

幹曲線式による利用可能材積の推定方法

樋 渡 ミヨ子⁽¹⁾

Miyoko HIWATASHI : Predicting Method of Merchantable
Volume based on Taper Curve Equations

要 旨 立木価格算定の基礎である収穫可能な素材丸太の量は、従来、特定の採材基準ごとに実測調査で得られた利用率や利用材積表を用いて求められてきた。しかし、需要の変化により採材基準は変更され、そのたびに実測調査を繰り返すよりは、一般的には幹曲線式などを用いて、任意の採材基準に対応して、簡易に利用可能材積が推定できる方式を確立しておくことが望ましい。

この研究では、幹曲線式として実用性が高いと考えられる放物線式、対数幹曲線式、幹材積式からの誘導式、相対幹曲線式、Bruce と Curtis らの高次多項式について、大子営林署管内で収集したスギの資料などを用いて、各式の特性や適合性の検討を行った。その結果、通常の利用可能材積の算定に関係のない幹足部分と梢頭部分を除くと、幹曲線式の適合性は著しく向上し、さらに樹高級別に幹曲線式を求めることにより、実用的に十分な精度の得られることを明らかにした。また、資料の収集を簡便にするため、皮付直径から皮内直径を推定する方式を考案した。

これらの手法を組み合わせ、収集されたデータの胸高から末口径 3 cm 以上の樹幹部分に、5 種の幹曲線式を当てはめ、最適の式を選んで、任意の採材基準により、立木から収穫可能と考えられる素材丸太の末口径別の本数、材積を推定する電算機システムを組み立てた。

このシステムの使用方法を、大子営林署の採材基準を用いて例示した。

目 次

I. は じ め に	29
II. 幹形とその表現方法	30
III. 各種幹曲線式の当てはめと幹材積の算出	34
1. 資 料	34
2. 放物線で表した幹曲線式	34
3. 材積式から誘導した幹曲線式	39
4. 相 対 幹 曲 線 式	43
5. D. BRUCEらの多項式による幹曲線式	48
IV. 皮付直径から皮内直径への変換	50
V. 幹曲線式を用いた利用可能材積算出フローの作成とモデル的検討	55
VI. 摘 要	61

I は じ め に

立木価格算定の基礎である収穫可能な素材丸太の量は、従来、特定の採材基準ごとに実測調査による利用率や利用材積表を用いて求められてきた。しかし、木材に対する需要の変化は大きく、それに対応して採材基準も変更されるが、そのたびに実測調査を繰り返すよりは、一般的には、林木の平均的な断面を示す曲線式、すなわち幹曲線式などを用いて、任意の採材基準に対して簡易に利用可能材積が推定できる方式の確立が望まれる。

幹曲線式については、これまでに多くの提案がなされているが、そのなかで実用性が高いと考えられる放物線式、対数幹曲線式、材積式から誘導した幹曲線式、相対幹曲線式、BRUCE と CURTIS らの多次元多項式について、各曲線式の持つ特性を明らかにし、適合性向上のための手段の検討を行うことにした。

さらに、これらの幹曲線式を用いて、任意の採材基準により、立木から収穫可能と考えられる素材丸太の末口径別の本数、材積を推定する電算機システムを組み立てるとともに、利用率を算定する基礎となる幹材積を幹曲線式から導びく方式について検討することとした。

この報告をまとめるに当たって、経営部の栗屋経営第二科長、西川測定研究室長にご指導を受けたことに対し、また測定研究室家原技官には、農林研究センターライブラリーのSALSの使用に当たってご協力いただいたことを、深く感謝します。

II 幹形とその表現方法

従来、幹の形状と細りは、同じ概念を表す術語として使われているが、GRAY⁴⁾は、この二つの術語を、直径が上部にいくにしたがって規則的に狭くなっている3種の幾何学的立体と関係させて、別個の定義を与えている。Fig. 1 に示す立体の直径の狭くなる程度は、各立体の縦断面での直径と高さの関係を定める曲線式の d のべきで変わる。

円錐体： $h = k_1 d$

放物線体： $h = k_2 d^2$

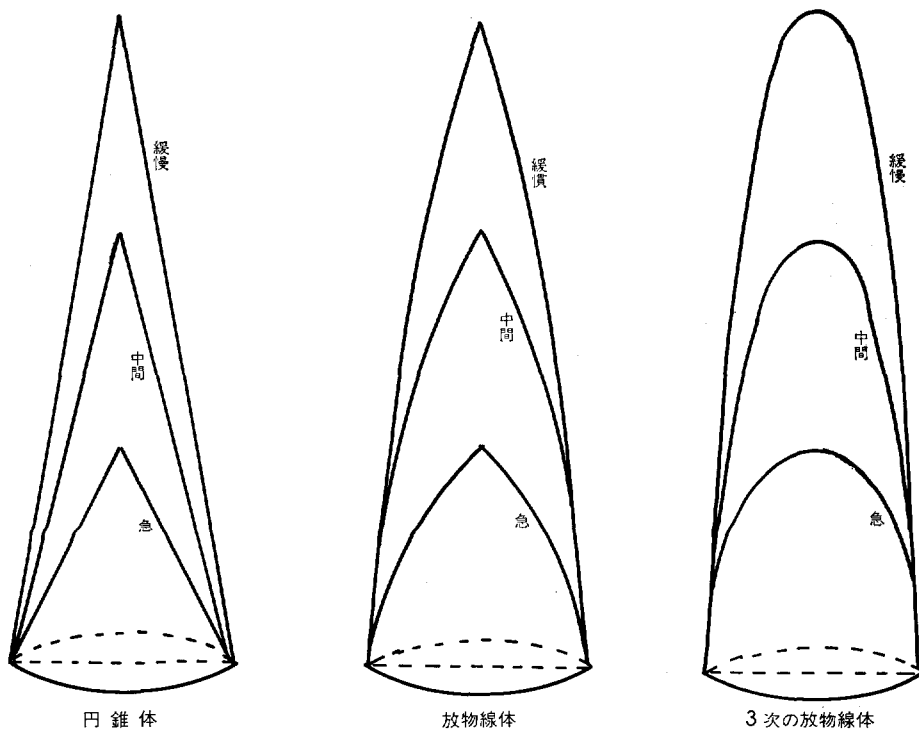


Fig. 1. 高さと断面積の形状と細りの関係

(H. R. GRAY: The Form and Taper of Forest-Tree Stems から)

3 次の放物線体: $h = k_3 d^3$

ここで, d は曲線の頂点から距離 h の点における直径で, k_i は定数である。

高さが高くなるにつれて, 直径の細くなる割合が早い遅いによって, この三つの立体は, 相対的に細長い, 太く短くなる。従来は円錐形の幹は細りが急で, 3 次の放物線体の幹は細りが緩慢であるように考えられた場合もあった。しかし, GRAY は幹形に相似した立体で形状を定義し, 同一の形状について, 高さの増加に対する直径の細くなる割合 (k) をもって, “細り” を定義している。Fig. 1 には, 円錐体, 放物線体, 3 次の放物線体のそれぞれに対して, 細りを緩慢, 中間, 急の3種類に分けて示した。

幹形は, 樹木の幹の横断面と縦断面の形を総合的に表したもので, 樹種, 施業方法などにより異なっているが, 正常に生育した樹木は, ほぼ規則的な形を持っている。普通, 幹の横断面は円形として扱っており, 幹形といえば幹の中心である幹軸を通る縦断面で表され, 幹軸を含む平面が幹の表面と交わる曲線を幹曲線と呼んでいる。したがって, 幹曲線は幹の長さに対する直径の変化の割合によって決定される。

幹曲線の表現法として, PRODAN¹⁸⁾ は, 相対幹曲線式を用いている。つまり, 梢端から樹高の $\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{5}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}$ の位置の直径と $\frac{9}{10}$ の位置の直径との比の数値を提案している。 $\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{5}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}$ の位置の直径を $d_{0.1}, d_{0.3}, d_{0.5}, d_{0.7}, d_{0.9}$ で表すと, 相対直径列は

$$\eta_{0.1} = \frac{d_{0.1}}{d_{0.9}}, \quad \eta_{0.3} = \frac{d_{0.3}}{d_{0.9}}, \quad \dots, \quad \eta_{0.9} = 1$$

となる。相対幹曲線式は, x を樹高に対する梢端からの相対距離, y を $d_{0.9}$ に対する相対半径とすると

$$y = f(x)$$

で表される。縦軸に相対半径, 横軸に相対長をとると, その関係は Fig. 2 のように示される。基準直径を $d_{0.9}$ とした場合の正形数 (比較円柱の直径の位置を一定の相対高にとる場合の形数をいい, 一般に, 比較円柱の直径として, 基準直径 $d_{0.9}$ が用いられる。HOHENADL の式は正形数を求めるための実用式として用いられている) を $\lambda_{0.9}$ で表すと, 単木の幹材積は, 次式で示される。

$$v = \frac{\pi}{4} H d_{0.9}^2 \lambda_{0.9}$$

$$\lambda_{0.9} = 0.2(1 + \eta_{0.7}^2 + \eta_{0.5}^2 + \eta_{0.3}^2 + \eta_{0.1}^2) \quad (\text{HOHENADL の正形数})$$

H : 樹高

PRODAN ら¹⁸⁾ は, $\lambda_{0.9}$ を形状の指標として重視している。大隅¹⁶⁾ もその重要性を指摘しており, 大隅は, 相対幹形と $\frac{H}{d_{0.9}}$ で現実の幹形が表されるとしている。また, 相対幹形について細りの程度を表す概念を形状度といい, 形状度を, 似たもの, すなわち相対幹形の類似したグループ別に幹曲線式を求めている。相対幹形は, 同種の立体であれば同じ形となることから, GRAY の形状を表す概念と同じ意味に解されている。梶原⁸⁾⁻¹⁴⁾ は, 林分相対幹曲線を基にして, 林分の全幹材積, 利用材積の推定に関して, 一連の研究結果を発表している。

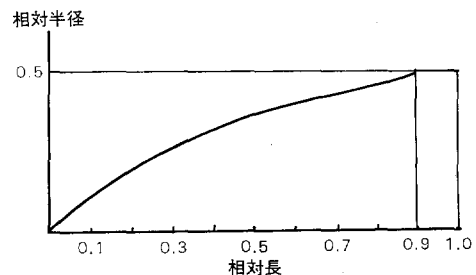


Fig. 2. 相 対 幹 曲 線

相対幹形で表された樹幹の縦断面を示す細り曲線式は、長さが等間隔にとられているときは、多項式による当てはめが有効である。大隅¹⁶⁾は、吉野地方のスギについて、形状度別に四つのグループに分けて、グループごとに次に示す 3 次の多項式を相対幹形に対して当てはめて、その適合度は良好であったと報告している。

$$\frac{d}{2d_{0.9}} = b_1 \left(\frac{H-h_m}{H} \right) + b_2 \left(\frac{H-h_m}{H} \right)^2 + b_3 \left(\frac{H-h_m}{H} \right)^3 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 d は地上から h_m の高さにおける直径、 $d_{0.9}$ は $\frac{H-h_m}{H}=0.9$ の位置における直径、 H は樹高、 b_1, b_2, b_3 は係数である。

MATTE¹⁵⁾は、ロブロリイパインの胸高以上の縦断面が次式で表されると述べている。

$$\frac{d}{d_{b.h.}} = \frac{H-h_m}{h_{b.h.}} \left(b_1 \left(\frac{H-h_m}{h_{b.h.}} \right)^2 + b_2 \left(\frac{H-h_m}{h_{b.h.}} \right) + b_3 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 $d_{b.h.}$ は胸高における皮内直径、 $h_{b.h.}$ は胸高以上の樹高である。

GINRGIN⁶⁾は、 $\frac{d}{d_{0.9}}$ と相対の高さとの関係を 15 次の多項式で当てはめた。この場合、 $d_{0.9}$ は皮付胸高直径と樹高の関数として推定している。

D. BRUCE ら²⁾は、MATTE と GIURGIN の方法を拡張して、レッドアルダーについての細り曲線式を求めている。まず、基礎的な細り曲線式として、胸高における皮内直径 ($d_{b.h.}$) を基にした相対直径と相対樹高の関係を、次式によって求め、適合性を検討した。

$$\left(\frac{d}{d_{b.h.}} \right)^2 - 1 = b_1(x^{n_1}-1) + \dots\dots\dots + b_k(x^{n_k}-1) \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $x = (H-h_m)/(H-4.5)$

$$\sum b_i = 1$$

である。逐次回帰法を用いて、 n_i の数値の範囲を調べた結果、 $\frac{3}{2}, 2, 40$ 、または $\frac{3}{2}, 3, 30$ が平均的な樹幹縦断面を近似的に表していると推論した。樹木の大きさによってグループ分けして求めた (3) 式の係数が、胸高直径 (D) と樹高 (H) の関数となることから、 $[f(D, H)] [x^{n_i} - x^{n_j}]$ の項を入れて、(3) 式の一般化を計ったが、良好な結果が得られなかった。その原因として、相対直径の基準となる直径位置が胸高のため、樹高が異なれば異なる相対位置を表すためと考え、 $0.1H$ の位置の直径 ($d_{0.9}$) を次式で推定し、この直径を基準とした相対直径による幹曲線式を求めた。

$$(d_{0.9}^2)_{est.} = 0.761 D^2 - 0.00268 D^3 + 7.75 \left(\frac{D^2}{H} \right) \quad \dots\dots\dots (4)$$

この式の標準誤差は 0.049、重相関係数は 0.62 であった。

全測定値をこみにして

$$d^2 / (d_{0.9}^2)_{est.} = b_1 x^{n_1} + \dots\dots\dots + b_k x^{n_k} \quad \dots\dots\dots (5)$$

を逐次回帰法で解いた結果、相対直径の推定式として

$$d^2 / (d_{0.9}^2)_{est.} = b_1 x^{\frac{1}{2}} - b_2 x^3 + b_3 x^{32} \quad \dots\dots\dots (6)$$

を得た。ここで $x = \frac{H-h_m}{0.9H}$

(6) 式を基礎にして、あらゆる大きさの木について、梢頭と $0.1H$ で一致する曲線群を表す式として、次式を採用した。

$$\left(\frac{d^2}{(d_{0.9})_{est.}} - x^{\frac{1}{2}}\right) = \sum b_i (n_i - x^{n_i}) f(D, H) \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで,

$f(D, H) = b_1 D + b_2 D^2 + b_3 D^3 + b_4 DH + b_5 H$ として, (7) 式を配列しなおすと,

$$\begin{aligned} d_{est.}^2 = & (d_{0.9}^2)_{est.} \{ x^{\frac{1}{2}} + 2.97(x^{32} - x^{\frac{1}{2}})(D)(10^{-8}) \\ & - 8.40(x^{32} - x^{\frac{1}{2}})(D^2)(10^{-6}) + 2.93(x^3 - x^{\frac{1}{2}})(D)(H)(10^{-4}) \\ & - 9.67(x^3 - x^{\frac{1}{2}})(H)(10^{-8}) \} \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

が求められる。

この式は合理的な結果を与えるが, 同じ基準直径に対して $d_{0.9}$ の値が樹高によって変わるので, すべての曲線が胸高位置で共通点を持つような制限を満足する方程式を最終の細り曲線式とすることとした。

$$\left(\frac{d}{D}\right)^2 = b_0 x^{\frac{1}{2}} + \sum b_j [f(D, H)] (x^{n_i} - x^{n_j}) \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで, $x = \frac{H - h_m}{H - 4.5}$

