

薄 い 層 流

Robert E. Horton, H. R. Leach, and R. Van Vliet; Laminar sheet flow.
[Trans. Amer. Geophys. Union, 1934; 395—404]

緒 言

薄い層流というのは乱流が起らない状態の下で粘性流体の薄い層の流れと定義しうる。

地面からの直接の地表流下は初めには水の薄い膜または層の流れとしておこる。水の幾分は断えず土中に吸収されるのと、地面の凹凸のためとで、降雨中の地面上を流れる薄い水層の存在は屢々見逃がされ、または単に注意されるのみである。水が一定の流水路に入る以前の地表流下の現象が、流水の量水曲線の形と特性とを主として支配することを示す研究がなされた。この特性を決定するために薄い層としての水流を支配する法則についての知識が必要である。

土の表面侵蝕は水の薄層流の結果で、これがおこることは降雨中の地表流の深さと速度とで支配される。

水の薄層流の現象はこれまで殆んど注意を惹かなかつた。そして後に引用する Jeffreys の業績を除いては Hagen-Poiseuille の法則がこの型の実際の水流について証明されるかどうかを実験的に決定することを企てた人は無かつた。ここに記載する実験の目的はこの点について具体的知識を提供することにある。

薄 い 層 流 の 理 論

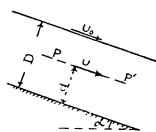


Fig.1 - Laminar Sheet-Flow

Fig.1 は比較的広い水路の縦断面をしめし、その内に粘性流体の流れ Q が D の深さでおこつており、水路は此の軸上直角に水平になつてゐる。

feet-pound-second 単位で、 s = 底の傾斜、 $\sin \alpha$; D = 底から水面までの深さ (ft); d = 底から液中の任意点 P までの深さ (ft); Q = 全流量 (cubic feet per second); q = 単位幅に対する流量、 Q /幅 (cubic feet per second per foot); u = 底から d の距離に於ける速度 (feet per second); v = 平均流速、 q/D (feet per second); ρ = 密度 (pound per cubic foot); μ = 絶対粘性 (pound per second per foot); ν = 動粘性 (feet² per second) = μ/ρ 。空気と水面とのマサツ抵抗は 0 と仮定する。

整流 (Uniform flow) に対しては D = 一定で加速度は無い。故に底面に平行の任意平面 pp' 上の水の重さによる力は、この面に沿うて働くマサツ力と等しくなければならない。 pp' 面上の単位面積当りの pp' に平行に働く流体の重さによる力は

$$f = \rho g(D-d)s \quad \dots\dots\dots (1)$$

で、 pp' 面の単位面積当りの粘性によるマサツ力は

$$-f = \mu(du/dd) \quad \dots\dots\dots (2)$$

(1) と (2) とを等置して

$$\rho g(D-d)s = \mu(du/dd)$$

これから

$$du = (\rho/\mu)gs(D-d)dd$$

また

$$u = (gs/\nu)(Dd - d^2/2) + C$$

粘性流体であるから、底では $u=0$, $d=0$ で従つて $C=0$ となり、そして

$$u = (gs/\nu)(Dd - d^2/2) \quad \dots\dots\dots (3)$$

表面では $d=D$ で

$$v_s = (gs/\nu)(D^2/2) \quad \dots\dots\dots (4)$$

平均速度は

$$\begin{aligned} v &= (1/D) \int_0^D u dd = (gs/\nu) \int_0^D (Dd - d^2/2) dd \\ &= (gs/\nu)(Dd^2/2 - d^3/6), \quad d=D \\ v &= (gs/\nu)(D^2/3) = 10.72(D^2/\nu)s \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

また式 (4) から

$$v_s = (3/2)v \quad \dots\dots\dots (6)$$

pp' 面が表面に近づくに従つて pp' の上の流体の重さによる力は 0 に近づく。そして表面では式 (1) は 0 となり、また (du/dd) は 0 である。

単位幅当りの流量は

$$q = vD = (gs/\nu)(D^3/3) \quad \dots\dots\dots (7)$$

深さと速度とを q で表わすと、式 (7) から

$$D = (3\nu q/gs)^{1/3} \quad \dots\dots\dots (8)$$

また

$$v = q/D = (gs/3\nu q)^{1/3} q = (gs/3\nu)^{1/3} q^{2/3} \quad \dots\dots\dots (9)$$

また (6) から

$$v_s = (3/2)(gs/3\nu)^{1/3} q^{2/3} \quad \dots\dots\dots (10)$$

英式単位では $g = 32.16$ で (8), (9), (10) 式は

$$D = 0.4535(q\nu/s)^{1/3}, \quad (\text{feet 単位}) \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$= 5.442(q\nu/s)^{1/3}, \quad (\text{inch 単位}) \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$v = 2.207(s/\nu)^{1/3} q^{2/3}, \quad (\text{feet per sec}) \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$v_s = 3.310(s/\nu)^{1/3} q^{2/3}, \quad (\text{feet per sec}) \quad \dots\dots\dots (14)$$

実 験

Horton 水理実験所で 1934 年 2 月に薄い水流について実験を行つた。この時の事情のために実験は粘性流の限界外にはほんの僅か行われたに過ぎなかつた。

実験水路 水路は幅 5.64 in, 長さ約 4 ft の木製樋からなり、その上流部 13 in は接近水路と給水口として使用された。構造と一般配置は Fig. 2 に示してある。

水路の底は 1 in のマツ材を用い、歪みを防ぐために $1\frac{1}{8}$ in のアングル鉄材の棧を底に張り、また両側にアングル鉄材のレールを設けた。そして No.0 サンドペーパーで磨き中心に沿つて僅か凹みにし、長さに沿う中心で 0.02 in 低くなるようにした。両側は鉄材レールと底板の間に 1 in と $1/4$ in のマツ材片にした。側面のアングル材の頂端は底から $1/2$ in とし、水深測定の基本線とした。

接近水路の下流端の孔門は用いながつた。孔の台から $1\frac{1}{2}$ in 下流に、これよりも 0.17 in 高く真鍮製の敷居を水路の本体の初めとした。この敷居は 0.14 in の幅で底面から 0.015 in つき出ている。このつき出ていることのために測定箇所では支障が起ることは無かつた。水流は水路の上端で直径 $1\frac{1}{2}$ in, 長さ 3 in の垂直管を通して行われた。

