the author, but  $a_j$  is not changeable in other methods, so B A F is constant. In the 1st method of line sampling, a-method and GROSENBAUGH's method are applicable. In case that line protrudes the border of forest stand in line sampling, the part which corresponds to the length of protruded line segment is surveyed by turning back. Therefore, as a natural result, some trees are counted twice, and this should be taken into account as estimator redundancy. With the variation of B A F, population variance undergoes a change, and it is proved theoretically that variance becomes small as domain given to a tree becomes large in any point or line sampling..... Formula (4. 12), (4. 15) and (4. 16). By showing actual examples in Amagi forest and those by E. PFLÜGEBEL, and further, using four trees as models, the author calculates the population variance when B A F's are 1, 4, 16 and 32 in BITTERLICH's method, and when the lengths of lines are 20, 15 and 10m in the 1st method of line sampling (Table 36 & 37). In the 1st method, sampling of one side, 20m, is a little more precise than that of 10m both sides. On investigating variance of BITTERLICH's method having slopover bias, variance adjusted by a-method and b-method in the 1st method of line sampling verifies that the above conclusion is correct.

Regarding an influence of sociability on variance, it is small if trees grow uniformly compared with those that grow thick. The above-mentioned is proved theoretically by Formula (4. 17), and variances calculated when distance among trees are shortened 1/3 and 2/3 in both cases: BITTERLICH's method and the 1st method of line sampling (Table 43 to 47).

Next, using four trees as models, it is described theoretically and proved that relative variance becomes larger even though variance becomes smaller as the area in forest having the same structure becomes larger (Table 48 to 51).

Following this, calculation is made of the average bias when there is a point in point sampling falling in a tree stem itself and no heed is paid to it, and expressed by Formula (4. 21). And it is out of the practical question even when no heed is paid.

In Chapter 5, the author deals with the comparison between plot sampling and plotless sampling. First, circular plot sampling with replacement is considered in such a special case as plotless sampling in which the area of enlarged circle is the same, and at the same time, the estimation for the averages of various factors and population variances and the formulae for population variances are shown.

Next, after comparing plotless sampling with plot sampling, BITTERLICH'S method is dealt with as representative of the former and examined in respect of precision and efficiency. BITTERLICH'S method is probability sampling proportional to the basal area, and the basal area has correlation to diameter, tree height, volume, so precision and efficiency in BITTERLICH'S method seems higher than in circular plot method for estimation of them. When comparing variance estimator in Formula (5.3) with that in Formula (5.4), however, we can not always say so because  $a_{tm}$  relates to the distance between trees, diameter of tree, size of the given domain, and against that sum of cross product in the second term of Formula (5.3) stay within each circle, the sum of cross product in the second term of Formula (5.4) has no limit. Here, description is given of the results of tests in Ohtawara national forest and in Yoshimuta national forest by TAKADA, by C. L. KIRBY in the U. S. A, by GROSENBAUGH in the U. S. A, by R. H. KENDALL and SAYN-WITGENSTEIN in Canada, by M. AFANASIEV in the U. S. A, by V. J. CHACKO and 2 others in India and by Y. VUOKILA in Finland (Table 52 to 56). What they conclude is that BITTERLICH'S method is a little inferior to circular plot method in precision, but it is superior in efficiency because it is not time-consuming in survey and it saves labor. However, it is not appropriate for comparison as the area of a circular plot adopted by them is much larger than the corresponding B A F.

Therefore, the author examines the *Cryptomeria* forest and *Chamaecyparis* forest in Ohtawara he surveyed since plot area and B A F correspond with each other. As the result of this it was found that BITTERLICH'S method is not always inferior in precision, and it is possible to say that plotless sampling not only saves time, labor and expenditure in surveying the forest of large area, but also has high efficiency and precision is equal to circular plot sampling when their sizes are approximately the same. In forests of less than 5 ha, however, plotless sampling is not desirable because slopover bias bears and adjustment is required, but of course, much depends on the condition of forest border. In forests of over 10 ha, a very effective plotless sampling is possible because modified value is almost the same as value without modification (Table 52).

In this research, the author sets up a unified theory on plotless sampling, deriving population variance formula and solves many hitherto unsolved problems and also presents new information. Given as appendices are Table *fg*, *fh* and *v/d* for *Cryptomeria*, *Chamaecyparis*, pine and broad-leaved trees in the Kanto Region, and a table for quick calculation when a-method is used in order to modify slopover bias.

In conclusion, the author would like to add that this paper is a result of detailed study of the subject in the paper published in the proceedings of International Forest Research Organizations München Congress.



(10,000倍してある, 以上同断)