$b_0 x^{\frac{1}{2}}$ を除く項は, 胸高では 0 となるから, $b_0 = (\frac{d_{0.9}}{D})^2$ となる。したがって, 胸高における皮付直径と皮内直径の平方の比を求め, $f(D, H)$ に (8) 式と幾分異なる関係式を用い, 次のような細り曲線式を最終的に決定した。

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{D}\right)^2 = & 9.127 (x^{\frac{1}{2}})(10^{-1}) - 1.976(x^{\frac{1}{2}} - x^3)(D)(10^{-2}) \\ & + 8.238 (x^{\frac{1}{2}} - x^3)(H)(10^{-8}) - 4.964(x^{\frac{1}{2}} - x^{32})(D)(H)(10^{-6}) \\ & + 3.773 (x^{\frac{1}{2}} - x^{32})(H^{\frac{1}{2}})(10^{-8}) - 7.417(x^{\frac{1}{2}} - x^{40})(H^2)(10^{-6}) \\ & \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

さらに, (10) 式を基本にして, 円柱体材積と皮内幹材積の比を表す形数, この形数を用いた全幹材積, 利用可能材積などを求めている。

MUNRO は, カナダのブリティッシュ・コロンビア州の主要樹種によく当てはまる 2 次の放物線式を発表し, KOZAK ら⁶⁾ は, これをロジポール・パインに当てはめて, 次式を得ている。

$$d = D \sqrt{1.07923 - 1.1175 h_m / (H - 4.5)} \quad \dots\dots\dots (11)$$

標準誤差は 0.662 インチであった。この式は, 一般式として次のように変形できる。

$$\left(\frac{d}{D}\right)^2 = b_0 + b_1 h_m / (H - 4.5) \quad \dots\dots\dots (12)$$

また KOZAK ら⁷⁾ は, 別に 2 次の放物線式にデータを当てはめた場合の実例を報告しているが, これについては, あとで述べる。

BEHRE¹⁾ は, 次式を用いて胸高以上の幹形を表現している。

$$\frac{d}{D} = \frac{l}{a_0 + a_1 l} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここに, l は胸高以上の部分の長さに対する比で示された相対長である。

寺崎 渡は, 指数関数式を提案している。

以上述べたほかにも, 幹形を表すために, 種々な幹曲線式への当てはめが試みられている。ここでは, 放物線式, 相対幹曲線式および立木幹材積式として用いられている対数式から対数幹曲線式を導く方法, D. BUCSE らの多項式による方法を用いて, 最も適合性の良い幹曲線を用いた利用材積表の作成方法を検討することとした。

Ⅲ 各種幹曲線式の当てはめと幹材積の算出

1. 資 料

解析に用いたデータは、東京営林局大子営林署管内と前橋営林局大田原営林署内の国有林から収集されたスギで、それぞれ 126 本、61 本である。他に、立木幹材積表調製で使用した資料のなかから東京営林局管内のスギ 259 本を抽出して使用した。それらのデータの範囲および平均値は Table 1 に示した（以下、大子営林署管内のデータは大子データ、大田原営林署内のデータは大田原データ、東京営林局管内のデータは東京データということとする）。

各林木の上部直径の測定位置は、大子と大田原のデータについては、皮付直径では地際から 1 m までは 25 cm 間隔、胸高位置、2 m とし、2 m 以上では 1 m 間隔である。皮内直径は、胸高位置までは皮付と同じであるが、胸高の次は 3 m で、それ以上は 2 m 間隔で測定されている。

Ⅲの 2 以下の検討において主に使われているデータは、大子のデータであり、大田原のデータは、根張りの影響の検討についてだけ使用している。また、幹曲線式の当てはめに用いた樹幹上の測定点は、根張りに関する検討のほかは、地上 1.0 m 以下の幹足部分と上部直径 3 cm 未満の梢頭部分を除いた主幹部分を用いた。その理由として、実際に推定上部直径を必要とするのは、一番丸太の末口直径から最小丸太の末口直径までなので、特に幹曲線式への当てはまりが悪いと考えられる部分を除外したものである。

Ⅲの 3 の幹材積式推定に用いた材積としては、大子データは地際から上をスマリアン式で求めた材積を用い、東京データは、実際に立木幹材積調製で使用した材積を用いた。東京データの上部直径の測定位置は、地際から 1 m、3 m と奇数ごとに測られている。また、幹曲線式の当てはめに用いるデータの範囲は、大子データの場合と同様、梢端近くの 3 cm 未満の値は除外した。

2. 放物線で表した幹曲線式

Kozak ら⁷⁾は、ブリティッシュ・コロンビア州の主要樹種について幹曲線式の検討を行った。基本式として次式を用いた。

$$\left(\frac{d}{D}\right)^2 = a_0 + a_1\left(\frac{h}{H}\right) + a_2\left(\frac{h}{H}\right)^2 \quad \dots\dots\dots(14)$$

ここで、 d は高さ h における皮内直径

h は地上からの任意の高さ

D は皮付胸高直径

H は樹高

(14) 式を最小二乗法で求めた結果、多くの場合 0.3H 以上の位置の直径が過大に推定されることがわかつ

Table 1. 供 試 木 の 内 容

地 域	本 数	範 囲		平 均 値	
		直 径	樹 高	直 径	樹 高
大 子 営 林 署 管 内 ス ギ	126	cm	m	cm	m
大田原 " "	61	5.6—60.5	5.84—34.74	20.5	16.54
東京営林局管内スギ(材積表データ)	259	7.5—42.8	7.21—27.82	22.6	19.65
		5.9—59.7	4.8—36.1	23.7	17.41

たと述べている。そこで、 $h=H$ のとき $d=0$ となる条件として、 $a_0=-a_1-a_2$ を (14) 式に代入し、次式を得た。

$$\left(\frac{d}{D}\right)^2 = a_1\left(\frac{h}{H}-1\right) + a_2\left(\frac{h^2}{H^2}-1\right) \quad \dots\dots\dots(15)$$

これについては、大部分の樹種については満足のいく結果を与えたが、コースタル・スプリースとシーダーについては、 $0.9H$ 以上の直径の推定値が負となった。この欠点を除くための条件を(14)式に入れて、この両樹種に対しては、次式を適用した。

$$\left(\frac{d}{D}\right)^2 = a_2\left(1-2\frac{h}{H}+\frac{h^2}{H^2}\right) \quad \dots\dots\dots(16)$$

この結果、19 樹種に対する (15) 式、(16) 式による推定値の標準誤差は、0.58～2.77 インチで、平均して 1.17 インチであった。

なお、上部直径の推定は、制約条件によって消去した係数を次式で求め、(14)式により求めている。すなわち、(15)式に対しては

$$a_0 = -a_1 - a_2$$

(16)式に対しては

$$a_0 = a_2, \quad a_1 = -2a_2$$

を用いている。

一般に、幹曲線式は地際から梢端までの樹幹縦断面を表すことを目的としているが、これを単一の式で表示するのは、非常に困難である。特に梢頭部分と幹足部分を含めると、式の当てはまりが不安定になる。

ここで、幹足部分が樹幹全体に対して、どのような影響を及ぼしているかを、大田原データについて検討した。すなわち、(14) 式と (15) 式について、地際を 0 cm から 25 cm, 50 cm, 75 cm, 1 m と順次上げ、幹曲線を当てはめる出発点を加えた式について検討した。同様の当てはめは、(14), (15) 式のはかに、両式に 3 乗、4 乗の項まで加えた式についても検討した。

地際から梢頭までの樹幹全体について求めた推定式を用い、個々のデータの上部直径を推定すると、根張りの部分の直径は過少に、また、梢頭に近い直径は過大に、あるいは過少に推定され、樹木によりまちまちで、しかも大きな偏りのあることがわかった。幹曲線の出発点を順次上げる場合、式の中の H と h 値は次のように変わる。真の地際と仮の地際の差を X とすると、 $H'=H-X$, $h'=h-X$ となる。Table 2 に、幹曲線の出発点を变化させて (14), (15) 式により求めた推定値の標準誤差を示した。なお、標準誤差は特に断わりのない限り、次式を用いた。

$$\text{標準誤差} = [\Sigma(d-\hat{d})^2/(n-m-1)]^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots(17)$$

ここに、 d , $\hat{d}$ は実測および推定直径

n は測定値の数

m は独立変数の数

表の内容を式のなかの次数を変化させた場合についてみると、標準誤差は 4 次の項までを加えたときが最も小さく、3 次の項までのときが最も大きい。また幹曲線の出発点の位置を変化させた場合では、標準誤差は、いずれも出発点の位置が高くなるにしたがって、小さい値となっているのがわかる。例えば、(14) 式の 2 次式では、出発点が 0 cm では 2.66 cm であるが、1 m にあげた場合には 0.87 cm となり、かなり減小している。なかでも、(15) 式を 4 次の項までを用いた式では、出発点を 1 m に仮定したときに

Table 2. 根張りの影響の検討 (大田原データ)

測定範囲	方法	測定点	2 次 式		3 次 式		4 次 式	
			(14)式	(15)式	(14)式	(15)式	(14)式	(15)式
m 0.00~	A	1432	2.66	2.33	3.24	2.78	2.53	2.71
	B	1367	2.49	2.36	2.55	2.68	2.28	2.47
0.25~	A	1371	1.23	1.37	1.95	1.55	1.15	1.03
	B	1306	1.23	1.30	1.30	1.44	0.99	1.04
0.50~	A	1310	1.14	1.29	1.59	1.27	0.91	0.81
	B	1245	0.94	1.18	1.01	1.16	0.80	0.80
0.75~	A	1249	1.22	1.32	1.47	1.17	0.84	0.76
	B	1184	0.88	1.19	0.92	1.07	0.76	0.77
1.00~	A	1188	1.31	1.36	1.40	1.13	0.83	0.75
	B	1123	0.87	1.23	0.88	1.03	0.76	0.76

0.75 cm まで小さくなることから考えて、根張りの影響がいかに大きく作用しているかがわかる。

つぎに、根張りの部分と同様に不安定な当てはまりの状態を示す梢頭部分について調べるために、Table 2 のなかの A と B を比較してみよう。A と B は、標準誤差の計算において、同一の推定式を用いているが、A はすべての測定点を含んでいるのに対して、B は梢頭近くの 3 cm 以下の直径を機械的に除いたものである。Table 2 によると、2 次、3 次式は、ほとんどが B が A より小さい値を示している。4 次式では、(15) 式が 25 cm、50 cm、75 cm、1 m 以上の樹幹に対しては、A と B の値がほぼ等しく、その他は B が A より小さい。このように、ほとんどが A より B の値が小さいということは、B には直径 3 cm 以下の梢頭部分が含まれていないので、当然の結果といえようが、梢頭近くの当てはまりが悪く、偏りのあることが数字の上から示されたことになる。

以上のデータは、比較的幹形の整った林木 (大田原データ) を選んだために、計算値は現実のデータより良い値となっているはずである。そのため、このデータの使用は、ここで行った幹足部分の傾向をつかむための目的にとどめ、このあとの計算は、大子データを使用することとする。

大田原データの例から、放物線式によると、幹足部分と梢頭部分の当てはまりが不安定であることが示された。また、実際に求めたい樹木の末口直径の大きさから考えて、データを当てはめる範囲は、胸高位置から梢頭部 3 cm 未満の直径を除いた部分について計算してもよいのではないかと判断して、その部分について、皮付直径および皮内直径の当てはめを行った。その結果は、Table 3 および Table 4 に示されている。これらの表のなかの数値で共通しているのは、標準誤差の値は、樹高が低いと小さいが、高くなるにしたがって大きくなることである。特に樹高 20~24 m 級と 25 m 以上の級は、それらの級と直前の級とでは大きな差があり、精度が悪いのがわかる。個々の木について推定値を求め、測定値と比べると、樹高が低い木は全体に良く適合しているが、高くなると適合する木、しない木があり、木によりまちまちである。この場合、梢頭部分において負で推定される直径もあり、その位置は梢端から $0.1H$ 以内である。このように梢頭部分の直径が負で推定される木が、樹高の高い木に多く現れる理由を考えてみよう。いま使用しているデータは、樹高の大小に関係なく上部直径 3 cm 未満を除外している。上部直径 3 cm 未満というと、例えば樹高 10 m の木は、地上から 7 m か 8 m から上、つまり梢端から $0.2H$ か $0.3H$ は除

Table 3. 放物線式の推定係数(I) (大子データ, 皮付平均直径)

樹 高 級	本数	測定点	a_0	a_1	a_2	S. E.
~ 9.49 ^m	20 ^本	118	0.990410	-0.930825	-0.067701	0.25
9.5~14.49	38	382	0.984749	-0.952473	-0.109915	0.44
14.5~19.49	34	512	0.966680	-0.979699	-0.044095	0.56
19.5~24.49	13	251	0.936783	-1.121816	0.121324	1.65
24.5~	21	577	0.918867	-1.343310	0.372769	2.50
全 体	126	1840	0.955672	-1.101674	0.081632	2.26

Table 4. 放物線式の推定係数(II) (大子データ, 皮内最小直径)

樹 高 級	本数	測定点	a_0	a_1	a_2	S. E.
~ 9.49 ^m	20 ^本	61	0.881148	-0.914533	0.033694	0.23
9.5~14.49	38	193	0.881620	-0.912118	-0.037408	0.42
14.5~19.49	34	265	0.881782	-0.938689	-0.001709	0.56
19.5~24.49	13	127	0.868586	-1.096547	0.169229	1.38
24.5~	21	292	0.831710	-1.244025	0.366790	2.30
全 体	126	938	0.866803	-1.049852	0.124349	2.07

Table 5. Table 3 の係数による(14)式の右辺の値

樹 高 級	$\frac{h}{H}$ の 値					
	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.99
~ 9.49 ^m	0.08740	0.07675	0.06620	0.05561	0.04503	0.00254
9.5~14.49	0.02698	0.01544	0.00388	-0.00770	-0.01930	-0.06593
14.5~19.49	0.03864	0.02803	0.01742	0.00680	-0.00383	-0.04644
19.5~24.49	0.01640	0.00740	-0.00157	-0.07783	-0.01945	-0.05491
24.5~	0.00514	-0.00147	-0.00800	-0.01447	-0.02085	-0.04566
全 体	0.02075	0.01123	0.00172	-0.00777	-0.01725	-0.05498

かれることになる。一方、30 m の木は、直径 3 cm の位置は地上 28 m くらいで、梢端から $0.1H$ 以内も、使用データの対象となっている。そのため、樹高の高い木は、梢端近くの当てはまりの悪い部分が含まれることになり、樹高の低い木に比べて、標準誤差が大きくなったと考えられる。ここで、 $\frac{h}{H}$ がどのくらいの割合になると推定直径が負に移行するかを、Table 3 の係数を用いて検討しよう。Table 5 には、(14) 式の右辺の値が、 $\frac{h}{H}=0.91$ から 0.99 について示されている。この表によると、最も樹高の低い 9.49 m 以下の級は、負の値は示されていないが、 $h=H$ の点では負の推定となる。次の 10 m 以上の級では、10 m の木で 9.4 m で負となり、さらに 15 m の木で 14.5 m、そして 30 m の木では 27.6 m を限度として、推定直径は負に移行している。このように木が大きくなると上部約 8 % の直径は負で推定されることになる。

Kozak らの例では、さきに述べたように、(14) 式は $0.3H$ 以上の直径が過大推定となるために、(15) 式を用いている。この例で用いている大子データは、Kozak らの例とは逆に梢頭部分で過小推定となって