水路の上端に設けた調整可能の control-weir によつて取入池の水高を加減することができる。井戸から波み上げるためにおこる波は control-weir の方に流れを向けるような deflector を用いて最小になすことができた。

測定箇所の位置は底面に水にシミないインクで書いた場所とコースラインとで決定することができる。縦のコースラインは水路の軸に平行に中央線、両側から 1, 2 および $2\frac{1}{2}$ in と、最後の線は水路の側面から 0.32 in とに描いた。

これらを水路を横ぎつて左から右え $1/2$, 1, 2, 3, 4, 5 および $5\frac{1}{2}$ と呼んだ。

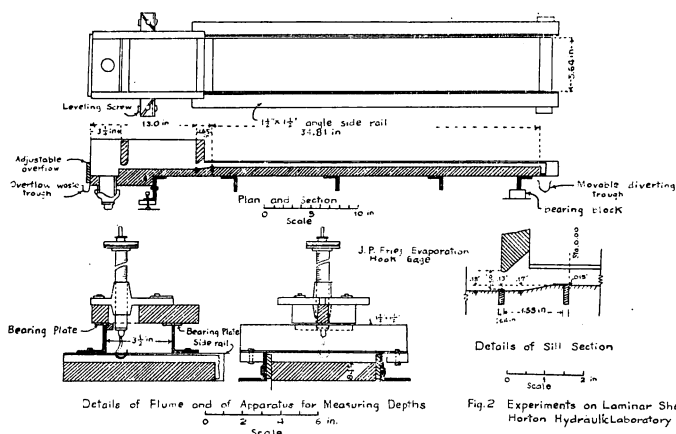


Fig. 2 Experiments on Laminar Sheet-flow
Horton Hydraulic Laboratory

測定箇所は中央線に沿うスケールで in で示され control weir で始まり下流に進む。中央線に直角の横線は control weir に始まって 6 in 間隔に描いた。

位置は測定箇所とコースとで示し、12—2 は control weir から 12 in 下流でコース 2 (中央線から左え 1 in) である。

水深の測定 水深の測定は Fig. 2 に示してあるように据付けた Frier micrometer hook-gage で行つた。gage を測定箇所 3.2 から下流え水路の任意の点に置けるように可動台が設けてある。

gage の上の micrometer-scale は 0.001 in にきざまれている。水深は水路の底と水面との gage の読み取りの差で決定されるが、ともに hook の曲りの底を用いて読み取る。底の読み取りは $3/8$ in と 1 in の扁平な真鍮片を底の上に置き、gage の底と真鍮片の上端との間に入れた紙片が丁度離れるまで gage を徐々に下げて行ふ。gage の読み取りは正しい底の値を得るのには真鍮片の厚さと紙の厚さ (0.062 in) を補正する。

水面の読み取りは hook の底が水面に接触するまで gage を徐々に下げて行ふ。底が水面に接した瞬間に hook gage の上に一定の毛管上昇が起るので正確に知ることができる。繰り返し測定を行つても 0.002 in 以上の差は稀で普通 0.001 in 以下である。

傾斜 側壁のレールの傾きは U-gage で測る。これは内径 0.4 in で長さ 7 in の 2 本のガラス管から成り、これを台に乗せ長さ 4 ft のゴム管でつなぐ。管をレールの上に 30 in を隔て、置き両管の水面を読み取る。次に管の位置を反対にして読み取りを繰返す。側壁レールに沿う水平の差は A 読み取りと B 読み取りの平均の差からえられる。管内の水面は $1/40$ in まで読み取ることができる。

これは 30 in に対し 0.0008 の傾斜に等しく、その誤差は約 0.0004 である。この誤差の影響は主として床の傾きによるのである。

水路の底の hook-gage の読み取りは側壁レールに対して取る。水面の傾斜は測定箇所 12 と 30 (試行 1 から 3 までは 12 と 24) の水面の差と水路の底の傾きとの代数和とする。

流出容積 水路の下流端に可動樋を設け、これによつて水路を通る水流を瞬間的に 25 ガロン容器に入れることもまたはすすこともできる。水流が定常になつたときに水路からの放出量は 10 分乃至 30 分ごとに容器に取り入れる。この量を $1/4$ オンスまで測れる。Fairbanks 絹糸計で重量を測る。一つの実験における放出水量は普通 100 から 200 lb の重量である。こういう条件の下で放出水量の容積の測定はかなりの確度でえられる。

水面流速の測定 水面流速は水に着色した部分の前線が測定箇所 6 と 30 の間 24 in のところを通過する時刻できめる。fluorescein その他について試みた結果普通の青染料を用いることにした。これははつきりして見易い着色部を与える。青染料を皮下注射器の針で測定箇所 2 に近い水面上約 0.1 in から滴下する。観測は $1/5$ 秒刻みの stop-watch で行ふ。

$1/8$ in の直径の円形紙片をナイフの先端から水面におとして比較したが、着色によるものと一致した速度を与える。次の表にその結果を示す。

コース No.	時 間 (秒)	
	着色	紙片
3 (中央線)	5.4	5.6
	5.4	5.4
	5.4	5.4
5 (中央線から右 2 in)	5.0	5.0
	4.9	5.0
	4.9	5.0
5.5 (側壁から 0.32 in)	4.8	4.8
	5.0	4.8
	5.0	4.8

各試行毎に 15 回、30 回の流速観測を行つた。観測時間の公算誤算は 0.2 秒、単一測定に於いては最大流速で 20%、最小流速で 4% の誤差あり、一試行の平均速度の誤差は 5% をこすことは無いであろう。

実験方法および観測 一組の試行のために水路に水を流す前に水深を読み取るべき各点につ

いて底の上の hook-gage の読み取りを行つた。木製水路の膨脹量は各組の試行の終りに水路の水をあけたときにこの測定をもう一度やつて確めた。膨脹はどの点でも 0.006 in を越すことなく平均して 0.006 in 以内であつた。観測は膨脹のすべてまたは殆んどすべてが第一と第二の試行の間に起ることをしめしている。

次に水路を横断面について水平となし、縦断面の傾斜を測る。水流を起し下端の堰を水流が僅かにこれを越すように調節する。与えられた時刻に水流を測定容器に取り入れ、水面の読取りを中央線に沿うて 6 in ごとに行う。

この際測定箇所 6 に始まり同時に箇所 3.2 と 34.0 との読み取りを行う。これに加えてコース 1 と 5 の読み取りを測定箇所 12, 18 および 30 で行つて水深の横断面上の変化を検する。