34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	<i>D</i>	<i>H</i>
															3
															4
															5
															6
															7
															8
															9
															10
5.5	5.5	5.5	5.4												11
5.9	5.9	5.8	5.8												12
6.4	6.3	6.2	6.1												13
6.7	6.7	6.6	6.4	6.3											14
7.2	7.1	7.0	6.9	6.8	6.6	6.5									15
7.6	7.5	7.4	7.3	7.2	6.9	6.9	6.8	6.6							16
8.1	8.0	7.9	7.8	7.7	7.5	7.3	7.2	7.0	6.9	6.7					17
8.5	8.5	8.4	8.2	8.0	7.9	7.7	7.6	7.4	7.3	7.1	6.9	6.3	6.7		18
9.0	8.9	8.8	8.6	8.5	8.3	8.1	8.0	7.8	7.8	7.4	7.3	7.1	7.0		19
9.4	9.3	9.2	9.0	8.9	8.7	8.5	8.3	8.1	8.0	7.8	7.6	7.5	7.4		20
9.8	9.8	9.6	9.5	9.3	9.1	8.9	8.7	8.5	8.3	8.2	8.1	7.9	7.8		21
10.2	10.2	10.1	9.9	9.7	9.5	7.3	9.1	8.9	8.7	8.6	8.5	8.4	8.2		22
10.6	10.6	10.5	10.3	10.0	9.9	9.6	9.5	9.3	9.2	9.0	8.9	8.8	8.6		23
11.0	11.0	11.0	10.7	10.5	10.3	10.1	9.9	9.7	9.6	9.4	9.3	9.2	9.1		24
11.4	11.4	11.4	11.2	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.0	9.9	9.7	9.6	9.5		25
11.9	11.8	11.8	11.6	11.4	11.2	11.0	10.8	10.6	10.4	10.3	10.1	10.0	9.9		26
12.3	12.2	12.2	12.1	11.9	11.6	11.4	11.2	11.1	10.9	10.7	10.6	10.4	10.3		27
12.7	12.6	12.6	12.6	12.3	12.1	11.9	11.7	11.5	11.3	11.1	11.0	10.8	10.7		28
13.1	13.0	13.0	12.9	12.8	12.5	12.3	12.1	11.9	11.7	11.6	11.4	11.2	11.1		29
13.5	13.4	13.4	13.3	13.3	13.0	12.8	12.6	12.4	12.2	12.0	11.8	11.7	11.5		30
13.9	13.8	13.8	13.7	13.7	13.5	13.3	13.0	12.8	12.6	12.4	12.3	12.1	11.9		31
14.3	14.2	14.2	14.1	14.1	14.0	13.7	13.5	13.3	13.1	12.9	12.7	12.5	12.3		32
14.7	14.6	14.6	14.5	14.6	14.4	14.2	13.9	13.7	13.5	13.3	13.1	12.9	12.8		33
				15.1	14.9	14.6	14.4	14.2	13.9	13.7	13.5	13.3	13.2		34
						15.1	14.8	14.6	14.4	14.2	14.0	13.8	13.6		35
								15.1	14.8	14.6	14.4	14.2	14.0		36
										15.0	14.8	14.6	14.4		37
												15.0	14.8		38



ヒノキ (サクラ, クロマツ, カラマツ, テーダマツ, その他針葉樹)

34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58		D H
														3
														4
														5
														6
														7
														8
														9
														10
4.5	4.5	4.4	4.3											11
5.0	4.9	4.9	4.8											12
5.5	5.4	5.3	5.3											13
6.0	5.9	5.8	5.7	5.6										14
6.5	6.4	6.3	6.2	6.1	6.0	6.0								15
7.0	6.9	6.8	6.7	6.6	6.5	6.4	6.4	6.3						16
7.5	7.4	7.3	7.2	7.1	7.0	6.9	6.8	6.7	6.7	6.6				17
8.1	7.9	7.8	7.7	7.6	7.5	7.4	7.3	7.2	7.1	7.1	7.0	6.9		18
8.6	8.4	8.3	8.2	8.1	8.0	7.9	7.8	7.7	7.6	7.5	7.4	7.4		19
9.1	9.0	8.8	8.7	8.6	8.5	8.4	8.3	8.2	8.1	8.0	7.9	7.8		20
9.7	9.5	9.4	9.2	9.1	9.0	8.9	8.7	8.6	8.5	8.5	8.4	8.3		21
10.2	10.0	9.9	9.7	9.6	9.5	9.4	9.2	9.1	9.0	8.9	8.8	8.7		22
10.8	10.6	10.4	10.3	10.1	10.0	9.9	9.7	9.6	9.5	9.4	9.3	9.2		23
11.3	11.1	11.0	10.8	10.6	10.5	10.4	10.2	10.1	10.0	9.9	9.8	9.7		24
11.9	11.7	11.5	11.3	11.2	11.0	10.9	10.7	10.6	10.5	10.4	10.3	10.2		25
12.4	12.2	12.0	11.8	11.7	11.5	11.4	11.2	11.1	11.0	10.9	10.8	10.6		26
13.0	12.8	12.6	12.4	12.2	12.0	11.9	11.8	11.6	11.5	11.4	11.2	11.1		27
13.6	13.3	13.1	12.9	12.7	12.6	12.4	12.3	12.1	12.0	11.9	11.7	11.6		28
14.1	13.9	13.7	13.5	13.3	13.1	12.9	12.8	12.6	12.5	12.4	12.2	12.1		29
14.7	14.5	14.2	14.0	13.8	13.6	13.5	13.3	13.1	13.0	12.9	12.7	12.6		30
15.3	15.0	14.8	14.6	14.4	14.2	14.0	13.8	13.7	13.5	13.4	13.2	13.1		31
15.9	15.6	15.4	15.1	14.9	14.7	14.5	14.3	14.2	14.0	13.9	13.7	13.6		32
16.4	16.2	15.9	15.7	15.5	15.3	15.1	14.9	14.7	14.5	14.4	14.2	14.1		33
				16.0	15.8	15.6	15.4	15.2	15.1	14.9	14.7	14.6		34
						16.1	15.9	15.8	15.6	15.4	15.2	15.1		35
								16.3	16.1	15.9	15.8	15.6		36
										16.4	16.3	16.1		37
												16.6		38





Appendix 1—3. (つづき) (Continued)