いるが、(15) 式は、 $h=H$ のとき、 $d=0$ の条件を適用しているので、ここでは大子データについて、(15) 式を当てはめることにした。データとして皮付平均直径を用いた結果、梢頭部分で過大推定となり、(14) 式が負の傾向になるのとは対称的であった。この場合の推定値の標準誤差は、0.25 cm～2.40 cm であった。これは、(14) 式により求めた Table 3 の値とほぼ等しい。

この場合は、直径 3 cm 未満を除いているが、3 cm 以下の測定値も全部含めて同様の計算を行ったところ、推定値の標準誤差は、(14) 式で 2.51 cm、(15) 式で 2.61 cm となり、多少大きな値となった。また、(16) 式では、樹幹中央から上部にかけて過少推定となり、この例においては、実用性は見い出せなかった。

つぎに、樹高が高いと誤差が大きくなる原因の一つとして、高い木は胸高位置でも根張りの影響があるためと考えられる。その影響を除くために、(14) 式の従属変量 $\left(\frac{d}{D}\right)^2$ の D に胸高直径を用いていたのを $d_{0.9}$ (梢端から $0.9H$ の位置の直径) に置きかえて、検討した。そして、樹幹上の当てはめの範囲は、 $0.1H \sim 0.9H$ についても行った。ただし、これまでと同じデータ (胸高位置以上の測定値) を利用したので、樹高 12 m 以下の木の $0.1H$ の位置の直径は、胸高直径を用いることとした。この結果は、Table 6 に四通りの方法で求めた幹曲線式の標準誤差で示してある。Table 6 から、基準直径として、胸高直径より $d_{0.9}$ を用いたほうが精度がよく、また、一律に 3 cm 未満の直径を除外したときより、梢端から $0.1H$ の直径を除外した場合のほうが良い精度で推定されることがわかる。しかし、 $0.1H \sim 0.9H$ の範囲について当てはめた場合、基準直径が胸高直径と $d_{0.9}$ のいずれの場合においても、 $0.9H$ 点における推定直径は負であった。一般に、樹高が高くなると幹形は多様になるため、それらを一まとめにして同一の式に当てはめようとするに無理があるように思われる。(14) 式は、今まで述べた程度の誤差を許すことができれば、実用面からみると有効であろう。しかし使用目的により、もっと正確なものを望むならば、後述する相対幹曲線の形状の指標として用いている $\eta_{0.5}$ (樹幹中央直と梢端から $0.9H$ の直径との比) の値別にグループ分けする方法を用いることもできる。

さて、(14) 式から、樹幹上の任意の大きさの直径までの高さは、次式によって求められる。

$$h = (-a_1 H - \sqrt{(a_1 H)^2 - 4a_2(a_0 H^2 - d^2 H^2 / D^2)}) / 2a_2 \quad \dots\dots\dots(18)$$

Table 6. 従属変量 $\left(\frac{d}{D}\right)^2$ の D と樹幹上の適用範囲を変えた場合の標準誤差

基準直径 の位置	胸 高 直 径				$\frac{1}{10} H$ の 直 径			
	胸高位置～3cm未満の 直径を除く		$\frac{1}{10} H \sim \frac{9}{10} H$		胸高位置～3cm未満の 直径を除く		$\frac{1}{10} H \sim \frac{9}{10} H$	
樹 高 級	測定点	S. E.	測定点	S. E.	測定点	S. E.	測定点	S. E.
～ 9.49 ^m	118	0.25	131	0.27	118	0.25	131	0.27
9.5～14.49	382	0.44	372	0.44	382	0.44	372	0.44
14.5～19.49	512	0.56	473	0.56	512	0.54	473	0.54
19.5～24.49	251	1.65	216	1.56	251	1.43	216	1.21
24.5～	577	2.50	491	2.24	577	2.22	491	1.94
全 体	1840	2.26	1683	2.19	1840	1.65	1683	1.37

また、単木材積は (19) 式、樹幹上の区間 l_1 から l_2 までの丸太材積は、(20) 式から求められる。

$$V = \frac{\pi D^2}{4} \int_0^H \left[a_0 + a_1 \frac{h}{H} + a_2 \frac{h^2}{H^2} \right] dh$$

$$= \frac{\pi D^2}{4} H \left(a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} \right) \dots\dots\dots (19)$$

$$V' = \frac{\pi D^2}{4} \int_{l_1}^{l_2} \left[a_0 + a_1 \frac{h}{H} + a_2 \frac{h^2}{H^2} \right] dh$$

$$= \frac{\pi}{4} D^2 \left[a_0(l_2 - l_1) + a_1(l_2^2 - l_1^2)/2H + a_2(l_2^3 - l_1^3)/3H^2 \right] \dots\dots\dots (20)$$

このように、幹曲線式の推定係数が求められていれば、任意の長さの丸太材積は、胸高直径と樹高の測定値だけから簡単に求められるので、便利であろう。

3. 材積式から誘導した幹曲線式

材積式は、適当な細り曲線式を積分した形で決めるのが合理的であるが、現実には経験的な回帰方程式による材積式から幹材積表が調製され、広く使用されている。このことから、幹材積は、このような式で満足のいく推定が可能であると判断してよいだろう。

したがって、材積式から求められる材積と幹曲線式の積分値として求められる材積が一致するような幹曲線式を、材積式から導かれることが望ましい。J. P. DEMAERSHALK(1972)³⁾ は、対数材積式

$$\log V = a_0 + a_1 \log D + a_2 \log H \dots\dots\dots (21)$$

を対数幹曲線式

$$\log d = b_0 + b_1 \log D + b_2 \log l + b_3 \log H \dots\dots\dots (22)$$

に変換している。

ここに、 V = 皮内材積

D = 皮付胸高直径

H = 樹高

d = 任意に与えられた梢端からの長さ l における皮内直径

a_0, a_1, a_2 = 材積式の係数

$$b_0 = \log(10^{a_0} p a_2 / K)^{\frac{1}{2}}$$

$$b_1 = a_1 / 2$$

$$b_2 = (p a_2 - 1) / 2$$

$$b_3 = (1 - p) a_2 / 2$$

$$K : \frac{\pi}{4} \cdot 100^{-2}$$

$$p : (a_2 - 2b_3) a_2$$

これらを (22) 式に代入すると

$$\log d = \log(10^{a_0} p a_2 / K)^{\frac{1}{2}} + \frac{a_1}{2} \log D + \frac{(p a_2 - 1)}{2} \log l + \frac{(1 - p) a_2}{2} \log H$$

$$\dots\dots\dots (23)$$

となる。 p を除いたパラメータは、(21) 式の材積式により求められるので、 p を標本木から求めれば、(22) 式の係数 b_0, b_1, b_2, b_3 が得られる。 p の値は、DEMAERSHALK の例では、23 樹種に対して 2.07~2.85 の間にあり、幹曲線式に対する推定値の標準誤差は、材積式から導いた式では 0.421~2.322 インチ、直接 (22) 式に当てはめた場合では 0.245~2.431 インチであった。(22) 式は

$$d = 10^{b_0} D^{b_1} l^{b_2} H^{b_3} \quad \dots\dots\dots (24)$$

で表される。材積は次式で求められる。

$$V = K \cdot \int_0^H d^2 dl \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\text{ここに, } d^2 = 10^{2b_0} D^{2b_1} l^{2b_2} H^{2b_3} \quad \dots\dots\dots (26)$$

(26) 式を (25) 式に代入すると

$$\begin{aligned} V &= K \cdot 10^{2b_0} \int_0^H D^{2b_1} l^{2b_2} H^{2b_3} dl \\ &= K \cdot 10^{2b_0} D^{2b_1} H^{2b_3+1} / (2b_2+1) \quad \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

となり、対数形に変換すると、次式で表される。

$$\log V = a_0 + a_1 \log D + a_2 \log H \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$\text{ここに, } a_0 = \log \{ (K \cdot 10^{2b_0}) / (2b_2+1) \}$$

$$a_1 = 2b_1$$

$$a_2 = 2b_2 + 2b_3 + 1$$

任意の上部直径 d までの梢端からの長さ l は、(24) 式から次によって求められる。

$$l = (10^{-b_0} d D^{-b_1} H^{-b_3})^{\frac{1}{b_2}} \quad \dots\dots\dots (29)$$

丸太材積は、(25) 式において、積分区間 l_1, l_2 を設ければ、欲する長さについて求めることができる。

$$\begin{aligned} V &= K \cdot \int_{l_2}^{l_1} d^2 dl \\ &= K \cdot 10^{2b_0} \cdot D^{2b_1} \cdot H^{2b_3} (l_1^{2b_2+1} - l_2^{2b_2+1}) / (2b_2+1) \\ &\quad \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

このように、幹曲線式の積分値として幹材積が求められるし、丸太材積の算出により、利用可能材積の推定値は、立木幹材積と関連して求られる。なお、(21) 式から計算される材積と (25) 式から計算される材積は、当然のことながら同一値となる。

(21) 式は、我が国の立木幹材積表調製において、広く用いられている式である。したがって、この方法は、幹曲線式および利用可能材積の推定に際して、非常に都合だと考えられる。

上部皮内直径の測定値があれば、この方法により皮内末口直径、皮内丸太材積の推定値が直接求められるが、皮付末口直径の測定値のみのときは、同様の方法で皮付直径について推定する。そして、あとで述べる皮付直径を皮内直径に変換する方法を用いて、皮内直径の推定を行う。例えば、立木幹材積表調製データを活用するときには、この方法が利用できるであろう。しかし、この場合は、皮内直径の推定にとどまり、皮皮内幹材積および丸太材積の推定値は直接求められないので、皮付推定値に利用率を乗ずるなどの方法が必要となる。

ここで、実際のデータを用いて検討しよう。データとして、大子データおよび立木幹材積表調製資料として用いた東京データの一部を用い、以上述べたことについて計算した。これらの計算は、大子データでは皮付直径と皮内直径について行い、東京データは皮付直径のみについて行った。

(1) 大子データの皮付直径

まず、データを樹高級にわけて、(21) 式を用いて材積式を計算した。この場合、樹高級にわかる前に異常資料を除くために、全資料による棄却検定を行った。その結果、2本の異常資料が棄却された。126本はそれを除いた本数である。樹高級別の材積式の係数は Table 7 のとおりである。データを直接 (22) 式に当てはめる方法、および、材積式の係数から (23) 式の係数を導く方法の係数および推定値の標準誤

Table 7. 樹高級別皮付材積式の推定係数 (大子データ)

樹 高 級	本 数	a_0	a_1	a_2	重相関係数
~ 9.49 ^m	20 ^本	-4.015335	1.828201	0.833827	0.996
9.5~14.49	38	-4.229388	1.900030	0.980313	0.989
14.5~19.49	34	-4.370744	1.993999	0.994670	0.994
19.5~24.49	13	-4.984843	1.707157	1.749010	0.992
24.5~	21	-4.085501	1.483557	1.311898	0.977
全 体	126	-4.115210	1.824961	0.950515	0.999

Table 8. (22)式, (23)式の推定係数と標準誤差 (大子データ, 皮付き)

樹 高 級	本数	測定点	式	b_0	b_1	b_2	b_3	p	S. E.
~ 9.49 ^m	20 ^本	118	(22)	0.202766	0.876212	0.496446	-0.562839	2.39	0.24
			(23)	0.194513	0.914100	0.496368	-0.579454		0.27
9.5~14.49	38	382	(22)	0.078414	0.838186	0.605100	-0.483044	2.25	0.50
			(23)	0.109933	0.950015	0.604874	-0.614718		0.52
14.5~19.49	34	512	(22)	0.015024	0.879015	0.621497	-0.489222	2.26	0.71
			(23)	0.042528	0.996999	0.621650	-0.624315		0.73
19.5~24.49	13	251	(22)	-0.391743	0.657037	0.746681	-0.038392	1.42	1.56
			(23)	-0.241666	0.853578	0.746155	-0.371650		1.58
24.5~	21	577	(22)	0.489705	0.452629	0.856569	-0.551576	2.07	2.13
			(23)	0.226539	0.741778	0.857190	-0.701241		2.09
全 体	126	1840	(22)	0.219250	0.765870	0.728555	-0.623332	2.60	1.51
			(23)	0.190981	0.912480	0.733764	-0.758507		1.50

差を求めると, Table 8 のようになる。なお, (23) 式の中の p は, 農林計算センターのライブラリー, 最小二乗法解析汎用プログラム SALS (Statistical Analysis with Least Squares fitting) を用いて, 求めた。

Table 8 から (22) 式 (23) 式別の差はほとんど認められないことがわかる。また, さきに同じデータを用いて (14) 式により推定した Table 3 の標準誤差と比べると, 樹高 25 m 以下の四つの級では, ほぼ同じ精度である。しかし, 25 m 以上の級では, (14) 式が 2.50 cm であるのに対し, (22) 式 2.13 cm, (23) 式 2.09 cm, またデータ全体では, (14) 式 2.26 cm に対し, (22) 式 1.51 cm, (23) 式 1.50 cm となり, 材積式から誘導した幹曲線による推定方式のほうがよいことがわかる。単木ごとの個々の測定点に対する推定直径は, 梢頭部分でも良く適合する木が多いのが特徴的であった。

(2) 東京データの皮付直径

261 本について資料の棄却検定を行い, 2 本の異常資料を棄却した。そして, 残り 259 本を 10 cm 直径級にわけて, 級ごとの材積式を求めた。これまでの級分けは, 樹高について行ってきたが, ここでは, 材積表との関連において, 直径級を用いることにした。材積式の係数は, Table 9 に示してある。幹曲線式の係数と推定値の標準誤差は, Table 10 のとおりである。

Table 10 の中の右端 () の数字は, 現在使用されている材積式の係数を用いて (22) 式を導き, そ

Table 9. 直径級別皮付材積式の推定係数 (東京データ)

直径級	本数	a_0	a_1	a_2	R
~10 ^{cm}	33本	-4.200491	1.848763	0.970885	0.996
12~20	65	-4.270816	1.950405	0.941676	0.995
22~30	56	-4.120717	1.778773	1.007346	0.986
32~40	52	-4.048884	1.671719	1.081184	0.980
42~	53	-4.081269	1.661178	1.115554	0.980
全体	259	-4.224943	1.828281	1.028502	0.999

Table 10. (22)式の推定係数と標準誤差 (東京データ, 皮付直径)

直径級	本数	測定点	式	b_0	b_1	b_2	b_3	p	S. E.
cm ~10	33	146	(22)	0.166374	0.877976	0.598418	-0.610877	2.26	0.31
			(23)	0.123318	0.924381	0.599478	-0.614035		0.31(0.31)
12~20	65	446	(22)	0.068480	0.941692	0.667908	-0.632813	2.48	0.64
			(23)	0.101147	0.975202	0.667265	-0.696427		0.63 (0.92)
22~30	56	557	(22)	0.253726	0.800403	0.721111	-0.671023	2.42	1.13
			(23)	0.186010	0.889386	0.721229	-0.717556		1.10
32~40	52	638	(22)	0.087532	0.846144	0.733933	-0.605437	2.28	1.57
			(23)	0.224069	0.835859	0.733338	-0.692746		1.53(1.57)
42~	*52	737	(22)	0.220574	0.641573	0.781815	-0.506462	2.30	2.35
			(23)	0.216012	0.830589	0.780421	-0.722644		2.10(2.19)
全体	*258	2524	(22)	0.137747	0.808933	0.734378	-0.603306	2.40	1.52
			(23)	0.136449	0.914140	0.735667	-0.721417		1.49