流速観測は次で行われるからコースの各々に沿うて 3 の読み取りを行う (3 以上のこともあり、時として 2 のこともある)。水温の読み取りは試行の進行中取入池の内で時々行われる。一般に水温には殆んど変化がない。読み取りがすべて完了した時に容器内に取り入れることを止め水の重量を測る。

流速が小さな時は水面は滑らかである。流速が大になると定常的小波が水路の各側から対角線的に下流に向つてできるが、ときとしては上流と下流に向つて交叉することもある。

水面下に注射針を入れて着色水の定常流を作つて着色流線を得ることを試みた。流速の小さなときにはこの企は成功し整一の大きさと強さの細い線をしめた。その経路は多少うねうねしたが線が切れることはなく全長に亘つて整一であつた。流速の大きなときには針の先の擾動のために細い線をえがたく色線は幅広くかつうねうねした束になつた。

予備的の試行を除いて 28 回の試行を行つた。その内初の 4 回には多少水流中に空気が封じこまれていた。

Table 1 は各回の観測および実験データを示す。欄 (5) から (9) までは水深の全部の平均を

Table 1. 実 験 デ ー タ

日附 1934	No.	傾 斜 測点 12 から 30 まで		測 定 深 さ in					平均深さ 12—30
		水 路	水 面	測 点					
				6	12	18	24	30	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	in, D
Feb 1	1	.0123	.0104		.0785	.0830	.0843		.0819
"	2	"	.0114		.0950	.0993	.0970		.0971
"	3	"	.0115		.1027	.1047	.1060		.1045
Feb 5	4	.00667	.00539	.1610	.1510	.1603	.1610	.1630	.1588
Feb 7	5	.00667	.00562	.1577	.1500	.1593	.1610	.1607	.1578
	6	.00375	.00264	.1250	.1223	.1335	.1345	.1345	.1312
	7	"	.00203	.1130	.1150	.1245	.1275	.1360	.1258
	8	.00646	.00396	.0950	.1020	.1135	.1210	.1370	.1184
	9	"	.00557	.1560	.1497	.1585	.1595	.1550	.1557
Feb 12	10	.00646	.00548	.1420	.1380	.1460	.1460	.1483	.1446
	11	"	.03553	.1770	.1647	.1690	.1700	.1723	.1690
Feb 15	12	.0104	.0106	.1620	.1507	.1487	.1470	.1480	.1486
	13	"	.0100	.1430	.1340	.1343	.1350	.1360	.1348
	14	"	.0097	.1050	.1043	.1093	.1030	.1080	.1074
	15	"	.0088	.0810	.0830	.0873	.0860	.1013	.0894
	16	.0127	.0115	.0770	.0780	.0817	.0800	.0893	.0822
	17	"	.0121	.1080	.1053	.1077	.1060	.1063	.1063
	18	"	.0124	.1440	.1340	.1300	.1290	.1293	.1306
	19	"	.0128	.1560	.1483	.1423	.1360	.1363	.1407
Feb 22	20	.0123	.0125	.1365	.1220	.1190	.1160	.1170	.1185
	21	"	.0125	.1700	.1540	.1500	.1430	.1450	.1480
	22	"	.0131	.2060	.1890	.1810	.1710	.1690	.1775
	23	.0196	.0204	.1840	.1640	.1550	.1470	.1450	.1528
	24	.0358	.0365	.1530	.1310	.1270	.1140	.1140	.1215
	25	"	.0355	.0770	.0763	.0750	.0730	.0750	.0748
	26	"	.0355	.0860	.0780	.0810	.0750	.0790	.0782
	27	.0467	.0474	.1340	.1180	.1140	.1040	.1020	.1095
	28	"	.0471	.0730	.0670	.0730	.0690	.0710	.0700

in で示すもので夫々の測定箇所の断面上の数々の点で測つたものである。欄 (10) は測定箇所 12, 18, 24 および 30 の平均水深の算術平均を示す。

欄 (11) から (15) までは 5 コースの表面流速の観測値をしめすので、水路の左側から欄に示してあるような距離のものである。なお中央線の各側 1 in のコースの観測は中央線のコースの check のためのもので、中央線の観測値とほぼ等しい速度をしめす。欄 (16) にしめす平均水面流速は中央近くの両コースを含む全 7 コース平均速度からえたもので、側壁に近いコース (0.5 と 5.5) の観測値には 1/2 の重みを附けたものである。

欄 (19) に上げた動粘性は foot-pound-second 単位で次のデータに基くものである。

温 度 °F	ν	温 度 °F	ν
30	0.0000200	60	0.0000121
40	0.0000167	70	0.0000106
50	0.0000141	80	0.0000093

実 験 の 結 果

Table 2. は feet で表わした水深 (欄 2) に対する実験の結果を示す。(6) 式から薄い層流では平均流速は水面流速の 2/3 であることが示されている。幅の 1 ft 当り流量 q と水深 D とが知れているから層流であるときの平均流速を決定する二つの方法に対して実験データが使える。水面流速と流量および水深とから決定したそれぞれの平均流速は欄 (6) と (7) とにしめされている。これら二つの結果はともに信頼すべきものであるから欄 (8) にあげた両者の平均を水流が明らかに乱流でないときの値として用いられる。開渠における乱流についての実験は平均流速の水面流速に対する比は層流に於けるよりも大であることをしめす。乱流に対しては