<i>D</i> <i>H</i>	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78	80			
4														
5														
6														
7														
8														
9														
10														
11														
12	5.3	5.3												
13	5.6	5.6	5.6	5.6	5.6	5.6	5.6							
14	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0			
15	6.4	6.4	6.4	6.4	6.4	6.4	6.4	6.4	6.4	6.4	6.4	6.4		
16	6.8	6.8	6.8	6.8	6.8	6.8	6.8	6.8	6.8	6.8	6.8	6.8		
17	7.2	7.2	7.2	7.2	7.2	7.2	7.2	7.2	7.2	7.2	7.2	7.2		
18	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5		
19	7.9	7.9	7.9	7.9	7.9	7.9	7.9	7.9	7.9	7.9	7.9	7.9		
20	8.3	8.3	8.3	8.3	8.3	8.3	8.3	8.3	8.3	8.3	8.3	8.3		
21	8.6	8.6	8.6	8.6	8.6	8.6	8.6	8.6	8.6	8.6	8.6	8.6		
22	9.0	9.0	9.0	9.0	9.0	9.0	9.0	9.0	9.0	9.0	9.0	9.0		
23	9.4	9.4	9.4	9.4	9.4	9.4	9.4	9.4	9.4	9.4	9.4	9.4		
24	9.7	9.7	9.7	9.7	9.7	9.7	9.7	9.7	9.7	9.7	9.7	9.7		
25	10.1	10.1	10.1	10.1	10.1	10.1	10.1	10.1	10.1	10.1	10.1	10.1		
26	10.4	10.5	10.5	10.5	10.5	10.5	10.5	10.5	10.5	10.5	10.5	10.5		
27	10.8	10.8	10.8	10.8	10.8	10.8	10.8	10.8	10.8	10.8	10.8	10.8		
28	11.2	11.2	11.2	11.2	11.2	11.2	11.2	11.2	11.2	11.2	11.2	11.2		
29	11.5	11.5	11.5	11.5	11.5	11.5	11.5	11.5	11.5	11.5	11.5	11.5		
30	11.9	11.9	11.9	11.9	11.9	11.9	11.9	11.9	11.9	11.9	11.9	11.9		
31	12.2	12.2	12.2	12.2	12.2	12.2	12.2	12.2	12.2	12.2	12.2	12.2		
32	12.6	12.6	12.6	12.6	12.6	12.6	12.6	12.6	12.6	12.6	12.6	12.6		
33	12.9	12.9	12.9	12.9	12.9	12.9	12.9	12.9	12.9	12.9	12.9	12.9		
34	13.3	13.3	13.3	13.3	13.3	13.3	13.3	13.3	13.3	13.3	13.3	13.3		
35	13.6	13.6	13.6	13.6	13.6	13.6	13.6	13.6	13.6	13.6	13.6	13.6		
36			14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0		
37				14.3	14.3	14.3	14.3	14.3	14.3	14.3	14.3	14.3		
38						14.6	14.6	14.6	14.6	14.6	14.6	14.7		
39								15.0	15.0	15.0	15.0	15.0		
40												15.3		



Appendix 1-4. (つづき) (Continued)

D \ H	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60
3														
4														
5														
6														
7														
8														
9														
10														
11	4.5	4.4	4.4	4.4	4.3	4.3	4.3							
12	4.9	4.9	4.8	4.8	4.8	4.7	4.3							
13	5.4	5.3	5.3	5.2	5.2	5.2	5.1	5.1	5.1	5.0	5.0			
14	5.8	5.8	5.7	5.7	5.6	5.6	5.6	5.5	5.5	5.4	5.4	5.4		
15	6.3	6.2	6.2	6.1	6.1	6.0	6.0	6.0	5.9	5.9	5.8	5.8	5.8	
16	6.8	6.7	6.6	6.6	6.5	6.5	6.4	6.4	6.3	6.3	6.3	6.2	6.2	
17	7.2	7.2	7.1	7.0	7.0	6.9	6.9	6.8	6.8	6.7	6.7	6.7	6.6	
18	7.7	7.6	7.6	7.5	7.4	7.4	7.3	7.3	7.2	7.2	7.1	7.1	7.0	
19	8.2	8.1	8.0	8.0	7.9	7.8	7.8	7.7	7.7	7.6	7.6	7.5	7.5	
20	8.6	8.6	8.5	8.4	8.3	8.3	8.2	8.2	8.1	8.1	8.0	8.0	7.9	
21	9.1	9.0	9.0	8.9	8.8	8.7	8.7	8.6	8.6	8.5	8.4	8.4	8.3	
22	9.6	9.5	9.4	9.3	9.3	9.2	9.1	9.1	9.1	8.9	8.9	8.8	8.8	
23	10.1	10.0	9.9	9.8	9.7	9.7	9.6	9.5	9.5	9.4	9.3	9.3	9.2	
24	10.6	10.5	10.4	10.3	10.2	10.1	10.0	10.0	9.9	9.8	9.8	9.7	9.7	
25	11.0	10.9	10.8	10.8	10.7	10.6	10.5	10.4	10.4	10.3	10.2	10.2	10.1	
26	11.5	11.4	11.3	11.2	11.1	11.0	11.0	10.9	10.8	10.9	10.7	10.6	10.6	
27	12.0	11.9	11.8	11.7	11.6	11.5	11.4	11.4	11.3	11.2	11.1	11.0	11.0	
28	12.5	12.4	12.3	12.2	12.1	12.0	11.9	11.8	11.7	11.7	11.6	11.5	11.4	
29	13.0	12.9	12.8	12.7	12.6	12.5	12.4	12.3	12.2	12.1	12.0	12.0	11.9	
30	13.5	13.4	13.2	13.1	13.0	12.9	12.8	12.7	12.7	12.6	12.5	12.4	12.4	
31	14.0	13.9	13.7	13.6	13.5	13.4	13.3	13.2	13.1	13.0	13.0	12.9	12.8	
32	14.5	14.3	14.2	14.1	14.0	13.9	13.8	13.7	13.6	13.5	13.4	13.3	13.3	
33					14.5	14.4	14.2	14.2	14.1	14.0	13.9	13.8	13.7	
34					14.9	14.8	14.7	14.6	14.5	14.4	14.3	14.3	14.2	
35					15.4	15.3	15.2	15.1	15.0	14.9	14.8	14.7	14.6	
36					15.9	15.8	15.7	15.6	15.5	15.4	15.3	15.2	15.1	
37					16.4	16.3	16.2	16.0	15.9	15.8	15.7	15.6	15.6	
38					16.9	16.8	16.6	16.5	16.4	16.3	16.2	16.1	16.0	