注. 1. * 印は, 42 cm 以上の級で, 明らかな測定誤差があったので, 1本除外した。

2. S. E. の欄の () の数字は, 現行材積式の係数から推定幹曲線式を求め, S. E. を計算した。

の式を用いて計算した推定値の標準誤差である。したがって, 現行材積表で直径 12~20 cm, 22~30 cm の級が込みになっているため, この Table 10 においても 12~30 cm が一括されている。これによると, 新しく材積式を求めた場合においても, 既存の材積式の係数を用いた場合においても, それから求められる幹曲線式 ((22)式) のデータに対する当てはまりの精度には, 大きな差は認められなかった。これは, 新しい式のデータとして, 既存の式を算出したデータの一部を使用したため, 当然のことかもしれない。また, (22), (23) 式のいずれとも, 同じ程度の推定精度であった。

このデータは, さきに示した大子データより, 推定精度がわずかであるが劣っているが, これは, 両者のデータの収集目的の違いから, 厳密な比較はすべきではなからう。はっきりいえることは, 両方とも木が大きくなるにしたがって, 適合が悪くなるということである。データ全体としては, 大子, 東京の例ともに, 推定値の標準誤差は約 1.5 cm であった。

(3) 大子データの皮内直径

以上は皮付直径を用いて計算したが, ここでは大子データの皮付直径の場合と同じデータの皮内直径を用いて, 同様の計算を行った。すなわち, (21) 式の V を皮内材積, (22) 式の d を皮内直径として各式

Table 11. 樹高級別皮内材積式の推定係数（大子データ）

樹 高 級	本 数	a_0	a_1	a_2	R
～ 9.49 ^m	20 ^本	-4.158079	1.925239	0.827982	0.996
9.5～14.49	38	-4.335564	1.939697	0.987938	0.988
14.5～19.49	34	-4.466064	2.014838	1.013195	0.994
19.5～24.49	13	-4.920230	1.723051	1.651158	0.992
24.5～	21	-4.166844	1.421574	1.405202	0.977
全 体	126	-4.209571	1.822503	0.989118	0.999

Table 12. (22)式の推定係数と標準誤差（大子データ，皮内直径）

樹 高 級	本数	測定点	方法	b_0	b_1	b_2	b_3	p	S. E.
～ 9.49 ^m	20 ^本	61	イ	0.177283	0.898160	0.507118	-0.597475	2.44	0.24
			ロ	0.125825	0.962619	0.508760	-0.594769		0.26
9.5～14.49	38	193	イ	0.026542	0.905885	0.599813	-0.524572	2.23	0.45
			ロ	0.055768	0.969848	0.599412	-0.605443		0.49
14.5～19.49	34	265	イ	-0.068160	0.878889	0.645448	-0.462162	2.26	0.70
			ロ	-0.000587	1.007419	0.645378	-0.638781		0.75
19.5～24.49	13	127	イ	-0.330107	0.668922	0.784648	-0.146727	1.56	1.60
			ロ	-0.202209	0.861525	0.787881	-0.462302		1.63
24.5～	21	292	イ	0.408993	0.460829	0.863037	-0.529122	1.94	1.98
			ロ	0.186831	0.710787	0.863228	-0.660627		1.97
全 体	126	938	イ	0.169171	0.773823	0.742802	-0.625681	2.53	1.42
			ロ	0.146527	0.911251	0.749352	-0.754792		1.47

を解くと、Table 11 と Table 12 のようになった。推定精度は、皮付きデータの場合におおむね等しい。

DEMAERSHALK が行ったのは、この例と同じデータの形である。(22) または (30) 式を用いれば、任意の高さの皮内直径と任意の長さの丸太の皮内材積が、直接求められる。

なお、さきに述べた対数材積式から対数幹曲線式を導く際に必要とする p の値は、Table 8, Table 10, Table 12 のなかに示してあるとおりである。これらの表を見ると、大子データの 19.5～24.49 m の級を除いて、DEMAERSHALK の例の数値とほぼ等しかった。この級は、本数が少ないので、それが影響しているのではないかと考えられる。

4. 相対幹曲線式

前述したように、梶原¹⁸⁾ は相対直径列から相対幹曲線式を求めており、相対幹曲線の形状の指標として、樹幹中央直径と相対基準直径の比 $\frac{d_{0.5}}{d_{0.9}} = \eta_{0.5}$ （正形状商）を用いている。そしてスギ同齡林分では、単木の $\eta_{0.5}$ の個体間変動はそれ程大きくないので、林分相対幹曲線は、林分の $\eta_{0.5}$ によってほぼ完全に決まると述べている。 $\eta_{0.5}$ の性格として、高密度管理を行っている林分はその値は大きく、低密度管理の林分は小さい値を示している。したがって、これまでに一般にいわれている密度管理と樹幹の形状の関係と一致していると指摘している。

さて、これまで扱ってきた大子スギのデータは、いくつかの林小班から選ばれた林齡約 20～60 年の林

木である。これらのデータは、地域的には八溝山系に属しており、おおざっぱに言えば、条件が類似しているといえるが、一方、生育過程、地位などの異なった要因も多い。したがって、梶原が同齡単純林分を対象として、最終的に林分の幹材積および利用材積を推定した一連の研究とは異なっている。まして梶原が、林分相対幹曲線は、地域間はもちろん同一地方でも、林分間でかなり差があるとしていることから、例え類似している条件があるとはいえ、拡散した地域のなかから標本木が選ばれたとき、現実のデータに対して、推定幹曲線式がどのくらいの精度で適合するか疑問である。このようなことを念頭において、ここでは相対幹曲線式の推定について、梶原の方法¹⁸⁾¹⁹⁾を準用して実際のデータを用いて、検討した結果を示すことにする。

(1) 相対幹曲線式の計算

各林木の相対高に対する直径は、その実測値がないので計算により求めた。また、データとして使用しているのが胸高以上の測定値であるために、樹高 12 m 以下の木は、梢端から樹高の $\frac{9}{10}$ の位置は胸高以下となり、 $d_{0.9}$ の算出が不可能なので、便宜的に胸高直径を $d_{0.9}$ として用いた。また、12 m 以上の木について、測定値の補間により求めた $d_{0.9}$ と胸高直径の回帰式を求めると、次式が推定された。

$$d_{0.9} = 1.7522 + 0.8655 D \quad r = 0.998$$

この式を用いれば、胸高直径から、 $d_{0.9}$ がかなり高い精度で推定できる。なお、この場合、いずれの直径も皮付きの値である。

各林木の相対直径列の標準偏差と変動係数は、Table 13 のとおりである。

変動係数は、樹幹下部から上部にむかって、約 2 倍ずつ大きな値となっている。梶原の例では、15 林分

Table 13. 相対直径列の標準偏差と変動係数 (全体)

	$\eta_{0.9}$	$\eta_{0.7}$	$\eta_{0.5}$	$\eta_{0.3}$	$\eta_{0.1}$
平 均 値	1	0.8715	0.7324	0.5354	0.2107
標 準 偏 差	—	0.0278	0.0446	0.0609	0.0461
変 動 係 数 (%)	—	3.19	6.09	11.38	21.86

Table 14. $\eta_{0.5}$ 別の相対直径の標準偏差と変動係数

		$\eta_{0.9}$	$\eta_{0.7}$	$\eta_{0.5}$	$\eta_{0.3}$	$\eta_{0.1}$
$\eta_{0.5}=0.70$ $n=41$	平 均 値	1	0.8572	0.7024	0.5007	0.1930
	標 準 偏 差	—	0.0200	0.0149	0.0428	0.0364
	変 動 係 数 (%)	—	2.33	2.12	8.56	18.86
$\eta_{0.5}=0.75$ $n=56$	平 均 値	1	0.8784	0.7473	0.5566	0.2170
	標 準 偏 差	—	0.0163	0.0132	0.0358	0.0385
	変 動 係 数 (%)	—	1.85	1.76	6.43	17.73
$\eta_{0.5}=0.80$ $n=18$	平 均 値	1	0.9069	0.7968	0.6405	0.2597
	標 準 偏 差	—	0.0165	0.0119	0.0355	0.0400
	変 動 係 数 (%)	—	1.82	1.49	5.87	15.39

に対して $\eta_{0.7}$ は 2.5~4.5%, $\eta_{0.5}$ は 2.8~6.3%, $\eta_{0.3}$ は 5.2~8.9%, $\eta_{0.1}$ は 11.8~24.6% の間にあった。Table 13 の値は, $\eta_{0.8}$ を除き, いずれもこれらの範囲内にあるが, 樹幹上部の変動係数の値から, これらの部分における相対直径は不安定であることが示されている。特に $\eta_{0.8}$ では, 11.38% と大きな値を示し, 5.2~8.9% の範囲をオーバーしている。

同様の計算を $\eta_{0.5}$ をグループ分けして行ったら, Table 14 のようになった。Table 14 には, このデータの 91% を占める三つのグループについて, 相対直径列の平均値, 標準偏差, 変動係数の値が示されている。このように, $\eta_{0.5}$ により分けた結果は, 全体に比べると, かなり変動係数は小さくなっている。 $\eta_{0.5}$ を基準に分けたので, $\eta_{0.5}$ の変動係数が小さいのは当然のことであるが, $\eta_{0.8}$ が大分小さくなっているのに反し, 梢端から 0.1 H 点である $\eta_{0.1}$ は 15% 以上となり, 梢頭部ではやはり変動が大きいことがわかる。

つぎに, 相対幹曲線式推定の第一段階として, 次の関係を求めた。

$$\left. \begin{aligned} \eta_{0.1} &= a_1 + b_1 \eta_{0.5} \\ \eta_{0.8} &= a_2 + b_2 \eta_{0.5} \\ \eta_{0.7} &= a_3 + b_3 \eta_{0.5} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

これらの式の係数を求めると, 次のようになる。

直線回帰式	r	s
$\eta_{0.1} = -0.18683 + 0.53857 \eta_{0.5}$	0.51	0.041
$\eta_{0.8} = -0.30347 + 1.14536 \eta_{0.5}$	0.84	0.033
$\eta_{0.7} = 0.50977 + 0.49392 \eta_{0.5}$	0.79	0.017

r : 相関係数, s : 標準偏差

$$\dots\dots\dots (32)$$

$\eta_{0.1}$ は他の二つより $\eta_{0.5}$ との直線関係が弱いことがわかる。梶原も⁹⁾「樹幹の梢端寄りの部分が不安定になりがちな傾向は, 同一林分内の樹木間でも認められる。この部分に不安があるが, 主要部分については, 林分相対幹曲線は $\eta_{0.5}$ のみで相当正確に定められる。しかも $\eta_{0.5}$ は現実の推定がかなり容易な因子であることも考えあわせと, 利用可能な丸太量の推定において, きわめて好都合である」と述べているが, 単一林分という前提条件から離れた場合でも, 同じような傾向がみられる。

つぎの段階として, (32) の各式から $\eta_{0.5} = 0.60, 0.65, 0.70, 0.75, 0.80, 0.85$ のときの $\eta_{0.1}, \eta_{0.8}, \eta_{0.7}$ を推定すると, Table 15 に示した相対直径列が求められる。この値を用いて, (33) 式により相対幹曲線式を計算した。

$$y = ax + bx^2 + cx^3 \dots\dots\dots (33)$$

ここで, y : $d_{0.9}$ に対する皮付相対半径

x : 梢端からの樹高に対する相対長

この式は 3 次の相対幹曲線式であり, 樹幹の主要部について正確に幹曲線を与えるために, $\eta_{0.5}$ の値別に (0.9, 0.5), (0.7, $\frac{\eta_{0.5}}{2}$), (0.5, $\frac{\eta_{0.5}}{2}$) の点を通るように係数を定めた。それらの係数は, Table 16 に示した。

推定直径は, (33) 式に $x = (H - h)/H$ を代入して y を求め, $(2 \times y) \times d_{0.9}$ とすれば求められる。同様の方法により, 4 次の項を加えた場合の精度を検討するために, 全林木の $\eta_{0.5}$ の平均 0.73 の相対直径列を用いて, (0.9, 0.5), (0.7, $\frac{\eta_{0.7}}{2}$), (0.5, $\frac{\eta_{0.5}}{2}$), (0.3, $\frac{\eta_{0.3}}{2}$) を通る曲線式

Table 15. 相 対 直 径 列

η の 値	$\eta_{0.5}$	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85
$\eta_{0.9}$		1	1	1	1	1	1
$\eta_{0.7}$		0.806	0.831	0.856	0.880	0.905	0.925
$\eta_{0.5}$		0.600	0.650	0.700	0.750	0.800	0.850
$\eta_{0.3}$		0.384	0.441	0.498	0.556	0.613	0.670
$\eta_{0.1}$		0.136	0.163	0.190	0.217	0.244	0.271

Table 16. 相対幹曲線式の推定係数

$\eta_{0.5}$	a	b	c
0.60	0.678770	-0.183333	0.051587
0.65	0.871628	-0.558335	0.230160
0.70	1.064485	-0.933335	0.408731
0.75	1.265378	-1.333335	0.605160
0.80	1.458235	-1.708335	0.783731
0.85	1.651092	-2.083335	0.962301
$\bar{\eta}_{0.5}=0.73$	1.188235	-1.183336	0.533732

Table 17. 相対幹曲線式による $\eta_{0.5}$ 別の推定値の標準誤差

範 囲		① $\frac{1}{10}H \sim \frac{9}{10}H$		② 1.2m~上部 直径 3 cm	
$\eta_{0.5}$	本 数	測定点	S. E.	測定点	S. E.
0.60	4	78	0.89	92	1.05
0.65	6	119	0.69	138	1.00
0.70	41	654	0.98	732	1.04
0.75	56	688	0.61	737	0.61
0.80	18	138	0.26	136	0.27
0.85	1	6	0.39	5	0.55
$\bar{\eta}_{0.5}=0.73$	126	1683	1.67	1840	1.72

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 \quad \dots\dots\dots(34)$$

を求めた。推定式は次のようになった。

$$y = 1.234589x - 1.393769x^2 + 0.842759x^3 - 0.147156x^4 \quad \dots\dots\dots(35)$$

(2) 推定精度

以上の方法により求めた相対幹曲線式を用いて、各標本木を $\eta_{0.5}$ の値別にグループ分けして、実測値に対応した位置の推定値を求め、標準誤差を計算した。 $\eta_{0.5}$ の分け方は、 $\eta_{0.5}$ の値が 0.58~0.62 は 0.60, 0.63~0.67 は 0.65, 0.68~0.72 は 0.70, 0.73~0.77 は 0.75, 0.78~0.82 は 0.80, 0.83~0.87 は 0.85 とした。

単木の樹幹上の測定位置は、前に述べたように胸高位置 1.2 m, 次は地上から 2 m で、それ以上は 1 m 間隔である。実測値と推定値の差は、これらの測定位置全部について求められており、標準誤差は Table 17