薄 い 層 流

測 定 水 面 速 度 ft per sec					平均水面 速 度 6—30 v _s	流 量 Cu ft/sec per ft width q	水 温 °F θ	動粘性 ft ² /sec ν
.5 2 1/2 left	1 2 left	3 center line	5 2 right	5.5 2 1/2 right				
(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)
								0000
.555	.500	.527	.588	.625	.543	.00249	41.9	+1615
.740	.800	.769	.833	.909	.804	.00236	43.4	1575
.930	.908	.930	.975	1.000	.951	.00533	45.4	1520
.852	.852	.930	.908	.908	.908	.00824	43.4	1575
.897	.922	.858	.897	.869	.892	.00694	32.6	1910
.672	.714	.672	.689	.697	.689	.00487	"	"
.583	.588	.560	.560	.601	.569	.00386	"	"
.392	.362	.370	.406	.406	.381	.00242	"	"
.833	.823	.870	.857	.880	.846	.00751	"	"
.832	.858	.832	.832	.832	.838	.00615	32.8	1905
1.000	.965	1.000	1.000	1.000	.995	.00966	"	"
1.250	1.177	1.130	1.198	1.198	1.163	.00984	32.6	1910
1.070	1.053	.966	1.036	1.000	1.015	.00803	"	"
.810	.790	.714	.769	.833	.759	.00455	32.8	1905
.551	.555	.457	.517	.545	.504	.00245	33.4	1885
.538	.537	.476	.545	.600	.523	.00243	33.3	1890
.908	.832	.790	.843	.890	.840	.00536	32.8	1905
1.111	1.156	1.037	1.156	1.111	1.121	.00878	32.6	1910
1.212	1.157	1.191	1.191	1.228	1.187	.01012	"	"
1.110	1.000	1.000	1.000	1.000	1.010	.00747	52.3	1363
1.177	1.250	1.250	1.250	1.250	1.244	.01400	35.7	1808
1.370	1.540	1.540	1.250	1.250	1.447	.01577	35.5	1815
1.539	1.667	1.539	1.430	1.430	1.543	.01938	36.6	1780
1.905	2.220	2.000			1.980	.01641	35.1	1828
1.430	1.250	1.250	1.430	1.430	1.340	.00617	35.5	1815
1.540	1.430	1.430	1.430	1.670	1.400	.00716	36.0	1800
2.000	2.220	2.000	2.000	2.000	2.037	.01539	34.9	1835
1.670	1.430	1.250	1.430	1.540	1.383	.00663	35.4	1820

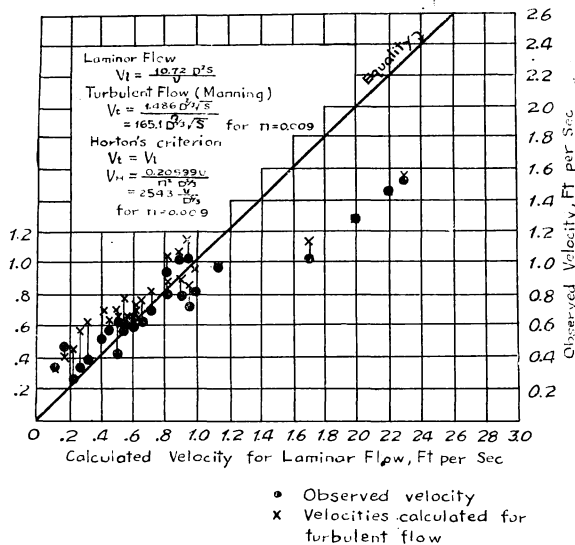


Fig.3- Comparison of Observed and Calculated Velocities for Laminar and Turbulent Flow

トしたものである。初めの 20 回の実験に対しては 6 と 7 回とを除いてはプロットした点は一般に等値線に沿っている。同じ図に × でプロットしたのは乱流であつたときの流速を

比は普通 0.75 から 0.90 である。欄 (7) の流量と水深とから決定した平均流速と、欄 (5) の水面流速によるものとの比は欄 (9) にしめされてある。この比はいかなる場合に水流が乱流になるかを判定する示標になる。1 から 20 までの実験では水面流速の平均流速に対する比は常に 0.75 以下であり、僅かの例外を除いては 2/3 に近く、これらはすべて層流であることを明らかにしめしている。なおまた 6 と 7 の実験を除くと層流に対する計算流速 (欄 10) は一般に観測平均流速 (欄 8) と良く一致している。

Table 2. の欄 (11) は乱流の計算流速をしめす。たゞし Manning の粗度係数の値 $n=0.009$ と仮定したのである。

Fig. 3. は黒点で層流について計算流速の term で観測流速をプロットしたものである。

Table 2. 実験の結果

実験 番号	平均水深 12—30 ft. D	水面 傾斜 s	動粘性 " "	平均表 面速度 12—30 v _s	2/3 v _s	q/D	(6)+(7) の平均	(7)の(5) に対する 比	層流に対 する計算 速度 v _l	乱流に対 する計算 速度 v _t	Reynol- ds 数 q/v	流れの 型
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
1	.00683	.0104	.00001615	.543	.362	.365	.364	.672	.320	.606	.154	層流
2	.00309	.0114	.1575	.804	.536	.292	.414	.363	.509	.709	.150	"
3	.00871	.0115	.1520	.951	.634	.612	.623	.644	.617	.747	.350	"
4	.01322	.00539	.00001575	.908	.606	.623	.614	.686	.641	.678	.523	層流
5	.01315	.00562	.00001910	.892	.594	.528	.561	.592	.546	.688	.364	層流
6	.01093	.00264	"	.689	.460	.446	.453	.647	.177	.417	.255	"
7	.01048	.00209	"	.569	.380	.368	.374	.647	.126	.356	.202	"
8	.00987	.00396	"	.381	.254	.245	.250	.643	.218	.478	.127	"
9	.01298	.00557	"	.846	.564	.579	.572	.684	.528	.684	.394	"
10	.01205	.00548	.00001905	.838	.558	.510	.534	.609	.450	.642	.323	層流
11	.01408	.00555	"	.995	.664	.686	.675	.689	.618	.714	.507	"
12	.01238	.0106	.00001910	1.163	.776	.795	.786	.684	.913	.909	.515	層流
13	.01122	.0100	.1910	1.015	.676	.715	.696	.704	.707	.825	.421	"
14	.00895	.0097	.1905	.759	.506	.508	.507	.669	.438	.702	.239	"
15	.00745	.0088	.1885	.504	.336	.329	.333	.653	.278	.591	.130	"
16	.00685	.0115	.1880	.523	.348	.354	.351	.677	.306	.639	.129	"
17	.00886	.0121	.1905	.840	.560	.605	.583	.720	.535	.777	.281	"
18	.01088	.0124	.1910	1.121	.748	.807	.778	.720	.824	.904	.460	"
19	.01172	.0128	.1910	1.187	.792	.862	.827	.726	.987	.964	.530	"
20	.00988	.0125	.00001363	1.010	.674	.756	.715 a	.749	.960	.849	.548	層流
21	.01232	.0125	.1808	1.244	.830	1.136	1.136 a	.913	1.130	.983	.773	乱流
22	.01480	.0131	.1815	1.447	.964	1.066	1.066 a	.737	1.700	1.139	.867	"
23	.01272	.0204	.1780	1.543	1.028	1.521	1.521 a	.985	1.994	1.285	1.088	"
24	.01012	.0365	.1828	1.980	1.320	1.621	1.621	.819	2.200	1.476	.898	"
25	.00623	.0355	.1815	1.340	.894	.990	.942	.739	.815	1.053	.340	層流
26	.00652	.0355	.1800	1.400	.934	1.100	1.017 a	.786	.900	1.083	.397	"
27	.00913	.0474	.1835	2.037	1.358	1.685	.828	.828	2.310	1.570	.837	乱流
28	.00583	.0471	.1820	1.363	.922	1.138	.822	.943	1.160	.364	.364	層流