60	62	64	66	68	70	72	74	76	78	80				D H
														3
														4
														5
														6
														7
														8
														9
														10
														11
														12
														13
														14
														15
														16
														17
104.6														18
104.8	110.4	116.2												19
105.2	110.9	116.7	122.5	128.5	134.6									20
105.6	111.3	117.0	123.0	129.0	135.1	141.3	147.7	154.1	160.7	167.3				21
105.9	111.6	117.5	123.4	129.4	135.6	141.8	148.2	154.6	161.2	167.9				22
106.3	112.0	117.9	123.8	129.9	136.0	142.3	148.7	155.2	161.8	168.4				23
106.7	112.4	118.3	124.2	130.3	136.5	142.8	149.2	155.7	162.3	169.0				24
107.0	112.7	118.6	124.6	130.7	136.9	143.2	149.6	156.2	162.8	169.5				25
107.3	113.1	119.0	125.0	131.1	137.3	143.6	150.1	156.6	163.3	170.0				26
107.6	113.4	119.3	125.3	131.5	137.7	144.0	150.5	157.1	163.8	170.5				27
107.9	113.7	119.6	125.7	131.8	138.1	144.4	150.9	157.5	164.2	170.9				28
108.2	114.0	120.0	126.0	132.2	138.4	144.8	151.3	157.9	164.6	171.4				29
108.5	114.3	120.3	126.3	132.5	138.8	145.2	151.7	158.3	165.0	171.8				30
108.7	114.6	120.6	126.7	132.8	139.1	145.6	152.1	158.7	165.5	172.3				31
109.0	114.8	120.8	126.9	133.2	139.5	145.9	152.4	159.1	165.8	172.7				32
109.2	115.1	121.1	127.2	133.4	139.8	146.2	152.8	159.4	166.2	173.1				33
109.5	115.4	121.4	127.5	133.8	140.1	146.6	153.1	159.8	166.6	173.5				34
109.7	115.6	121.7	127.8	134.1	140.4	146.9	153.5	160.2	167.0	173.8				35
110.0	115.9	121.9	128.1	134.3	140.7	147.2	153.8	160.5	167.3	174.2				36
110.2	116.1	122.1	128.3	134.6	141.0	147.5	154.1	160.8	167.6	174.5				37
110.4	116.3	122.4	128.6	134.9	141.3	147.8	154.4	161.1	168.0	174.9				38
	116.6	122.7	128.8	135.1	141.6	148.1	154.7	161.5	168.3	175.3				39
			129.1	135.4	141.9	148.4	155.0	161.8	168.7	175.6				40





Appendix 付表 2-2. (つづき) (Continued)

H	D													
	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78	80			
3														
4														
5														
6														
7														
8														
9														
10														
11														
12														
13														
14														
15														
16														
17														
18	107.5													
19	108.5	114.7	121.2											
20	109.5	115.8	122.3	128.9	135.6	142.5								
21	110.4	116.8	123.3	130.0	136.8	143.7	150.8	158.0	165.4	172.9	180.6			
22	111.3	117.7	124.3	131.0	137.8	144.8	152.0	159.3	166.8	174.3	182.0			
23	112.2	118.7	125.3	132.0	139.0	146.0	153.2	160.6	168.1	175.7	183.4			
24	113.0	119.6	126.2	133.0	140.0	147.1	154.4	161.8	169.3	177.0	184.8			
25	113.8	120.4	127.1	134.0	141.0	148.2	155.5	162.9	170.5	178.3	186.2			
26	114.6	121.2	128.0	134.9	142.0	149.1	156.5	164.0	171.7	179.5	187.5			
27	115.6	122.0	128.8	135.8	142.9	150.1	157.6	165.1	172.9	180.7	188.7			
28	116.1	122.8	129.6	136.6	143.8	151.1	158.6	166.2	173.9	181.8	189.9			
29	116.8	123.5	130.4	137.5	144.7	152.1	159.5	167.2	175.0	182.9	191.1			
30	117.5	124.3	131.2	138.3	145.6	153.0	160.5	168.2	176.0	184.0	192.3			
31	118.2	125.0	132.0	139.1	146.4	153.8	161.4	169.2	177.1	185.1	193.4			
32	118.8	125.7	132.7	139.9	147.2	154.7	162.3	170.1	178.1	186.2	194.4			
33	119.5	126.4	133.4	140.6	148.0	155.5	163.2	171.0	179.0	187.1	195.4			
34	120.1	127.0	134.1	141.4	148.8	156.3	164.0	171.9	180.0	188.1	196.4			
35	120.7	127.7	134.8	142.1	149.5	157.1	164.9	172.8	180.9	189.1	197.4			
36	121.3	128.3	135.5	142.8	150.3	157.9	165.7	173.7	181.8	190.0	198.4			
37	121.9	128.9	136.1	143.4	151.0	158.6	166.5	174.5	182.6	190.9	199.4			
38	122.4	129.5	136.7	144.1	151.7	159.4	167.3	175.3	183.5	191.8	200.3			
39		130.1	137.4	144.8	152.4	160.1	168.0	176.1	184.3	192.7	201.2			
40				145.5	153.1	160.9	168.8	176.9	185.2	193.6	202.1			