に示してある。Table 17 のなかの①の欄の S. E. は、幹足部分梢頭部分をそれぞれ $0.1H$ ずつ除いた主幹について求め、②の欄の S. E. は、胸高位置から梢頭部分の直径 3 cm 以下を除いた部分について求めたものである。Table 17 によると、 $\eta_{0.5}$ について、このような分け方をした場合の精度は非常によく、データの大部分を占めている 0.70, 0.75, 0.80 は、①($0.1H \sim 0.9H$)、②(1.2 m ～ 上部直径 3 cm の範囲)とも、ほとんど同じくらいの精度であることがわかる。つまり、この三つの級では、 $0.1H \sim 0.9H$ の樹幹中央部の両側に曲線を延長した場合でも、 $0.1H \sim 0.9H$ の範囲と同じ程度の精度で推定直径が得られることを示している。(33) 式は、曲線が梢端から $0.9H$, $0.7H$, $0.5H$ を通るように係数が求められているが、それ以外のところの適合状態を、幹足部分と梢頭部分に分けて、実測値と推定値を比べてみた。まず地際に近い部分をみると、樹高の高い木について胸高位置から $0.1H$ までの間における実測値と推定値の差が大きいものが多い。それは、ほとんどが根張りの影響があると思われる胸高位置だけで、2 m に達すると、大体において良い適合を示している。Table 17 で、S. E. は、ほとんどの級で①より②が大きいが、特に $\eta_{0.5}=0.60, 0.65, 0.70$ の級は大きな値となっている。これは、樹高 24.5 m 以上の木が、 $\eta_{0.5}=0.60$ の級で 4 本のうち 3 本、 $\eta_{0.5}=0.65$ で 6 本のうち 4 本、 $\eta_{0.5}=0.70$ で 41 本のうち 13 本含まれており、このため、これらの級では幹足部の影響が表れたためと考えられる。一方、梢頭部分は、前述したように変動が大きく、不安定な面があるが、曲線への適合は一応妥当な状態であった。幹曲線式により、地際から頂点までの間の推定直径を正確に求めることが理想であるが、それはかなり難しい。しかし、丸太の末口直径を求めるのが主な目的であれば、採材される丸太の長さから考えて、地際から $0.1H$ 以下の位置の推定直径は、ほとんど必要としないであろう。

以上の方法により、幹曲線式を $\eta_{0.5}$ 別に計算することは容易であるが、現実に単木の $\eta_{0.5}$ を求めるのは難しい。そこで簡略的にデータ全体を $\bar{\eta}_{0.5}$ で代表させ、 $\bar{\eta}_{0.5}$ に対応した幹曲線式を推定し、標準誤差を計算すると、Table 17 の最下段にあるとおり、1.67 cm と 1.72 cm となった。このように $\bar{\eta}_{0.5}$ を用いると標準誤差が大きくなるのがわかる。この値は、放物線式において、基準直径に胸高直径を用いたときよりもよいが、 $0.1H$ 点の直径を用いたときよりは劣る。また材積式から誘導した場合よりも大きな値である。

4 次の項まで用いた (35) 式では、 $\bar{\eta}_{0.5}$ について求めた標準誤差は 1.73 cm ($0.1H \sim 0.9H$ の範囲)で、むしろ (33) 式より悪かった。これは、Table 13 からわかるように、 $\eta_{0.5}$ のばらつきが大きいからで、このような条件の下で、単に次元を増しても必ずしも推定精度がよくなるとはかぎらない。

最後に、相対幹形の指標として重視されている HOHENADL 式による正形数 $\lambda_{0.9}$ を $\eta_{0.5}$ 別に求め、相対材積 ($\theta_{0.9} = \frac{\pi}{4} \lambda_{0.9}$ で表され、これから材積は $v = H \cdot d_{0.9}^2 \cdot \theta_{0.9}$ で求められる。 H : 樹高)とともに Table 18 に示した。

$\eta_{0.5}$ の値と密度管理との関係については、さきに述べたが、これを単木としてみた場合、 $\eta_{0.5}$ の値の小から大の順に、ナイロイド、円錐体、放物線体、そして 1 のときは円柱体として表される。このデータで

Table 18. $\eta_{0.5}$ 別 正 形 数, 相 対 材 積

$\eta_{0.5}$	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	平均=0.73
正 形 数	0.450	0.468	0.504	0.538	0.579	0.604	0.527
相 対 材 積	0.353	0.367	0.396	0.423	0.454	0.475	0.414

は、 $\bar{\eta}_{0.5}=0.73$ で平均的には放物線形で表され、この級を中心に同じ放物線体でも、 $\eta_{0.5}$ が小さいのは尖形、大きいのは完形へと近づいていく。若干の木を除いて、大体において放物線体に近い相対幹形を有しているといつてよいだろう。

5. D. BRUCE らの多項式による幹曲線式

(1) 幹曲線式への当てはめ

さきに述べたように、D. BRUCE ら²⁾ はレッドアルダーについて最終的に (10) 式に示した係数を求めたが、ここでは同じ変量を天子データに当てはめた。この式は頂点近くまで良く当てはまるので、これまで上部直径 3 cm 以下を対象外としてきたが、この式については胸高以上の全測定値を用いることにした。その結果、標準誤差 1.23 cm を持つ次式を得た。

$$\begin{aligned} d^2/D^2 = & 10.09709(x^{\frac{1}{2}})(10^{-1}) - 5.02051(x^{\frac{1}{2}} - x^8)D(10^{-2}) \\ & + 89.531535(x^{\frac{1}{2}} - x^8)H \cdot (10^{-3}) + 32.593742(x^{\frac{1}{2}} - x^{32}) \cdot H \cdot D \cdot (10^{-6}) \\ & + 4.7304182(x^{\frac{1}{2}} - x^{32})H^{\frac{1}{2}}(10^{-8}) - 737.26922(x^{\frac{1}{2}} - x^{40}) \cdot H^2(10^{-8}) \\ & \dots\dots\dots(36) \end{aligned}$$

ここに、 $x = (H - h_i)/(H - 1.2)$

h_i : 測定高

標準誤差 1.23 cm は、これまで検討した式のなかで最もよく、しかも、この値は頂点に近い点も含まれているということからも、非常に高い精度といえよう。つぎに、この式が、根張り部分に対して、どのような適合を示すか検討してみよう。(36) 式に用いたデータに、0.0, 0.25, 0.75, 1.00 m の位置の直径測定値を加えて、0.0 m, 0.25 m, 0.5 m の各位置以上について、胸高以上のデータで行ったのと同様の計算をした。

イ) 0.0 m まで含めると、地際の直径のパラツキが大きいため、標準誤差は 2.17 cm となり、適合が悪かった。

ロ) 0.25 m 以上では、標準誤差は 1.29 cm

ハ) 0.5 m 以上では、標準誤差は 1.17 cm

となり、地際を除くと非常に良い精度で当てはまることがわかる。0.5 m 以上の 1.17 cm は、胸高以上の 1.23 cm よりも小さな値であり、根張りの影響があると考えられる地上 50 cm 以上についても、良く適合することを示している。

(2) 幹材積の推定

一般に伐高以上の幹材積と胸高直径を底円の直径とし、高さ $(H - 1.2)$ の円柱体の体積との比(形数)は

$$F = \int_0^Z (d/D)^2 dx \quad \dots\dots\dots(37)$$

ここに、 $Z = (H - \text{伐高})/(H - 1.2)$

で表され、材積は

$$V = (\pi/4) \cdot D^2(H - 1.2) \cdot F/10000 \quad \dots\dots\dots(38)$$

で与えられる。

イ) 胸高以上の材積

(37) 式で $Z = (H - \text{伐高})/(H - 1.2)$ の代わりに $Z = (H - 1.2)/(H - 1.2) = 1$ とすれば、 F は胸高以上の幹材積と円柱体体積の比になる。(36) 式は胸高以上について当てはめた式であるから、形数は次の

ように求められる。

$$\begin{aligned}
 F = & 4.0388(Z^{\frac{1}{2}})(10^{-1}) - 2.0082(Z^{\frac{1}{2}})D \cdot (10^{-2}) + 35.8126(Z^{\frac{1}{2}})(H)(10^{-3}) \\
 & + 13.0375(Z^{\frac{1}{2}}) \cdot H \cdot D \cdot (10^{-5}) + 1.8922(Z^{\frac{1}{2}})H^{\frac{1}{2}}(10^{-3}) - 294.9077(Z^{\frac{1}{2}}) \cdot H^2 \cdot 10^{-6} \\
 & + 1.2551(Z^4)D \cdot (10^{-2}) - 22.3829(Z^4) \cdot H \cdot (10^{-3}) - 0.9877(Z^{38})H \cdot D \cdot (10^{-5}) \\
 & - 0.1433(Z^{38})H^{\frac{1}{2}}10^{-3} + 17.9822(Z^{41})H^2(10^{-6}) \\
 & \dots\dots\dots(39)
 \end{aligned}$$

材積の比較は、次の方法によって単木材積を求め、全体を合計して行った。

- i) 1.2 m 以上の各測定位置の直径実測値を用いて、スマリアン式で材積を求める。
- ii) (36) 式により i) と同位置の推定直径を用いて、スマリアン式で材積を求める。
- iii) (39) 式で単木ごとに形数を求め、(38) 式により材積を求める。

その結果は Table 19 に示した。

胸高以上の材積およびそれに胸高以下を円柱体として加えた場合の左 2 列の値をみると、非常に良い精度で推定されるのがわかる。

ロ) 地上 0.5 m 以上の材積

根張りの部分を含めた幹曲線式の当てはめでは、0.5 m 以上のデータを用いた場合の精度がよかったので、この式について胸高以上で行ったのと同じ方法で材積を求めた。ここでは、(37) 式で $Z = (H - 0.5) / (H - 1.2)$ として、幹曲線式から誘導した係数を用いて形数を計算し、材積を求めると、Table 19 に示したように非常に近似した値を得た。

Table 19 には、この他に 0.25 m 以上と地際以上について計算した結果も示した。また Table 20 には、

Table 19. D. BRUCE らの式による推定材積 (大子データ)
(根張り部分の高さを変えた場合)

	胸高以上 ①	①+1.2 m 以下の円柱 体	0.5 m 以上 ②	②+0.5 m 以下の円柱 体	0.25m 以上 ③	③+0.25m 以下の円柱 体	0.0 m 以上
測定値からスマ リアン式による	(m³) 56.9797 (%) 100.0	64.3716 100.0	61.6274 100.0	65.3645 100.0	63.7156 100.0	66.0235 100.0	66.6385 100.0
推定直径からス マリアン式によ る	(m³) 57.5280 (%) 101.0	64.9917 101.0	62.4309 101.3	66.1972 101.3	64.5037 101.2	66.7292 101.1	67.8990 101.9
形数(F)による	(m³) 57.4127 (%) 101.0	64.8764 100.8	62.3543 101.2	66.1206 101.2	64.4027 101.1	66.6282 100.9	67.7153 101.6

Table 20. 地際以上の測定値からスマリアン式により求めた材積との比率 (%)

	胸高以上+1.2 m 以下円柱体材積	0.5m+以上0.5m 以下円柱体材積	0.25m 以上+0.25m 以下円柱体材積	0.0m 以上
測定値からスマ リアン式による	96.6	98.5	99.4	100.0
推定直径からス マリアン式による	97.5	99.3	100.1	101.9
形数(F)による	97.4	99.2	100.0	101.6

Table 21. BRUCE らの方法による

$H \backslash D$	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
6	0.576												
7	0.560	0.549											
8	0.552	0.540											
9	0.547	0.536	0.525	0.513									
10		0.535	0.523	0.512									
11			0.524	0.513	0.501								
12			0.527	0.515	0.504								
13			0.531	0.519	0.507								
14			0.535	0.523	0.511	0.500							
15				0.528	0.516	0.505							
16				0.534	0.522	0.510	0.498	0.486					
17					0.528	0.516	0.504	0.492		0.468			
18					0.534	0.522	0.510	0.498	0.486	0.474	0.462	0.450	0.438
19						0.528	0.516	0.504	0.492	0.480	0.468	0.456	0.444
20									0.498	0.486	0.474	0.462	0.450
21									0.505		0.481	0.469	0.456
22													
23													
24													
25													
26													
27													
28													
29													
30													
31													
32													
33													
34													
35													
36													

* $\pi D^2(H-1.2) \cdot F/40000$ で $(0.5+D/300)\text{m}$ 以上の材積が求められる。

地際以上の実測値からスマリアン式で求めた材積を 100 とした場合の Table 19 の値を百分率として示した。胸高以下を胸高直径を底とした円柱体におきかえたときが、当然のことながら、材積は過少に推定され、その値は約 3% 程度であった。参考までに、0.5 m 以上のデータから計算した F の値を直径、樹高階別に求め、Table 21 に示した。この形数 (F) から、 $\pi D^2(H-1.2) \cdot F/40000$ により、 $(0.5 \text{ m} + \text{伐高})$ 以上の材積が求められる。ただし、伐高として $D/300$ を用いた。

IV 皮付直径から皮内直径への変換

丸太材積を求めるには、皮内直径の推定値が必要であるが、上部直径は皮付きで求められる場合が多いので、皮内直径は皮付直径との関係から導かなければならない。

DBH_i = 皮内胸高直径

DBH_o = 皮付 "

これら各式の右辺の皮付直径に乗ずる値には、次の性質がある。

(40) 式は、胸高位置における皮付直径と皮内直径の比であるから、常に一定である。

(41) 式は、任意の位置が地上から離れるにしたがって、わずかであるが大きくなっていく。

(42) 式は、(41) 式と反対に地上から離れるにしたがって、小さな値となる。

これらの傾向を明らかにするために、胸高直径、樹高の大きさの異なる 3 本の木について、 $\frac{d_i}{d_o}$ の値を図示すると、Fig. 3 のようになる。(40) 式は値が一定なので省略した。また図の中の (43) 式については、あとで説明する。

Wiant らは、5 種類のハードウッド 177 本について検討した結果、すべて (40) 式が最もよく適合したと報告している (Table 22)。

この方法を大子データについて適用すると、データ全体についての精度は、(40) 式と (42) 式はほぼ同じであるが、(41) 式はそれらよりも悪かった。樹高級別では、(42) 式は小さい級ほどよく、(40) 式

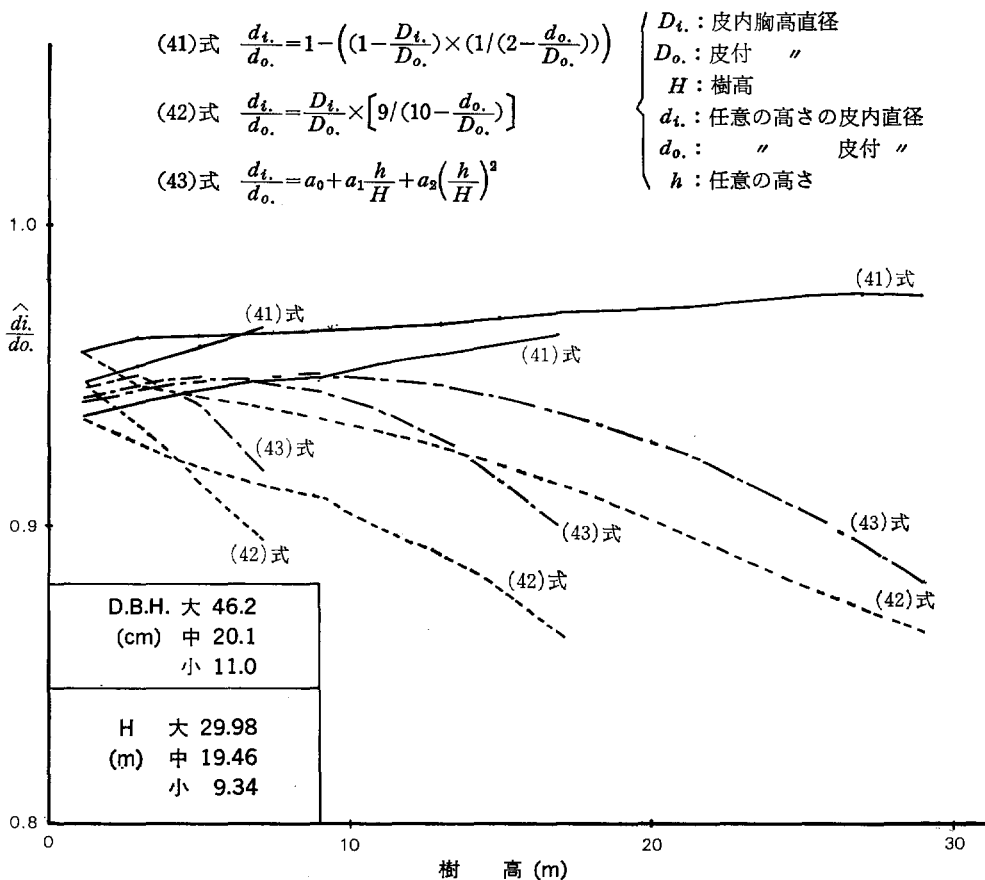


Fig. 3. 木の大きさを変えた場合の $\frac{d_i}{d_o}$ の樹幹上の変化の傾向

Table 22. H. V. Wiant らの例* と大子データによる皮内直径推定の誤差

	測 定 点	許容誤差値 (FREESE の検定法) (%)			
		(40式)	(41式)	(42式)	(43式)
yellow poplar	519	4.5	4.6	8.5	
red maple	105	2.0	3.1	5.3	
north red oak	319	2.7	6.8	7.9	
black oak	81	3.6	3.9	9.1	
scarlet oak	84	2.9	3.3	7.3	
大 子 デ ー タ	1001	7.4	9.3	7.5	4.9