しめす。のちに説明する理由によつて乱流が極く僅かの深さでおこるとするとその速度は層流の速度よりも大きいはずである。1 sec-ft よりも小さい速度に対しては乱流の計算速度は等値線以上にあり、また一般に観測速度よりも大である。6 と 7 の実験では乱流に対する計算速度と実測速度とは一致している。このことはこの場合水流は乱流であつたことをしめすのである。

同様の結果は傾斜の測定に誤差でもえられる。〔6 と 7 の実験で観測した傾斜を半分にするとかこれらの点を他のデータと調和させ、また更正した傾斜における乱流の計算速度以下にすることになる〕。実験を行つた時にもまた計算中にもこの 2 実験に対する実測傾斜は明らかに誤であつたことが注意された。平均速度の水面速度に対する比からもまた実験中の水面の様子からもこの 2 の場合に水流は明らかに層流であつたことをしめす。

20 から 28 までの実験についてはこの内の幾つかは速度は 1 に近かつた。この部分では或ものは等値線の上にまた或ものは下になる。乱流の実測流速と計算流速とを結ぶ線を図に書き入れると、計算流速が 1 ft-sec に近い、または僅かに下にある場合には実測流速は実質的に乱流の速度以下にあることをしめす。実測流速が 1 ft-sec 以下の場合には水流は明らかに層流であることは確かだと考えられる。

実験 21 から 24 までおよび 27 の場合は実測流速は実質的に 1 ft-sec を越している。これらの場合はすべて水面速度の平均速度に対する比は 0.73 に等しいかまたは以上であり、またすべて実測平均速度は乱流に対する計算速度とよく一致している。

水流が明らかに層流である条件に対しては (5) 式で与えられる薄い流れの平均速度は実験で確められ、またこれまでは単に理論的の根拠を持つに過ぎなかつたこの式は滑らかな面上の薄い層流の速度を決定するために信頼すべきものとして採用される。理論的考究によつて Poiseuille の法則と調和する層流の速度は面の粗度に関係であることをしめす。このことが真であるかどうかは今後行ふべき実験で確めらるべきである。

Reynolds 基 準

管の内の流体の流れに対する抵抗の一般式は

$$R = \rho v^2 f(vd/\nu) \dots\dots\dots (15)$$

で (vd/ν) は Reynolds 数である。広い水路では管の直径 d で表わされる linear dimension は水深 D で置き替えることができ、式 (15) は

$$R = \rho v^2 f(vD/\nu) \dots\dots\dots (16)$$

となり、また $vD = q$ であるから

$$R = \rho v^2 f(q/\nu) \dots\dots\dots (17)$$

となる。Jeffreys (Barold Jeffereys, The flow of water in an inclined channel of rectangular section, Phil. Mag., S. 6, V. 49, No. 293, London, May 1925) は (q/ν) を Reynolds 数と呼ばれることを示唆した。それは q も ν も直接調製されるからである。これらのどの形も問題に応じて有益である。

定常流では加速度が無いので水路の単位面積当りの R は水路の底に平行な水の重量の分力で測られる。そうすると $R = \rho g D s$ で、(16) 式から

$$(qDs/\nu^2) = f(vD/\nu) \dots\dots\dots (18)$$

また $v^2 = (q^2/D^2)$ であるから

$$(gD^3s/q^2) = f(vD/\nu) \dots\dots\dots (19)$$

流れが粘性であるときは $f(vD/\nu)$ は (5) 式で決定することができる。(5) 式の両側に D^2v を乗すると $D^2v^2 = (D^2gs/3)(vD/\nu)$ となり、これは

$$(3q^2/D^3gs) = (vD/\nu) \dots\dots\dots (20)$$

に等しい。故に流れが粘性である間は (D^3s/q^2) は Reynolds 数 (vD/ν) に反比例する。

著者の実験に対する Reynolds 数の値は Table

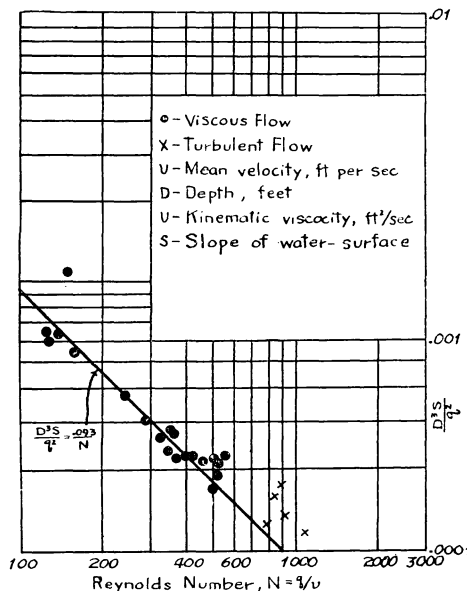


Fig. 4 - Reynolds Number for Sheet-Flow Experiments

2. の欄 12 に示してある。(D^3s/q^3) と (vD/ν) の実測値は Fig. 4 にプロットしてある。線は式 (20) のグラフで、これは (D^3s/q^3) = 0.0933/N となり、N は Reynolds 数 (vD/ν) 又は (q/ν) である。

流れが粘性である実験ではよくこの式の線に沿うが一般にはそれよりもやゝ下である。これはは少くとも一部は側壁の影響である。25 と 26 の試行 (Reynolds 数 340 と 395) では側壁の毛管上昇は他の多くの試行よりもいちじるしく大であり、かつ側壁から 0.2 と 0.3 in の間の距離に対する速度は主なる薄い流れのそれよりも大であつた。その結果として流れの異常の大部分は側壁に接近して動いた。このために薄い流れの深さが広い水路でかつ幅の 1 ft 当りの同一流量の場合よりも減じた。