60	62	64	66	68	70	72	74	76	78	80					D H
															4
															5
															6
															7
															8
															9
															10
															11
123.8	132.2														12
122.8	131.1	139.7	148.5	157.7	167.1	176.8									13
121.8	130.0	138.6	147.4	156.4	165.8	175.4	185.3	195.4	205.9	216.6					14
120.8	129.0	137.5	146.2	155.2	164.5	174.1	183.9	193.9	204.3	214.9					15
119.9	128.1	136.5	145.2	154.1	163.3	172.8	182.6	192.6	202.8	213.4					16
119.1	127.2	135.6	144.2	153.0	162.2	171.6	181.3	191.2	201.5	211.9					17
118.4	126.4	134.7	143.3	152.1	161.2	170.6	180.2	190.1	200.2	210.6					18
117.7	125.6	133.9	142.4	151.2	160.2	169.6	179.1	188.9	199.0	209.3					19
117.0	125.0	133.2	141.6	150.4	159.3	168.6	178.1	187.9	197.9	208.2					20
116.4	124.3	132.4	140.9	149.5	158.4	167.6	177.1	186.8	196.8	207.0					21
115.8	123.6	131.7	140.1	148.7	157.6	166.8	176.2	185.8	195.8	205.9					22
115.2	123.0	131.1	139.4	148.0	156.9	166.0	175.3	184.9	194.8	205.0					23
114.7	122.4	130.5	138.8	147.3	156.1	165.2	174.5	184.1	193.9	204.0					24
114.1	121.9	129.9	138.1	146.6	155.4	164.4	173.7	183.2	193.0	203.0					25
113.6	121.3	129.3	137.5	146.0	154.7	163.7	172.9	182.4	192.1	202.1					26
113.2	120.8	128.8	137.0	145.4	154.1	163.0	172.2	181.7	191.3	201.3					27
112.7	120.3	128.2	136.4	144.8	153.4	162.3	171.5	180.9	190.5	200.5					28
112.2	119.9	127.7	135.9	144.2	152.8	161.7	170.8	180.2	189.8	199.7					29
111.8	119.4	127.3	135.4	143.7	152.3	161.1	170.2	179.5	189.1	198.9					30
111.4	119.0	126.8	134.9	143.2	151.7	160.5	169.6	178.9	188.4	198.2					31
111.0	118.6	126.3	134.4	142.7	151.2	160.0	169.0	178.3	187.8	197.5					32
110.7	118.2	125.9	133.9	142.2	150.7	159.4	168.4	177.6	187.1	196.8					33
110.3	117.8	125.5	133.5	141.7	150.2	158.9	167.8	177.0	186.5	196.2					34
110.0	117.4	125.1	133.1	141.2	149.7	158.4	167.3	176.5	185.9	195.6					35
		124.7	132.6	140.8	149.2	157.9	166.8	175.9	185.3	195.0					36
			132.2	140.3	148.7	157.4	166.2	175.3	184.7	194.3					37
					148.3	156.9	165.7	174.8	184.2	193.7					38
							165.3	174.4	183.7	193.2					39
										192.7					40