* JOUR. OF FORESTRY, 775 p. 1974 から引用

Table 23. 樹高級別皮内直径推定の誤差 (大子データ)

樹 高 級	測 定 点	許 容 誤 差 値 (%)			
		(40式)	(41式)	(42式)	(43式)
~ 9.49 ^m	71	6.7	8.5	5.4	5.2
9.5~14.49	216	7.4	9.5	6.0	4.8
14.5~19.49	280	8.2	10.0	6.5	4.8
19.5~24.49	133	5.6	7.2	6.8	3.4
24.5~	301	6.5	8.3	4.0	4.2
全 体	1001	7.4	9.3	7.5	4.9

は大きい級がよい。(41)式は全体を通してよいとはいえない。Table 23 の誤差の比較では、後述の(43)式が最も良好であった。

なお、Wiant らが用いた誤差計算は、FREESE の正確度の検定法により、許容誤差限界を百分率で表しているため、比較の上から Table 22 と Table 23 の誤差の表示は、この方法によった。FREESE の検定法 (χ^2 -検定) は次式のとおりである。

$$E(\%) = \sqrt{(196)^2 \sum (\frac{d}{d} - 1)^2 / \chi_n^2}$$

$$\chi_n^2 \approx 0.853 + n + 1.645\sqrt{2n-1}$$

さて、樹皮厚は、断面高によって異なると考えられるので、高さを変量とした次式について検討を行った。

$$\frac{d_{t_0}}{d_0} = a_0 + a_1 \frac{h}{H} + a_2 \left(\frac{h}{H} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (43)$$

Fig. 3 のなかの (43) 式による $\frac{d_{t_0}}{d_0}$ の樹幹上の変化を表す線は、Table 24 の最下位にある全体の係数を用いて計算した値である。

(43) 式による皮内最小径の推定値の標準誤差は、Table 24 に示したとおりである。ここで用いたデータは、これまでのものと同じであるが、皮内と皮付直径の比が必要なために、同一高で両方の測定値のあるものを用いた。また梢頭部分の測定値も全部含めた。

標準誤差は非常に小さく、十分満足しうる精度で、皮付平均直径から皮内最小直径を推定することができる。したがって、この式で最も重要な変量である皮付直径の推定値が良い精度で求められれば、皮内最

Table 24. (43)式による係数と標準誤差

樹 高 級	本 数	測定点	a_0	a_1	a_2	S. E.
～ 9.49 ^m	20 ^本	71	0.934632	0.036153	-0.102913	0.14
9.5～14.49	38	216	0.934813	0.066562	-0.136278	0.18
14.5～19.49	34	280	0.937822	0.102738	-0.177136	0.24
19.5～24.49	13	133	0.945751	0.079046	-0.134134	0.31
24.5～	21	301	0.932302	0.104098	-0.154006	0.45
全 体	126	1001	0.936600	0.084653	-0.146864	0.33

Table 25. 推定皮付直径を(43)式の推定比率に乗じた場合の皮内最小直径の標準誤差

樹 高 級	本数	測定点	S. E.
～ 9.45 ^m	20 ^本	61	0.25
9.5～14.45	38	193	0.50
14.5～19.45	34	265	0.71
19.5～24.45	13	127	1.45
24.5～	21	292	1.93
全 体	126	938	1.38

Table 26. 相対高における樹皮厚率 (%)

樹 高 級	地際からの相対高				
	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
～ 0.94 ^m	6.3	6.4	7.3	9.1	11.6
9.5～14.45	6.0	5.7	6.6	8.5	11.6
14.5～19.45	5.4	4.7	5.5	7.7	11.3
19.5～24.45	5.4	4.3	4.8	6.5	9.2
24.5～	5.9	5.0	5.4	7.0	9.1
全 体	5.7	5.1	5.8	7.6	10.6

小直径への変換は、(43) 式によって行って十分だと考えられる。

つぎに、Table 8 の (23) 式の係数を用いて皮付平均直径を推定した。そして Table 24 の係数により皮内最小直径を求めると、推定値の標準誤差は Table 25 のようになる。

Table 24 と Table 25 の標準誤差値をみると、Table 24 のほうがきわめて良好なのがわかる。これは、Table 24 は (43) 式の左辺の分母に、実測皮付直径を用いているのに対して、Table 25 のそれは、推定皮付直径を用いているからであろう。今述べたように、皮付から皮内への変換誤差はそれ程大きくないので、Table 25 の誤差は、皮付平均径の推定誤差の影響によるものが大きいといえよう。

さて、樹皮厚の樹幹上での変化をみるために、相対位置における樹皮厚率を計算した。樹皮厚率は、(43) 式で推定した値を 1 から引いて 100 倍した値、すなわち $(1 - \frac{d_t}{d_o}) \times 100$ を用いた。これを大子データについて示すと、Table 26 のようになる。Table 26 から明らかなように、樹幹中央から下部にかけては、ほとんど変化はないが、中央から梢端に近づく、急に大きくなる傾向がみられる。これは、前述の Wiant らの行った三つの方法のなかの第 3 の方法、すなわち (42) 式の傾向と一致していることがわかる。(Fig. 3 参照)

一方、樹幹の大きさによる影響はそれ程ないと考えられるので、実際に皮内直径推定のために資料を収集するときは、各樹高階から適当な本数を選んで、全体を一本の式で推定して差し支えないであろう。

V 幹曲線式を用いた利用可能材積算出フローの作成とモデル的検討

これまで述べてきた幹曲線式のうち、データへの当てはまりの良い式を選び利用可能材積の算出を行うことにした。ここでわかりやすいように、検討した幹曲線式とそれから導かれる幹材積、さらに採材規格に基づいて採取される丸太の本数、材積表の作成までの簡単なフローを Fig. 4 に示した。Ⅲでは、樹高級、直径級あるいは $\eta_{0.8}(d_{0.8}/d_{0.9})$ 別にわけて、林木の大小、形状により式の適合性を調べた。そして、林木が大きくなるにしたがって適合性が悪く、また $\eta_{0.8}$ を細分したほうが良い精度で当てはまることがわかったが、ここでは利用可能材積算出の試算ということもあり、データ全体に一本の式に当てはめた場合の標準誤差の小さい式を用いることにした。各方法による標準誤差を Table 27 に示す。

方法の相違による利用可能材積の差違をみるために、大子データを胸高直径 2 cm、樹高 1 m 括約でクラスに分け、各クラスごとに上部直径を推定し、丸太材積を求め、データ全体の利用可能材積、丸太本数の合計を求めた。丸太の長さは、便宜的に胸高直径 26 cm 以下は 3 m、28 cm 以上は 4 m とした。伐高は、各林木の胸高直径の 1/300 (m 単位) の値、例えば、胸高直径 30 cm の木の伐高は 10 cm とし、10 cm を限度とした。上部直径は 4 cm までを用いた。これらの条件にしたがって、Table 3 (14 式による) と Table 8 ((22) 式、(23) 式) に示してある全データで求めた最下段に示す推定式、Table 16 の $\bar{\eta}_{0.8} = 0.73$ を用いた推定式および (36) 式から皮付末口直径を求めた。そして皮付直径の皮内直径への変換は、Table 24 の係数を用いた。丸太材積は、皮内末口直径から末口二乗法により求め、データ全体を合計した。その結果を Table 28 に示した。これらの値を比較する基準値として、現行の東京営林局管内のスギ幹材積表を用いることにした。126 本の合計材積は、材積表値 68.039 m³、データからスマリアン式を用いた算出値 67,129 m³ で、材積表の値が若干大きい、大差なかった。Table 28 の 6 通りの方法の推定皮内丸太合計材積は、基準値に比べて、根張り、梢頭部分、樹皮を考慮すると、放物線式による (14) 式は過大に、幹材積式から誘導した (22) 式は過少に推定されているのがわかる。相対幹曲線式からの推定値もや

Table 27. 方法別の標準誤差

方法	測定点	樹幹上の範囲	標準誤差
(1)	1840	胸高位置から末口直径 3 cm まで	2.26 ^{cm}
(2)	1840	"	1.51
(3)	1840	"	1.50
(4)	1680	0.1 H から 0.9 H まで	1.67
(5)	1961	胸高位置から上部	1.23

Table 28. 各種推定法により求めた皮内丸太材積合計 (末口二乗法)

(データは 2 cm、1 m 括約による)

(本数 126 本)

	幹材積表材積 (皮付)	(14)式	(22)式	(23)式	相対幹曲線	BRUCE の式	
						1.2mの係数	0.5mの係数
材 積(m ³)	68.039	67.1017	56.6222	62.1081	63.9685	59.8917	60.0250
比 率(%)	100	98.62	83.22	91.28	94.02	88.03	88.22
丸太本数(本)		473	477	474	478	477	477

注 スマリアン式により求めた皮付材積合計は、67,129 m³ である

Fig. 4. 幹曲線式を用いた利用可能材積算出フロー

	方法 1	方法 2	方法 3	方法 4	方法 5
幹 曲 線 式 の 算 出	放物線式 $\frac{d^2}{D^2} = a_0 + a_1 \frac{h}{H} + a_2 \left(\frac{h}{H} \right)^2$ h : 任意の高さ d : h の位置の直径 D : 胸高直径 H : 樹高	対数幹曲線式 $\log d = b_0 + b_1 \log D + b_2 \log l + b_3 \log H$ l : 梢端からの長さ d : l の位置の直径	幹材積式からの誘導式 幹材積式 $v = 10^{a_0} D^{a_1} H^{a_2}$ の対数式 $\log v = \log a_0 + a_1 \log D + a_2 \log H \quad \dots\dots(1)$ から, 次の幹曲線式を導く。 $\log d = b_0 + b_1 \log D + b_2 \log l + b_3 \log H \quad \dots\dots(2)$ (1), (2)式の係数の対応は, 次により行う。 $\left. \begin{aligned} b_0 &= \log(10^{a_0} p a_2 / K)^{\frac{1}{2}} \\ b_1 &= a_1 / 2 \\ b_2 &= (p a_2 - 1) / 2 \\ b_3 &= (1 - p) a_2 / 2 \end{aligned} \right\} \dots\dots(3)$ $K : \frac{\pi}{4} \cdot 100^{-2}$ $p : (a_2 - 2b_3) / a_2$ p は, (2)式に(3)式を代入して, 標本木から別途求める。	相対幹曲線式 $y = ax + bx^2 + cx^3 \quad \dots\dots(1)$ 各木の $\eta_{0.1} = d_{0.1} / d_{0.9}$, $\eta_{0.3} = d_{0.3} / d_{0.9}$, $\eta_{0.5} = d_{0.5} / d_{0.9}$, $\eta_{0.7} = d_{0.7} / d_{0.9}$, $\eta_{0.9} = d_{0.9} / d_{0.9}$ を求める。 $\left. \begin{aligned} \eta_{0.1} &= a_1 + b_1 \eta_{0.5} \\ \eta_{0.3} &= a_2 + b_2 \eta_{0.5} \\ \eta_{0.7} &= a_3 + b_3 \eta_{0.5} \end{aligned} \right\} \text{を解く。}$ $\eta_{0.5} = 0.6, 0.65, 0.7, \dots$ の $\eta_{0.1}, \eta_{0.3}, \eta_{0.7}$ の推定値から相対直径列を作る。 座標 $(0.9, \eta_{0.9}/2)$, $(0.7, \eta_{0.7}/2)$, $(0.5, \eta_{0.5}/2)$ を通るように a, b, c を決める。 (1)式において, x : 梢端からの樹高に対する相対長 y : $d_{0.9}$ に対する相対半径 推定直径は $d = 2 \cdot y \cdot d_{0.9}$	多項式 (BRUCE らの式) $(d/D)^2 = a_0 (x^{\frac{1}{2}})^2 (10^{-1}) + a_1 (x^{\frac{1}{2}} - x^2) D (10^{-2}) + a_2 (x^{\frac{1}{2}} - x^3) H (10^{-3}) + a_3 (x^{\frac{1}{2}} - x^{32}) H \cdot D (10^{-5}) + a_4 (x^{\frac{1}{2}} - x^{32}) H^{\frac{1}{2}} (10^{-8}) + a_5 (x^{\frac{1}{2}} - x^{40}) H^2 (10^{-6})$ $x = \frac{H - h}{H - 1.2}$
幹 材 積 式 の 算 出	$v = K \cdot D^2 \int_0^H \left[a_0 + a_1 \frac{h}{H} + a_2 \left(\frac{h}{H} \right)^2 \right] dH$ $= K \cdot D^2 \cdot H (a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3})$ $K = \frac{\pi}{4} \cdot 100^{-2}$	右と同じ	(2)式は $d = 10^{b_0} D^{b_1} l^{b_2} H^{b_3}$ で表される。 したがって, $v = K \int_0^H 10^{2b_0} D^{2b_1} l^{2b_2} H^{2b_3} dl$ $H^{2b_3} d l = K \cdot 10^{2b_0} \cdot D^{2b_1} \cdot \frac{H^{2b_2+2b_3+1}}{(2b_2+1)}$ これを対数形に変換すると, $\log v = a_0 + a_1 \log D + a_2 \log H$ ここで, $a_0 = \log [K \cdot 10^{2b_0} / (2b_2+1)]$ $a_1 = 2b_1$ $a_2 = 2b_2 + 2b_3 + 1$	$v = \frac{\pi}{4} \cdot H \cdot d_{0.9}^2 \lambda_{0.9}$ $\lambda_{0.9} = 0.2 (1 + \eta_{0.7}^2 + \eta_{0.5}^2 + \eta_{0.3}^2 + \eta_{0.1}^2)$ (HOHENADL の正形数)	伐高以上の幹材積と〔胸高直径と $(H-1.2)$ の円柱体〕との比は $F = \int_0^Z (d/D)^2 dx$ $Z = \frac{H - \text{伐高}}{H - 1.2}$ 材積は $v = \frac{\pi D^2 (H - 1.2) F}{40000}$