Jeffreys は薄い流れに対して乱流は Reynolds 数が約 310 であるときに始まることを見出し、かつ Hopf は限界値は 300 と 330 との間であるとしたことを述べている。Table 2. の欄 (12) を参照すると著者の実験のどれでも流れが明らかに層流であるときの Reynolds 数の最大値は 548 であることが注意される。流れが乱流であるときの実験のいづれについても Reynolds 数の最小値は 773 である。次項に述べる理由によつて著者は Reynolds 数そのものは流れが層流から乱流に、またはその反対に変わる点の信頼すべき基準ではないと信ずる。

Horton 基準

Osborne Reynolds は管についての実験結果として、管内の流れが層流であるか乱流であるかの限界は 2 つあり、この限界は管の直径と流体の粘性のみによると結論した。Reynolds の管についての基準を開渠の場合に適用するについては疑問がある。なおまた Reynolds が実験した管は比較的平滑であり、その結果は粗面上の流れに対しての適応度については疑問がある。

薄い層流の速度は水深 D の自乗にしたがつて変る。広い水路に於ける乱流の速度は水深の $2/3$ 乗にしたがつて変る。小さい数の自乗は一層小さい数であるが、 $2/3$ 乗は大きな数になる。それ故僅小の深さでは乱流がもしおこるならばその速度は層流の速度よりも大となることは Fig. 3 にしめされるごとくである。与えられた水路の粗度、温度および傾斜に対して層流と乱流の速度が等しくなる或水深が常に存在する。それよりも浅い深さでは層流の速度は、乱流がおこつたとしたときのその速度より小である。

この実験が企てられた前に年長の著者は水路における速度とエネルギー分布の研究に従事し、乱流は兩種の流れの速度が同一である深さ以下では起り得ないとの結論をえた。蓋しこれより小さな深さでは乱流を維持するに足りるエネルギーを水流に保ちえないからである。層流のエネルギーは全部が並進運動のエネルギーである。流れが乱流であるときは流体は並進のエネルギーと回転エネルギーとの両方を含んでいる。こゝに述べた水路の速度分布の分析から、層流と乱流の速度が著しいときは流体の単位容積の全エネルギーは乱流の並進と非並進エネルギーの相方を含んで、電流の単位容積当りの並進エネルギーとほぼ等しい。故に速度の等しい点またはその附近では流れは層流でも乱流でもありうるし、またエネルギーの変化なしに一方から他方に変ることもできる。

けれどもこれより小さい速度のところでは層流が乱流になることができない。これより大きな速度では層流が成立しうが水のエネルギー含量は乱流を維持するに要するよりも一層大である。層流から乱流への変化は速度の等しい点以上の任意の速度においておこることができる。しかし大きな速度でこれがおこつた場合には波すなわち水路における水面の変化を行うであろう。速度の等しい点は明らかに水路における乱流の最低限を決定する。この点の位置は次の如くして決定することができる。式 (5) から層流の速度は

$$v_t = 10.72(D^3/\nu)s \quad \dots\dots\dots (21)$$

Manning 式に従うと広い水路における乱流の速度は、側壁の影響が無視される場合には次の式で与えられる。

$$v_t = (1.468/n)D^{2/3}\sqrt{s} \quad \dots\dots\dots (22)$$

n は水路の粗度係数である。この両式ともに foot-pound-second 単位である。両式の右側を等置して簡略すると

$$7.214(n/\nu)D^{1/3}\sqrt{s} = 1 \quad \dots\dots\dots (23)$$

この解法に依ると式 (23) の左側の数が 1 より小さいときは流れは乱流であることはできない。式 (23) は次の形に置くことができる

$$D^{2/3}\sqrt{s} = \nu/7.214 n D^{2/3} \dots\dots\dots (24)$$

$D^{2/3}\sqrt{s}$ は Manning 式の一因子であるから式 (24) の右側からこの量の値を (22) 式に置きかえて Horton 基準をうる。

$$v_H = 0.206 \nu / n^3 D^{2/3} \dots\dots\dots (25)$$

または概略

$$v_H = \nu / 5 n^3 D^{2/3} \dots\dots\dots (26)$$

管に対する Horton 基準は次の形に書ける。

$$v_H = k(\nu/D) \dots\dots\dots (27)$$

この式と開渠に対する Horton 基準との間には密接な相似があることが伺われる。後者では深さは指数は 1 でなく $2/3$ で逆比的になり、また Horton 基準は粗度係数 n を含むが Reynolds 基準は水路の粗度を含まない。

層流と乱流の速度は D と s について異なる函数であるから、かつまた前者は動粘性を含み、後者は粗度を含むので両者の速度の比は深さと粘性との連続的の一価の函数とはならない。同一の深さと粘性に対して比は水路の傾斜と粗度とに応じて異なる値を持つ。Fig. 3 に乱流速度に相応する点を通して平均線を引くなら (図には示してない) ば、この線は等値線を単位速度に相当する点の近くで横切ることが注意される。換言すると Fig. 3 に示した実験データは Horton 基準のように流れは層流と乱流との速度線が交る点に相応するよりも下の速度に対しては層流となることを示す。

なおまた乱流の速度が層流の速度であつたときよりも小さな場合にのみ流れは乱流となることが注意される。また実際の、すなわち測定した速度が層流と乱流との同一速度の点に相応するよりも小さな場合には常に流れは層流である。流れが明らかに乱流である場合には測定した速度は乱流に対する計算速度と非常によく合致する。故に実験データは Horton 基準を肯定する。

しかし、これらの実験で水深と速度とはいつても 0 から始まり初めは層流から始められたことを注意しなければならぬ。また面は只一つみに限りその粗度係数は $n=0.009$ であつた。実験はなお繰り返えされることが望ましく、また反対の方向すなわち乱流から始まつて深さを次第に減じて所要の点に至るようにしたい。なお粗度係数の異なる面についても行いたい。

薄い層流の上限界の存在についての疑問は残つている。

年長の著者による先に引用した水路における速度とエネルギー分布の分析は層流の一定の上限界を示さなかつた。このことの詳細はここに述べることはできない。この研究の結果は別に近く発表されることを期待する。(平田訳)

開渠における層流と乱流との轉移点の研究

Lorent Q. Straub⁽¹⁾: Studies of the transition-region between laminar and turbulent flow in open channel.