関東広葉樹  $v/h$  表

34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	$D$ $H$
														3
														4
														5
														6
														7
														8
														9
														10
37.0	41.1	45.4	49.8	54.5	59.4	64.4								11
37.3	41.4	45.7	50.2	55.0	59.8	64.9								12
37.6	41.8	46.1	50.7	55.4	60.3	65.5	70.8	76.3	82.0	87.8				13
37.9	42.1	46.4	51.0	55.7	60.8	65.9	71.3	76.9	82.6	88.5	94.6			14
38.1	42.3	46.7	51.4	56.2	61.2	66.4	71.8	77.3	83.1	89.1	95.3	101.6	109.7	15
38.4	42.6	47.1	51.7	56.6	61.6	66.8	72.3	77.9	83.7	89.7	95.9	102.3	110.3	16
38.6	42.9	47.4	52.0	56.9	61.9	67.2	72.6	78.3	84.2	90.2	96.4	102.8	110.9	17
38.8	43.1	47.6	52.3	57.2	62.3	67.6	73.1	78.8	84.7	90.7	97.0	103.5	111.5	18
39.1	43.4	47.8	52.6	57.5	62.6	67.9	73.5	79.2	85.1	91.2	97.5	104.0	112.0	19
39.3	43.6	48.1	52.9	57.8	63.0	68.3	73.9	79.6	85.6	91.7	98.0	104.5	112.5	20
39.4	43.8	48.3	53.1	58.1	63.2	68.6	74.2	80.0	86.0	92.1	98.5	105.0	113.0	21
39.6	44.0	48.5	53.4	58.4	63.5	68.9	74.5	80.4	86.4	92.5	98.9	105.5	113.5	22
39.8	44.2	48.8	53.6	58.6	63.8	69.3	74.9	80.7	86.7	93.0	99.4	106.0	114.0	23
40.0	44.4	49.0	53.8	58.9	64.1	69.5	75.2	81.0	87.1	93.3	99.8	106.4	114.4	24
40.1	44.5	49.2	54.0	59.1	64.4	69.8	75.5	81.4	87.4	93.7	100.2	106.8	114.8	25
40.3	44.7	49.4	54.2	59.3	64.6	70.1	75.8	81.7	87.8	94.1	100.6	107.3	115.2	26
40.4	44.9	49.6	54.4	59.6	64.9	70.4	76.1	82.0	88.1	94.4	100.9	107.7	115.6	27
40.6	45.0	49.7	54.6	59.7	65.1	70.6	76.3	82.3	88.4	94.7	101.3	108.0	116.0	28
40.7	45.2	49.9	54.8	60.0	65.3	70.9	76.6	82.6	88.7	95.1	101.6	108.4	116.3	29
40.8	45.3	50.1	55.0	60.2	65.5	71.1	76.9	82.9	89.0	95.4	102.0	108.8	116.7	30
41.0	45.5	50.2	55.2	60.4	65.7	71.3	77.1	83.1	89.3	95.7	102.3	109.1	117.0	31
41.1	45.6	50.4	55.4	60.6	65.9	71.6	77.4	83.4	89.6	96.0	102.7	109.5	117.4	32
				60.7	66.1	71.8	77.6	83.6	89.9	96.3	103.0	109.8	117.7	33
				60.9	66.3	72.0	77.8	83.9	90.1	96.6	103.3	110.1	118.0	34
				61.1	66.5	72.2	78.1	84.1	90.4	96.9	103.6	110.5	118.3	35
				61.3	66.7	72.4	78.3	84.4	90.6	97.1	103.9	110.8	118.6	36
				61.4	66.9	72.6	78.5	84.6	90.9	97.4	104.1	111.0	118.9	37
				61.6	67.1	72.8	78.7	84.8	91.1	97.6	104.4	111.3	119.2	38
				61.7	67.3	73.0	78.9	85.0	91.4	97.9	104.7	111.6	119.5	39
				61.9	67.4	73.2	79.1	85.3	91.6	98.2	104.9	111.9	119.8	40



(1,000倍してある。以下同断)

34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	<i>D</i>	<i>H</i>
															3
															4
															5
															6
															7
															8
															9
															10
14.6	15.5	16.3	17.1												11
15.8	16.7	17.4	18.1												12
17.0	17.8	18.5	19.1												13
17.9	18.8	19.6	20.2	20.8											14
19.1	20.1	20.9	21.6	22.3	22.9	23.4									15
20.4	21.3	22.2	23.0	23.8	23.9	24.9	25.5	26.0							16
21.6	22.7	23.6	24.4	25.2	25.9	26.5	27.1	27.6	28.1	28.5					17
22.8	24.0	25.0	25.8	26.5	27.3	27.9	28.5	29.1	29.6	30.1	30.6	31.0	31.4		18
23.9	25.2	26.2	27.1	27.9	28.7	29.4	30.0	30.6	31.1	31.6	32.0	32.5	33.2		19
25.0	26.4	27.4	28.4	29.2	30.0	30.7	31.4	32.0	32.5	33.0	33.6	34.4	35.1		20
26.1	27.6	28.8	29.7	30.6	31.4	32.1	32.7	33.3	33.9	34.7	35.4	36.2	37.0		21
27.3	28.8	30.0	31.0	31.9	32.7	33.5	34.2	34.8	35.6	36.5	37.3	38.1	38.8		22
28.4	29.9	31.3	32.4	33.2	34.1	34.8	35.6	36.5	37.4	38.3	39.1	39.9	40.8		23
29.5	31.1	32.7	33.8	34.7	35.5	36.4	37.3	38.2	39.2	40.0	40.9	41.8	42.7		24
30.6	32.2	33.9	35.3	36.4	37.1	38.0	39.0	40.0	40.9	41.8	42.8	43.7	44.6		25
31.6	33.4	35.2	36.6	37.7	38.6	39.6	40.7	41.7	42.7	43.6	44.6	45.6	46.5		26
32.7	34.6	36.4	37.9	39.1	40.2	41.3	42.4	43.4	44.4	45.4	46.5	47.4	48.4		27
33.8	35.7	37.6	39.4	40.6	41.8	42.9	44.0	45.1	46.2	47.3	48.3	49.3	50.5		28
34.9	36.8	38.8	40.7	42.2	43.4	44.6	45.7	46.9	48.0	49.1	50.2	51.2	52.3		29
36.0	38.0	40.0	41.9	43.8	45.0	46.2	47.4	48.6	49.6	50.9	52.0	53.1	54.2		30
37.0	39.1	41.1	43.2	45.1	46.6	47.9	49.1	50.4	51.6	52.7	53.9	55.0	56.2		31
38.1	40.2	42.3	44.4	46.7	48.2	49.6	50.8	52.1	53.4	54.6	55.8	57.0	58.1		32
39.2	41.3	43.5	45.7	48.2	49.9	51.2	52.5	53.9	55.1	56.4	57.6	58.9	60.1		33
			49.8	51.5	52.9	54.3	55.6	56.9	58.2	59.5	60.8	62.0	63.3		34
					54.6	56.0	57.4	58.7	60.1	61.4	62.7	64.0	65.3		35
							59.1	60.5	61.9	63.3	64.6	66.0	67.3		36
									63.8	65.2	66.6	68.0	69.3		37
											68.5	69.9			38