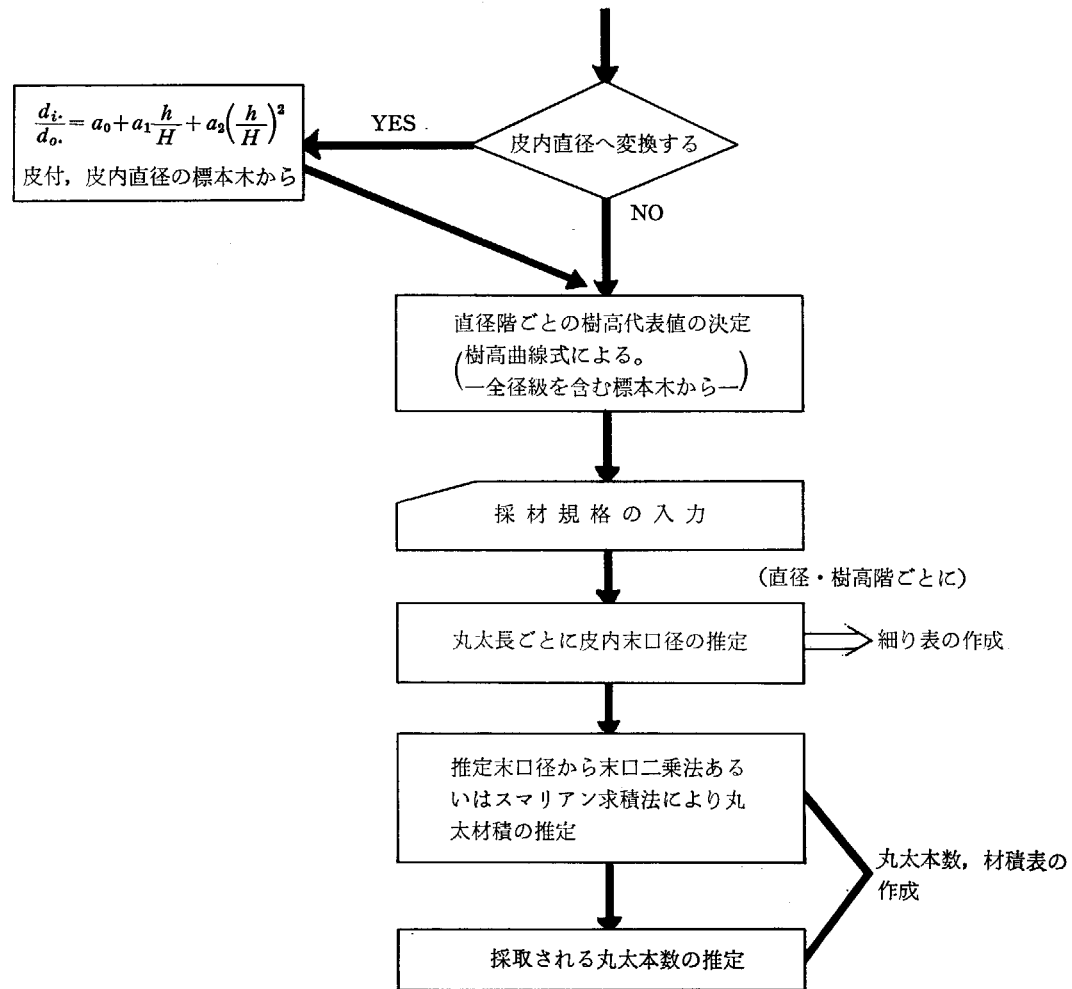


Table 29. 丸太長と末口直径

丸太長(m)	末口直径(cm)
3.65	20.0以上
3.00	14.0 "
4.00	4.0 "
2.10	3.0 "
1.82	3.0 "

や過大であり、妥当と思われるのは、BRUCE らの式から推定した値であった。これらは全データを込みにした場合であるが、級別に同様の計算をすると、(14)式、(22)式、(23)式の順に 60.4686m^3 、 59.5812m^3 、 61.0056m^3 となり、BRUCE らの式とかなり近似した値となった。同じことは相対幹曲線式についてもいえ、データの平均値である $\bar{w}_{0.8} = 0.73$ の推定式を用いると、皮内丸太合計材積は 63.9685m^3 であるが、データを $\bar{w}_{0.8} = 0.60, 0.65, \dots, 0.85$ に分けた推定式を用いると、 59.9882m^3 であった。このようにデータを級分けすることによって推定精度はよくなるが、直径級別に作成した幹材積表の場合と同様、各樹高級の接合点で連続性が失われるという問題が生じた。したがって、ここでは級分けをしなかった BRUCE らの式について、直径、樹高階別に材長別末口径別丸太本数、材積を求めることにした。

まず、それぞれの直径階に属する樹高値を決める必要があるが、これまでの解析に用いたデータにネスルンド式を当てはめると、胸高直径 25 cm から 42 cm の間の実測樹高が推定樹高より小さく、中だるみの傾向があることがわかった。そのため、ここでは、推定樹高と実データの樹高値を参考にして、各直径階の樹高範囲を決めた。

丸太長については、大子地域で実際に用いられている基準の一部にしたがった。すなわち、丸太長と末口直径の関係は Table 29 のとおりとした。

これらの値により作成した表の一部を Table 30 に示した。Table 30 には、直径階、樹高階ごとに、何mの丸太が末口直径何cmで何本採取できるか、また、その丸太材積とそれらを合計した単木材積が示されている。この場合の材積計算は、スマリアン式を用いた。また、計算に用いた 126 本について、材長別丸太本数材積を求めると Table 31 のようになった。

ここで、末口二乗法とスマリアン式を用いて求めた材積の差について、ふれておく。

同一長の 1 本の丸太について、次のことがいえる。

- 1) 両方法の材積が等しいのは、末口直径 1 に対して元口直径 1.24358 のときである。
- 2) 末口直径と元口直径が等しいときの材積比は、スマリアン式 1 に対して、末口二乗法 1.27324 である。
- 3) 末口直径と元口直径の間に差があるときの材積比は、次のとおりである。

直径比	材 積 比	
	スマリアン式	末口二乗法
1 : 1.1	1	1.15
1 : 1.2	1	1.04
1 : 1.3	1	0.95
1 : 1.5	1	0.78

1 本の丸太については以上のことがいえるが、大小の丸太をとりまぜた合計材積は、ここで扱った例では、両方法とも比較的近似した値が得られた。例えば、いま示した 126 本の丸太材積について、両方法の値をみると、スマリアン式 59.7908m^3 、末口二乗法 60.8646m^3 で、百分比 100 : 101.8 はであった。また、これらの値に対する皮付合計材積 67.129m^3 (Table 28 の注) との百分比 (利用率) は、それぞれ

{末口径，材積とも皮内
{材積はスマリアン式による

D _{cm}	H _m	3.65			3.0			4.0			2.1			1.82			計		
		末口徑	本數	材積	末口徑	本數	材積	末口徑	本數	材積	末口徑	本數	材積	末口徑	本數	材積	本數	材積	
10	9							8	1	0.0255	4	1	0.0060				2	0.0315	
	10							8	1	0.0259	6	1	0.0072				3	0.0364	
											4	1	0.0033						
	11							8	1	0.0263							2	0.0389	
								4	1	0.0126									
	12							8	1	0.0267				4	1	0.0026	3	0.0436	
							6	1	0.0144										
10	13							8	1	0.0270	4	1	0.0039				3	0.0468	
								6	1	0.0160									
	14							8	1	0.0272	4	1	0.0049				3	0.0495	
								6	1	0.0174									
	20	16				18	1	0.0846	10	1	0.0522							4	0.2190
						16	1	0.0619	4	1	0.0203								
17					18	1	0.0847	12	1	0.0575							4	0.2322	
					16	1	0.0641	6	1	0.0259									
18					18	1	0.0848	12	1	0.0624	4	1	0.0057				5	0.2506	
				16	1	0.0660	8	1	0.0316										
20	19				18	1	0.0849	12	1	0.0669	6	1	0.0084				5	0.2652	
					16	1	0.0678	8	8	0.0372									
	20				18	1	0.0850	10	1	0.0499							5	0.2827	
					16	1	0.0693	6	1	0.0224									
					14	1	0.0561												
30	19	26	1	0.2267	18	1	0.0859	10	1	0.0627	6	1	0.0128				5	0.5415	
		22	1	0.1534															
	20	26	1	0.2274	18	1	0.0934	12	1	0.0735							5	0.5796	
		22	1	0.1592				4	1	0.0261									
	21	26	1	0.2279	18	1	0.1004	8	1	0.0460	4	1	0.0074				6	0.6142	
	22	1	0.1644	14	1	0.0681													
30	22	26	1	0.2284	20	1	0.1070	10	1	0.0560	6	1	0.0116				6	0.6479	
		22	1	0.1690	16	1	0.0759												
	23	26	1	0.2289	20	1	0.1131	12	1	0.0662							6	0.6886	
		24	1	0.1732	18	1	0.0834	4	1	0.0237									
	40	21	32	1	0.4037	16	1	0.0843	8	1	0.0513	4	1	0.0064					
		28	1	0.2591													6	0.9768	
		22	1	0.1721															

Table 30. つづき

D cm	H m	3.65			3.0			4.0			2.1			1.82			計		
		末口 徑	本 数	材 積	末口 徑	本 数	材 積	末口 徑	本 数	材 積	末口 徑	本 数	材 積	末口 徑	本 数	材 積	本 数	材 積	
40	22	32	1	0.4045	18	1	0.0968	10	1	0.0653	1	1	0.0113				6	1.0316	
		28	1	0.2677															
		22	1	0.1860															
	23	34	1	0.4051	20	1	0.1091	12	1	0.0800	8	1	0.0171	4	1	0.0054			
		28	1	0.2756															
		24	1	0.1992															
	24	34	1	0.4057	20	1	0.1212	8	1	0.0481	4	1	0.0061						
		30	1	0.2827	16	1	0.0774												
		24	1	0.2115															
	25	34	1	0.4062	16	1	0.0804	8	1	0.0519	4	1	0.0076						
		30	1	0.2891															
		26	1	0.2232															
		20	1	0.1558															
	26	34	1	0.4066	18	1	0.0921	10	1	0.0653	6	1	0.0125						
		30	1	0.2949															
		26	1	0.2341															
		22	1	0.1696															
	50	28	40	1	0.6329	16	1	0.0794	8	1	0.0473				4	1	0.0049		
			36	1	0.4283														
			32	1	0.3355														
26			1	0.2458															
20			1	0.1629															
29		40	1	0.6331	18	1	0.0939	10	1	0.0622	6	1	0.0101						
		38	1	0.4352															
		32	1	0.3494															
		28	1	0.2638															
		22	1	0.1819															
30		42	1	0.6333	20	1	0.1087	12	1	0.0783	8	1	0.0160						
		38	1	0.4414															
		34	1	0.3624															
		30	1	0.2810															
		24	1	0.2006															
31		42	1	0.6333	20	1	0.1237	8	1	0.0469				4	1	0.0049			
		38	1	0.4468	16	1	0.0779												
		34	1	0.3744															
		30	1	0.2976															
		26	1	0.2191															

Table 31. 材長別丸太本数、材積

丸丸区分	丸太本数	材 積	
		スマリアン式	末口二乗法
3.65 ^m	132	43.9053	46.6762
3.00	86	6.9914	7.2958
4.00	201	7.6286	6.3389
2.10	107	0.7170	0.5203
1.82	17	0.0597	0.0334
計	543	59.7908	60.8646

注) 1. 材積は皮内材積である。

2. スマリアン式は、(0.5m～伐高)は円柱体々積を用いた。

89.1%, 90.7%であった。

VI 摘 要

現在、林分の蓄積や生長量の算定には、立木幹材積表が用いられているが、利用可能材積の算出は、地域によって異なる基準から求められた利用率あるいは利用材積表を用いることが多い。このように幹材積と利用材積が関連なく別々に求められているのが実態であるが、本来は一連のものとして求めるべきである。

この研究では、利用材積を求める際に基本となる幹曲線式について検討し、幹材積と関連させながら、地域の採材方法に基づいた利用材積算出のモデル的検討を行った。検討に用いたデータは、樹種はスギで、主として大子営林署管内のデータで、他に大田原営林署管内のデータと東京営林局管内の材積表調製に使用したデータである。なお大田原のデータは、根張りの検討にのみ使用した。

1) 幹曲線式の精度の検討

次の幹曲線式について検討した。

(1) 放物線式

$$(d/D)^2 = a + b(h/H) + C(h/H)^2 \quad \dots\dots\dots(1)$$

D : 胸高直径, H : 樹高

h : 任意の高さ, d : h の位置の直径

(2) 対数幹曲線式

$$\log d = b_0 + b_1 \log D + b_2 \log (H-h) + b_3 \log H \quad \dots\dots\dots(2)$$

h : 任意の高さ, d : 高さ h の位置の直径

(3) 幹材積式から誘導した対数式

$$\text{幹材積式 } v = 10^{a_0} D^{a_1} H^{a_2} \text{ の対数式} \quad \dots\dots\dots(3)$$

$\log v = a_0 + a_1 \log D + a_2 \log H$ の係数から (2) 式の対数幹曲線式の係数を導く。

(4) 相対幹曲線式

$$y = ax + bx^2 + cx^3 \quad \dots\dots\dots(4)$$

x : 樹高に対する梢端からの相対長

y : $d_{0.9}$ に対する相対半径

(5) Bruce らの多項式

$$\begin{aligned}
 (d/D)^2 = & a_0 x^{\frac{1}{2}} (10^{-1}) + a_1 (x^{\frac{1}{2}} - x^8) \cdot D (10^{-2} + a_2 (x^{\frac{1}{2}} - x^8) H (10^{-8}) \\
 & + a_3 (x^{\frac{1}{2}} - x^{32}) H \cdot D (10^{-5}) + a_4 (x^{\frac{1}{2}} - x^{32}) H^{\frac{1}{2}} (10^{-8}) + a_5 (x^{\frac{1}{2}} - x^{40}) \cdot H^2 (10^{-6}) \\
 & \dots\dots\dots (5)
 \end{aligned}$$

$x : (H - h_i) / (H - 1.2)$ で h_i は測定高

まず、大田原データを用いて、根張りと梢頭部分の当てはまりについて検討した。地上から順次 0.00, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00 m の位置を幹曲線式の出発点とし、梢端は測定点全体と直径 3 cm 未満を除いた場合について、(1) 式と (1) 式において $H = h$ のとき $d = 0$ の条件を入れた式を用いて計算し、標準誤差を比較した (Table 2)。その結果、根張りと梢端部分の当てはまりが悪いことが示された。さらに、実際に末口直径が必要なのは、一番丸太の末口直径から上部直径 3 cm か 4 cm までであるため、ここでは、胸高位置から最小直径 3 cm までの間の主幹について、検討した。

当てはめの方法は、(1)～(3) 式はデータを 5 m 樹高級にわけ、(4) 式は $\eta_{0.5} = (d_{0.5}/d_{0.9})$ を 0.05 きざみに級分けして、幹曲線式を当てはめるとともに、全データに対するものも求めた。

その結果、(1)～(3) 式は、樹高 20 m 以下の各級の標準誤差は 0.24～0.73 で、良い精度で推定されたが、20～25 m 級は 1.56～1.65 cm, 25 m 以上は 2.09～2.50 cm となり、林木が大きくなる程精度が悪くなった。全データでは、(1) 式は 2.26 cm, (2) 式は 1.51 cm, (3) 式は 1.50 cm であった (Table 3, Table 8)。