[Trans. Amer. Geophys. Union, 1939: 649—653]

多くの流体運動の現象において層流と完全な乱流の状態との間には流れの条件に大なる相違のあることは一般に認められている。このことは勿論管内でも、粗粒物質を通してまた種々の形の開渠の流れについても真である。流れのかゝる変化の重要性は認められている。流れの速度と抵抗との関係について実験的研究が必要である。

自然の水流現象に似せるための開渠流の模型の種々なる形に関連してこの轉移点の知識が極めて必要である。それは動的相似に対して模型が少々過ぎるような誤りをしないためにも、また満足すべき結果をうるために必要である以上に、模型の大きさを大きくしないためにも必要である。

力学的の相似の満足すべき度合がえられるならば開渠流模型を河の模型のようにできるだけ小さく作することは経済的にも望ましいことはいうまでもない。かゝる見地と同時に流動の一般基本的研究とのために速度の小さい流れの条件に関するデータをうるために Minnesota 大学で数年来実験が行われた。この論文には実験の初期のもの一つを記述する。こゝに報告する実験は大部分研究助手の Edward Siberman が行つたものである。この実験に用いた水路は幅 1.70 in, 深さ 3 in でアルミニウム板を張つた矩形断面のものであつた (そのスケッチは Fig. 1 に示す。図略)。実験装置は流体が水路を循環しうるようにしてあり、水路は種々の傾斜になしうるようにしてある。測定は整流で種々の水深に対して水深、流量および傾斜について行われた。種々の温度の水および Kerosene を流体として用い、いつも流体の粘性を Ostwald の粘性計を用いて注意深く検定した。

水深は in の 1,000 分の 1 まで測つた。この報告には狭い矩形水路による結果の概略を示すに止める。更に実験が行われ種々の形の水路と種々の粘性の流体についてなされつゝある。

加熱装置は給水池に設けられ流体の温度を調節するようになってゐる。傾斜 0.001, 0.002, 0.0025, 0.003, 0.004, 0.005 および 0.006 の水路を循環する Kerosene について逐次行つた。水についても同様の傾斜を用いた。

水理技術者は普通流速の決定に実験式を用いている。

特に Chezy 式 $V = C\sqrt{RS}$ と Manning 式 $V = (1.486/n)R^{2/3}S^{1/3}$ を用いている。こゝに V は流れの平均速度, R は径深 (Hydraulic radius), S は傾斜, C と n とは実験常数である。これらの実験式を心に入れてこゝに分析した

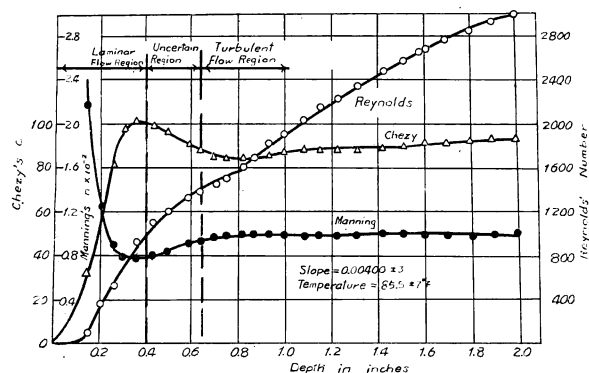


Fig. 2 Typical Data for one Slope of Channel Showing Relation of Chezy's C, Manning's n, and Reynolds' Number to Depth of Flow (Slope Constant)

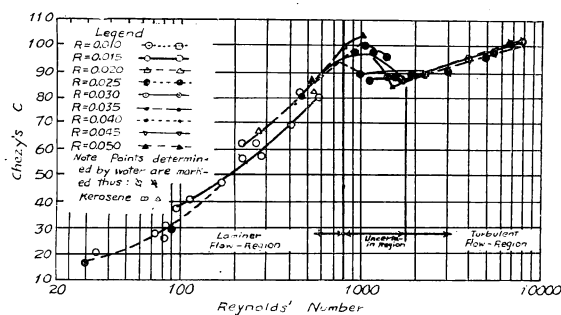


Fig. 3 Relation of Chezy's C to Reynolds' Number for Water and Kerosene Using Different Slopes of Channel

(1) University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota.

実験のデータを見ると、Chezy の C は流れの深さと Reynolds 数とで変り、また Manning の n も流れの深さと Reynolds 数とで変ることを示す。Reynolds 数 R は RV/ν と取る。但し ν は流体の動粘性である。矩形水路の場合に流れの種々の深さについて完全な幾何学的相似がえられない限り、深さの値を横座標（横座標として Reynolds 数を取るよりも）として、縦座標に n , C および R を水路の種々の傾斜について取つてプロットする。一つの傾斜についての典型的な点の一群を Fig. 2 に示す。種々の傾斜に対する曲線も同様な形を探る。Chezy の C は層流の区域では乱流の始まる点附近まで急に増す。

そしてこゝで曲線は急に曲り乱流の区域では殆ど常数になる。 n の値に対する計算値はこれと反対の形の曲線となる。乱流区域では n の値も殆ど常数となる。すべての傾斜に対する概要を両流体についてしめたのは Fig. 3 と 4 とで、それぞれ Chezy の C と Reynolds 数の関係および Manning の n と Reynolds 数との関係を示すのである。種々の傾斜に対して曲線の完全な一致を欠くことは主として矩形水路に対する Reynolds 数は幾何学的相似がえられなり限り種々の傾斜に対し完全な力学的相似の条件を決定しないという事実に基くのである。しかしこの実験に対しては Reynolds 数の長さの因子として径深を用いることは、比較した各断面が幾何学的に同一でないに拘らず満足すべき結果を与えることはあきらかである。

もう一つの興味ある比較は水と Kerosene との観測について典型的の二群の曲線を重ね合せて見ることである。(Fig. 5)。粘性が非常に異なるにかゝらず相応する縦座標をもつ曲線は二つの流体についてほぼ一致している。

Fig. 6 は開渠を通しての流れと相応する条件で滑らかな管を通しての流れの測定結果の総括した比較をしめすのである。実線はそれぞれ限界速度以上と以下の管を通しての流れの曲線に相当する。こゝで Reynolds 数の長さの因子として径深を取つてある。開渠の流れについての観測値を示す点の乱散しているのは疑なく一部は幾何学的相似の欠けていることによるのである。かゝる状態にも拘らず径深は乱流を判別するための Reynolds 数に用いられる平均した