関東ヒノキ  $v/d$  表

34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	$D$ $H$
														3
														4
														5
														6
														7
														8
														9
														10
12.1	12.6	13.0	13.6											11
13.4	13.9	14.5	15.0											12
14.7	15.3	15.9	16.5											13
16.0	16.7	17.3	18.0	18.6										14
17.4	18.1	18.8	19.5	20.2	20.9	21.5								15
18.8	19.5	20.3	21.0	21.8	22.5	23.2	24.0	24.7						16
20.1	20.8	21.8	22.6	23.4	24.2	25.0	25.7	26.5	27.2	28.0				17
21.5	22.4	23.3	24.2	25.0	25.9	26.7	27.5	28.3	29.1	29.9	30.7	31.5	32.2	18
22.9	23.9	24.8	25.8	26.7	27.6	28.4	29.3	30.2	31.0	31.9	32.7	33.5	34.4	19
24.4	25.1	26.4	27.4	28.3	29.3	30.2	31.2	32.1	33.6	33.8	34.7	35.6	36.5	20
25.8	26.9	27.9	29.0	30.0	31.0	32.0	33.0	33.9	34.9	35.8	36.8	37.7	38.6	21
27.3	28.4	29.5	30.6	31.7	32.8	33.8	34.8	35.9	36.9	37.9	38.9	39.8	40.8	22
28.7	29.9	31.1	32.2	33.4	34.5	35.6	36.7	37.8	38.8	39.9	41.0	42.0	43.0	23
30.2	31.4	32.7	33.9	35.1	36.3	37.4	38.6	39.7	40.8	41.9	43.0	44.1	45.2	24
31.7	33.0	34.3	35.6	36.8	38.0	39.3	40.5	41.7	42.8	44.0	45.2	46.3	47.4	25
33.2	34.6	35.9	37.2	38.6	39.8	41.1	42.4	43.6	44.9	46.1	47.3	48.5	49.7	26
34.7	36.1	37.5	38.9	40.3	41.6	43.0	44.3	45.6	46.9	48.2	49.4	50.7	51.9	27
36.2	37.7	39.2	40.6	42.0	43.4	44.9	46.2	47.6	48.9	50.3	51.6	52.9	54.2	28
37.7	39.3	40.8	42.3	43.8	45.3	46.7	48.2	49.6	51.0	52.4	53.8	55.1	56.5	29
39.2	40.9	42.5	44.0	45.6	47.1	48.6	50.2	51.6	53.1	54.5	56.0	57.4	58.8	30
40.8	42.5	44.1	45.8	47.4	49.0	50.6	52.1	53.6	55.2	56.7	58.1	59.6	61.1	31
42.4	44.1	45.9	47.5	49.2	50.8	52.5	54.1	55.7	57.2	58.8	60.4	61.9	63.4	32
43.9	45.7	47.5	49.3	51.0	52.7	54.4	56.1	57.7	59.4	61.0	62.6	64.2	65.7	33
				52.8	54.6	56.4	58.1	59.8	61.5	63.2	64.8	66.4	68.1	34
						58.3	60.1	61.9	63.6	65.4	67.0	68.7	70.4	35
								64.0	65.8	67.5	69.3	71.1	72.8	36
										69.8	71.6	73.4	75.2	37







関東広葉樹  $v/d$  表

34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	$D$ $H$
														3
														4
														5
														6
														7
														8
														9
														10
12.0	12.6	13.1	13.7	14.3	14.8	15.4								11
13.2	13.8	14.4	15.1	15.7	16.3	16.9								12
14.4	14.7	15.8	16.5	17.1	17.8	18.5	19.2	19.8	20.5	21.1				13
15.6	16.4	17.1	17.9	18.6	19.3	20.1	20.8	21.5	22.2	22.9	23.6			14
16.8	17.6	18.4	19.3	20.1	20.9	21.7	22.4	23.2	24.0	24.7	25.5	26.3	27.4	15
18.1	18.9	19.8	20.7	21.5	22.4	23.2	24.1	24.9	25.8	26.6	27.4	28.2	29.4	16
19.3	20.3	21.2	22.1	23.0	23.9	24.8	25.7	26.6	27.5	28.4	29.3	30.1	31.4	17
20.6	21.6	22.6	23.6	24.5	25.5	26.5	27.4	28.4	29.3	30.2	31.2	32.1	33.4	18
21.8	22.9	23.8	25.0	26.0	27.0	28.1	29.1	30.1	31.1	32.1	33.1	34.1	35.5	19
23.1	24.2	25.3	26.4	27.5	28.6	29.7	30.8	31.8	32.9	33.9	35.0	36.0	37.5	20
24.3	25.5	26.7	27.9	29.0	30.2	31.3	32.5	33.6	34.7	35.8	36.9	38.0	39.6	21
25.6	26.9	28.1	29.4	30.6	31.8	33.0	34.2	35.4	36.5	37.7	38.9	40.0	41.6	22
26.9	28.2	29.5	30.8	32.1	33.4	34.6	35.9	37.1	38.4	39.6	40.8	42.0	43.7	23
28.2	29.6	30.9	32.3	33.6	35.0	36.3	37.6	38.9	40.2	41.5	42.8	44.0	45.8	24
29.5	30.9	32.4	33.8	35.2	36.6	38.0	39.3	40.7	42.0	43.4	44.7	46.1	47.8	25
30.8	32.3	33.8	35.3	36.7	38.2	39.6	41.1	42.5	43.9	45.3	46.7	48.1	49.9	26
32.1	33.7	35.2	36.8	38.3	39.8	41.3	42.8	44.3	45.8	47.2	48.7	50.1	52.0	27
33.4	35.0	36.7	38.3	39.8	41.4	43.0	44.5	46.1	47.6	49.1	50.6	52.2	54.1	28
34.7	36.4	38.1	39.8	41.4	43.0	44.7	46.3	47.9	49.5	51.1	52.6	54.2	56.2	29
36.0	37.8	39.5	41.3	43.0	44.7	46.4	48.0	49.7	51.4	53.0	54.6	56.3	58.4	30
37.4	39.2	41.0	42.8	44.5	46.3	48.1	49.8	51.5	53.3	54.9	56.6	58.3	60.5	31
38.7	40.6	42.4	44.3	46.1	48.0	49.8	51.6	53.4	55.1	56.9	58.7	60.4	62.6	32
				47.7	49.6	51.5	53.4	55.2	57.0	58.9	60.7	62.5	64.7	33
				49.3	51.3	53.2	55.1	57.0	58.9	60.8	62.7	64.6	66.9	34
				50.9	52.9	54.9	56.9	58.9	60.8	62.8	64.7	66.7	69.0	35
				52.5	54.6	56.7	58.7	60.7	62.8	64.8	66.8	68.7	71.2	36
				54.1	56.3	58.4	60.5	62.7	64.7	66.7	68.8	70.8	73.3	37
				55.7	57.9	60.1	62.3	64.5	66.6	68.7	70.8	72.9	75.5	38
				57.3	59.6	61.9	65.1	66.3	68.5	70.7	72.9	75.1	77.7	39
				59.0	61.3	63.6	65.9	68.2	70.5	72.7	74.9	77.2	79.8	40