以上の値は太子データのものであるが、東京データについては、データを直径級にわけて同様の計算を行ったところ、標準誤差は同じような傾向を示した (Table 10)。

(4) 式は $\eta_{0.5}$ の値を 0.60～0.85 までの 6 階級に分けて計算し、標準誤差は 0.27～1.05 cm で非常に良い精度で推定されたが、実際にはこのような級分けは繁雑で実用性に乏しいので、全林木の $\eta_{0.5}$ の平均値を用いたところ、1.67 cm であった。この値は、樹幹の 0.1 H から 0.9 H の間の測定値に対するもので、1.2 m から上部直径 3 cm までの測定値を用いると、1.72 cm であった (Table 17)。

(5) 式は級分けは行わず一本の式として、梢端近くの当てはまりもよかったので、頂点に近い測定値を含めて計算した。標準誤差は 1.23 cm であった。以上のうち、全データを一括して求めた標準誤差の値は、Table 27 に示したとおりである。

2) 皮付直径から皮内直径への変換方法

皮付直径から皮内直径を求める場合の変換方法として、4 種類の式を検討した結果、

$$\frac{d_i}{d_o} = a_0 + a_1 \frac{h}{H} + a_2 \left(\frac{h}{H} \right)^2$$

の精度がよかった (Table 23)。また、樹皮厚率を樹高級別に求めると、樹幹の大きさによる差はそれ程顕著でなかった (Table 26)。したがって、皮内直径推定のための計算は、大小の木を込みにした一本の式で推定して差し支えないと考えられる。

3) 直径階ごとの樹高代表値の算出

細り表あるいは利用材積表を作成するためには、直径階に属する樹高値が必要であるが、これは林分によって異なるため、代表値を算出しなければならない。そして、一直径階の樹高幅は、代表値を中心にして、データによって決められる。一般的には、樹高曲線式は、広く用いられているネスルンド式 $D/\sqrt{H-1.2} = a + bD$ によって推定するとよいが、このデータについては、胸高直径 25 cm から 42 cm の間の実測樹

高が推定樹高より小さい傾向があったため、実データの樹高値を用いた。

4) 各幹曲線式による利用可能材積の推定値の精度

1) で検討した各式を用い、単木ごとに丸太材積を求め、データ全体を加算して、使用データの利用可能材積と丸太本数を比較した。丸太の長さは、一便法として、胸高直径 26 cm 以下の木は 3 m, 28 cm の木は 4 m として、末口直径は 4 cm までを用いた。各式とも、皮付直径のデータ全体から計算した推定係数を用い、各丸太の皮付末口直径を求め、皮内直径に変換し、材積は末口二乗法で求めた。皮内直径への変換は、Table 24 の推定係数を用いた。各幹曲線式を用いて計算した丸太材積値と比較する基準値は、現行の東京営林局管内のスギ幹材積表とした。その結果は Table 28 のとおりである。すなわち、材積表値（皮付き）を 100 とすると、収穫丸太材積の比率は、(1) の方法から順に、(1) 式 99%, (2) 式 83%, (3) 式 91%, (4) 式 94%, (5) 式 88% となり、根張り、梢端部分、樹皮を考慮すると、(1) 式は過大に、(4) 式はやや過大と判断される。(1), (2), (3) 式を樹高級に分けた式で同様の計算をすると、(1), (2), (3) 式とも 89%, 88%, 90% となり、かなり近似した値となる。

収穫丸太本数は、473, 477, 474, 478, 477 本であった。

5) 利用材積表の作成

以上検討した結果、(5) 式は全データを込みにした場合の精度が最もよく、また根張りとし梢端部分の当てはまりもよいことから、この式を用いて、直径、樹高階ごとの材長別末口径別丸太本数、材積を算出した。材長は、太子地域で用いられている基準の一つに従った。この採材基準により作成された表の一部を Table 30 に示した。Table 30 には、直径、樹高階ごとに、何 m の丸太が末口直径何 cm で何本採れるか、またその丸太材積と単木の利用材積が示されている。また、この計算で用いたプログラムでは、地域の任意の材長別、末口径別採材基準をデータとして入力できるように工夫されている。

結 言

幹曲線式の求め方について、五つの式を示して説明してきた。「はじめに」の中で、利用材積は幹材積と関係させて求めるのが合理的であると述べたが、ここに示した方法は、いずれも幹材積と対応づけられている。特に、3 の幹材積式から誘導した幹曲線式では、現在国有林で使用されている幹材積表で最も多く用いられている幹材積式を幹曲線式に変換する方法であり、有効だと考えられる。しかし、幹材積式を直径級で級分けしているために、各級の接合点で連続性が失われるという問題が残る。多項式による方法は、ここで取りあげたなかでは精度が最もよく、他の方法で級分けして得られた精度と同じ程度の精度が、データ全体を一本にまとめて得られた。したがって、式としては繁雑そうに見えるが、細り表、形数表、利用材積表あるいは収穫本数表の形にしておけば、利用面ではなんら不都合は生じないであろう。

つぎに資料についてであるが、用いた資料数の不足はいなめなく、特に樹高 25 m 以上の本数が少なく、もっと数を増したとき、どのような推定精度が得られるか、今後の問題として残される。しかし、単木の上部木直径の測定は、伐倒による測定はもとより、器械を使用した測定においても、費用、時間、労力の点から困難になってきている。したがって、今までになんらかの形で集められた資料を利用する方法がとられなければならない。しかし、例え、これらの資料が利用できたとしても、異なる目的で収集された資料なので、そのまま用いることはできない。例えば、幹材積表調製に用いた上部直径の測定位置は、胸高直径以外に地際から 1 m, 3 m, ……と奇数 m で測られている。この資料を用いて相対曲線式を算出する

ためには、補間によって所要の位置の直径を求める必要がある。その方法として、いくつか考えられるが、なかでも SPLINE 補間法や農林研究計算センターに用意されている最小二乗法（プログラム SALS）による解法があるが、これらは今後の研究課題として残されている。

最後に、近年海外で材積推定法に対する新しい手法（SPLINE法を用いた丸太材積推定のような）が試みられているので、検討されるべきだと考えている。そして、どのような手法においても、実用面で利用しやすいものでなければならないということを忘れてはならない。

引用文献

- 1) BEHRE, C. E. : Preliminary notes on studies of tree form. J. For. 21, 507~511, (1923)
- 2) BRUCE, D., CURTIS, R. O. & VANCORVERING, C. : Development of a system of taper and volume tables for Red Alder. For. Sci., 14, 339~350, (1968)
- 3) DEMAERSHALK, J. P. : Converting volume equations to compatible taper equations. For. Sci., 18, 241~246, (1972)
- 4) GRAY, H. R. : The form and taper of forest-tree stems. 78 pp., (1956)
- 5) GIURGIN, V. : An analytical method of constructing dendrometrical tables with the aid of electronic computers. Rev. Padurilor 78, 369~374, (1963) [In Rumanian]
- 6) KOZAK A. & SMITH J. H. G. : Critical analysis of multivariate techniques for estimating tree taper suggests that simpler methods are best. For. Chron. 42, 458~463, (1966)
- 7) KOZAK A. & MUNSO D. D. : Taper functions and their application in forest inventory. For. Chron. 45, 278~283, (1969)
- 8) 梶原幹弘 : スギ同齢林における相対幹曲線の変動について。日林誌, 54, 340~345, (1972)
- 9) ——— : スギの相対幹曲線について。日林誌, 55, 63~70, (1973)
- 10) ——— : 相対幹曲線と関連しての樹皮厚率について。日林誌, 55, 132~139, (1973)
- 11) ——— : 林分相対幹曲線による林分細り表の作成方法。日林誌, 55, 379~387, (1973)
- 12) ——— : 相対幹曲線による林分の全幹材積ならびに利用材積の推定について。日林誌, 56, 353~360, (1974)
- 13) ——— : 相対幹形とその幹材積推定への利用に関する研究(Ⅲ), 同齢林のスギでの相対幹形といくつかの正形数の変化。日林誌, 65, 382~387, (1983)
- 14) ——— : 相対幹形とその幹材積推定への利用に関する研究(V), 大分のスギ同齢林における相対幹形と正形数。日林誌, 66, 268~274, (1984)
- 15) MATTE, L. : The taper of coniferous species with special reference to loblolly pine. For. Chron. 25, 21~31, (1949)
- 16) 大隅眞一 : 幹形に関する研究(1), 相対幹形について。日林誌, 41, 471~479, (1959)
- 17) ———・他 : 森林計測学。養賢堂, 415 pp., (1971)
- 18) PRODAN, M. : Messug der Waldbestände. 260 pp., (1951)
- 19) ——— : Holzmesslehre. 644 pp., (1965)
- 20) WIAIT, H. V. etc. : Predicting diameters inside bark from outside bark measurements on some appalachian hardwoods. J. For. 72, 775, (1974)

Predicting Method of Merchantable Volume based on Taper Curve Equations

Miyoko HIWATASHI⁽¹⁾

Summary

At present stumpage volume tables are used for assessing stand volume and increment, and also, different local merchantable volume tables or tables of merchantable relative volume are constructed for calculating log class volumes. Stumpage volume and merchantable volume table have been constructed separately until now. In this paper, taper curve equations are used for calculating merchantable volume based on local log allotment, corresponding with stumpage volume. The species is Sugi (*Cryptomeria Japonica* D. Don) and the data used are mainly from measurement data in Daigo district forest office, together with basic data for constructing stumpage volume table of Tokyo regional forest office and Ohtahara district forest office in Maebashi regional forest office. (Data from Ohtahara are used only for studying the application to buttress.)

1) Accuracy of stem taper curve equations

The following five models are studied.

(1) Paraboloid model

$$(d/D)^2 = a + b(h/H) + c(h/H)^2$$

where D : d. b. h. H : total height

h : height above ground d : diameter at height h

a, b, c : parameters

(2) Logarithmic stem curve model

$$\log d = b_0 + b_1 \log D + b_2 \log (H-h) + b_3 \log H$$

where h : height above ground

d : diameter at height h

b_0, b_1, b_2, b_3 : parameters

(3) Compatible logarithmic taper model

Parameters of a logarithmic taper curve equation are obtained from those of a stumpage volume equation

$$(\log v = a_0 + a_1 \log D + a_2 \log H)$$

(4) Relative taper curve model

$$y = ax + bx^2 + cx^3$$

where x : relative length from the tip as expressed in the percentage of total height

y : relative radius at $d_{0.9}$

(5) Bruce's polynomial model

$$(d/D)^2 = a_0 x^{\frac{1}{2}} (10^{-1}) + a_1 (x^{\frac{1}{2}} - x^3) \cdot D \cdot (10^{-2}) + a_2 (x^{\frac{1}{2}} - x^3) \cdot H \cdot (10^{-3}) \\ + a_3 (x^{\frac{1}{2}} - x^{32}) \cdot D \cdot H \cdot (10^{-5}) + a_4 (x^{\frac{1}{2}} - x^{32}) \cdot H^{\frac{1}{2}} \cdot (10^{-3}) + a_5 (x^{\frac{1}{2}} - x^{40}) \cdot H^2 \cdot (10^{-6})$$

where $x = (H - h_i) / (H - 1.2)$ h_i : height above ground

First of all, we tested fitness on buttress and tree top using data in Ohtahara. Several

Received September 24, 1985

(1) Forest Management Division

heights above ground (0.00, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00 m) are chosen for diameters of base level and two cases were tested on tree tops, one up to the tip and the other up to the bole height with a diameter of 3 cm. Standard errors in (1) and (1) with the restraint that $d=0$ when $H=h$, were compared. (Table 2) It showed bad fitness to buttress and tree tops. As small ends of diameter are usually used only from butt logs to logs above diameters between 3~4 cm, the stems from d. b. h. to tree tops under diameter 3 cm were studied in this paper. In the fitting methods data are divided into 5 m height class in (1)~(3) and also classified into classes of 0.05 width. The fitting in case of the combined classes with all trees were examined. As a result, standard errors in classes under 20 m height were well estimated (0.24~0.73), but it became worse as height classes were larger like 1.56~1.65 for 20~25 m class, 2.09~2.50 for over 25 m class.

The standard error in the total combined cases, were 2.26 for (1), 1.51 for (2), 1.50 for (3). (Table 3, Table 8)

The above computations was for data of Daigo, but there was the same tendency in the standard errors of Tokyo forest district data. (Table 10)

In (4) model, The values of $\eta_{0.5}$ were divided into 6 classes (0.60~0.85) and its standard errors were good estimators (0.27~1.05), but their estimation is troublesome and unpractical. The standard error in all combined classes using $\eta_{0.5}$ is 1.67 for stems for 0.1H to 0.9H. (1.72 for stems from d. b. h. to tree top up to 3 cm diameter) (Table 17)

In case of (5), combined data are used including tree tops because they have good fitness even in tree tops. The standard errors using combined data in all cases (1)~(5) are shown in Table 27.

2) Conversion of o. b. diameter to i. b. diameter

The following equation was found to be the most accurate after the examination of four kinds of conversion equation from o. b. diameter to i. b. one. (Table 23)

$$d_i/d_o = a_0 + a_1(h/H) + a_2(h/H)^2$$

Bark width ratio has no remarked difference in size of stems according to height class. (Table 26) Therefore, it would be possible to estimate i. b. diameter by a single equation which is made from all trees.

3) Determination of average heights by diameter classes

It is necessary to obtain average height belonging to each diameter class for the construction of taper curve and merchantable volume table. The Näslund equation is generally used, but as actual heights tend to be smaller than estimated ones between d. b. h. 25~42 cm, actual heights are adopted in this paper.

4) Accuracy of the estimators of merchantable volumes by each stem taper curve equation

First of all, log volume of each tree was calculated using the equation adopted in section 1) and after adding data of all trees, we compared each model in numbers of logs and merchantable volumes.

As log allotment for this comparison, the adopted length of logs are 3 m for the trees of d. b. h. under 26 cm, and 4 m for the trees of d. b. h. above 28 cm. The small end of diameter used in this model is over 4 cm.

Inside bark diameters of each log were obtained using the conversion equations from outside bark data. Volume were calculated through "Suekuchi jijo method", that is, "square of a diameter multiplied by the length of the log." Conversion factors are shown in Table 24.

For a comparison of the volumes obtained by the above mentioned stem curve equation

method, the volume for Sugi of Tokyo regional forest office were used. The result are shown in Table 27.

The ratio of the total accumulated log volume to the volume table value of Tokyo regional forest office are 0.99 for (1), 0.83 for (2), 0.91 for (3), 0.94 for (4), 0.88 for (5). We can decide that equation (1) is rather excessive and (4) is a little excessive considering the fact that buttress, tree tops, and barks are neglected in the log volume calculations.

It seems that ratios of equation (1), (2), (3) become comparatively close (0.89 for (1), 0.88 for (2), and 0.90 for (3)) when (1), (2) and (3) are calculated according to tree height classes.

The total numbers of the logs of each method are 473, 477, 474, 478 and 477 for (1), (2), (3), (4) and (5) equations.

5) Construction of a merchantable volume table

In conclusion, equation (5) is the most accurate among other methods when data in all height classes are applied. It also has good fitness even in applying to the parts of buttress and tree tops.

Therefore, equation (5) was selected for the construction of a merchantable volume table. The log allotment for this model follows the method used in Daigo. A part of the table constructed by above mentioned method is shown in table 30. The table shows numbers of logs and their volumes by the small ends of logs and log length according to diameters and height classes.

The computer program has an optional function of entering data on any type of log allotment.