Appendix 4.  $d^2/l^2$  表

$d \backslash l$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	9.0	2.25	1.00											
8	16.0	4.00	1.78	1.00										
10	25.0	6.25	2.78	1.56	1.00									
12	36.0	9.00	4.00	2.25	1.44	1.00								
14	49.0	12.25	5.44	3.06	1.96	1.36	1.00							
16	64.0	16.00	7.11	4.00	2.56	1.78	1.31	1.00						
18	81.0	20.25	9.00	5.06	3.24	2.25	1.65	1.27	1.00					
20	100.0	25.00	11.11	6.25	4.00	2.78	2.04	1.56	1.23	1.00				
22	121.0	30.25	13.44	7.56	4.84	3.36	2.47	1.89	1.49	1.21	1.00			
24	144.0	36.00	16.00	9.00	5.76	4.00	2.94	2.25	1.78	1.44	1.19	1.00		
26	169.0	42.25	18.78	10.56	6.76	4.69	3.45	2.64	2.09	1.69	1.40	1.17	1.00	
28	196.0	49.00	21.78	12.25	7.84	5.44	4.00	3.06	2.42	1.96	1.62	1.36	1.16	1.00
30	225.0	56.25	25.00	14.06	9.00	6.25	4.59	3.52	2.78	2.25	1.86	1.56	1.33	1.15
32	256.0	64.00	28.44	16.00	10.24	7.11	5.22	4.00	3.16	2.56	2.12	1.78	1.51	1.31
34	289.0	72.25	32.11	18.06	11.56	8.03	5.90	4.52	3.57	2.89	2.39	2.01	1.71	1.47
36	324.0	81.00	36.00	20.25	12.96	9.00	6.61	5.06	4.00	3.24	2.68	2.25	1.92	1.65
38	361.0	90.25	40.11	22.56	14.44	10.03	7.37	5.64	4.46	3.61	2.98	2.51	2.14	1.84
40	400.0	100.00	44.44	25.00	16.00	11.11	8.16	6.25	4.94	4.00	3.31	2.78	2.37	2.04
42	441.0	110.25	49.00	27.56	17.64	12.25	9.00	6.89	5.44	4.41	3.64	3.06	2.61	2.25
44	484.0	121.00	53.78	30.25	19.36	13.44	9.88	7.56	5.98	4.84	4.00	3.36	2.86	2.47
46	529.0	132.25	58.78	33.06	21.16	14.69	10.76	8.27	6.53	5.29	4.37	3.67	3.13	2.70
48	576.0	144.00	64.00	36.00	23.04	16.00	11.76	9.00	7.11	5.76	4.76	4.00	3.41	2.94
50	625.0	156.25	69.44	39.06	25.00	17.36	12.76	9.77	7.72	6.25	5.17	4.34	3.70	3.19
52	676.0	169.00	75.11	42.25	27.04	18.78	13.80	10.56	8.35	6.76	5.59	4.69	4.00	3.45
54	729.0	182.25	81.00	45.56	29.16	20.25	14.88	11.39	9.00	7.29	6.02	5.06	4.31	3.72
56	784.0	196.00	87.11	49.00	31.36	21.78	16.10	12.25	9.68	7.84	6.48	5.44	4.64	4.00
58	841.0	210.25	93.44	52.56	33.64	23.36	17.16	13.14	10.38	8.41	6.95	5.84	4.98	4.29
60	900.0	225.00	100.00	56.25	36.00	25.00	18.37	14.06	11.11	9.00	7.44	6.25	5.33	4.59

- 注) 1. 本表の数値は断面積定数そのものとなり、どの断面積定数の場合でも使用可能。  
 2. 重みを求める場合は使用した断面積定数で割ればもとまる。  
 3.  $d$  は cm 単位,  $l$  は m 単位。