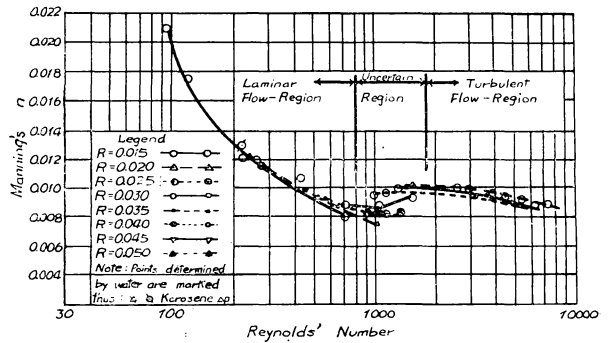


Fig. 4—Relation of Manning's n to Reynolds' Number for Water and Kerosene Using Different Slopes of Channel

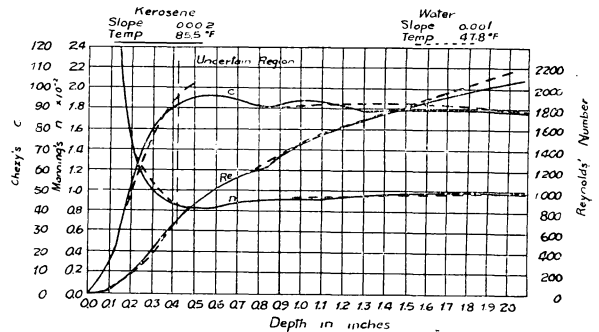


Fig. 5 Curves Superimposed Showing Dynamic Similarity Between two Series of Runs with Kerosene and Water

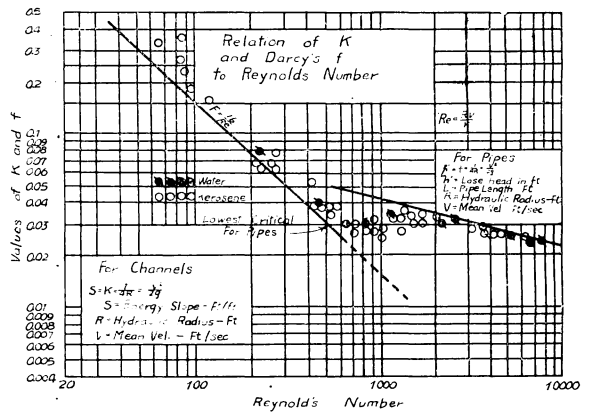


Fig. 6 Summarized Comparison Results Observations of Flow through Open Channel with Corresponding Conditions for Flow through Smooth Pipe

長さのジメンションとして良好であることをしめす。水理学の模型に用いるような開渠の内の流れの状態の実際的研究に関連しては概略の平均値について取扱うことが必要になる。これらのデータから開渠における限界の流れの条件は、円形の管を通しての流れの広い範囲の研究で見られるような Reynolds 数で良く判別されることが分る。

径深を長さの因子として用いた開渠における Reynolds 数の限界値は約 640 またはそれ以下であるらしい。Chezy および Manning 式の C と n の値は Reynolds 数と一定関係をもつ。乱流区域においては n の値は Reynolds 数の変化に対していつも常数である。このことは大きな運河や自然河流について行われた観測と全く一致する。(平田訳)

草生傾斜地上の浅い流れについての実験

W. O. Ree⁽¹⁾: Some experiments on shallow flows over a grassed slope.
[Trans. Amer. Geophys. Union, 1939: 653—656]

緒言 地表流下水の現象についての研究は降雨量の一部が地表流下に転換することを支配する自然法則の存在することを示した。この現象を説明する方式が展開された。しかしこれらの式の係数を決める実験的データの必要が感じられる。この論文の目的は草生水路に於ける速度の小さい流れについての実験結果をしめしかつ上記の必要を充たす助けとして地表流の式にこの結果を適用するにある。

この考案の基となつた実験は植生を植えた水路の水理学的状態を決定するために土地保存局によつて行われた広汎な研究の一部をなすものである。

この実験は South Carolina の Spartanburg 附近にある土地保存局の屋外水理実験所で行われた(この実験所の記載は Civ. Eng., V. 8, No. 10, Oct., 1936 にあり)。この実験所は H. L. Cook の技術的監督の下にあり, Section of watershed and hydrologic studies の長である C. E. Ramser の一般指揮の下にある。

Devision of research の代理所長の Dr. M. L. Nichols は土地保存局のすべての研究活動を司つている。

実験 こゝに考察するデータは Burmada-grass sod を植えた水路の実験で得たものである。この水路の断面は梯形をなし底の幅は 4 ft, 側壁の傾斜は 1 対 1½, 深さは 1½ ft である。水路の傾斜は約 3% で長さは約 50 ft。

植生の本数は平方 ft 当り約 350 の平均をしめし, 丈の平均高は 12 in. 実験の際には草は曲つていて約 4 in の厚さのマツトのような形になつていた。水路の土は Cecil clay-loam で固つていた。

実験方法はこの水路に 5 回水流を流がし, 水路の水理学的要素を計算するに必要な測定を行つたのである。5 回のテストが引きつゞき 5 日間に行われ, 追次水量を増して行つた。

流れの早い速度は検定した流速計量樋の方法で測つた。

この樋から取入池に受け入れるのだが, 取入池からは排水路または実験水路に水を分流し得るようにしてある。

流れの速度の小さいものはこの容積で測つた。流れは実験施行中には一定に保持した。

この水路の内の測定部分は 10 ft の長さで水路の上端から約 20 ft のところから始まる。この測定部の各端に可動尖端附ゲージを備え, 水面の縦断面を各テスト毎に取つた。また測定部の各端の水路底の横断面をテストの前後に直ちに取つた。測定は各 0.001 ft になされた。

これらの測定から各テストに対する傾斜, 断面積, 潤周, 潤径を決定することができる。こゝに用いたこれらの値は測定部の端における値の平均である。これらのデータから平均速度と Manning の n と Kutter の n を計算した。5 回のテストに対する主要な水理学要素は Table 1. に示してある。

Table 1. 実験の主要要素

実験	流量 Q	面積 A	平均速度 V	潤 周 P	潤 径 R	有効傾斜 Se	Mannings n_M	Kuttersn n_K
	cfs	ft ²	ft/sec	ft	ft			
1	0093	0417	0228	368	0113	00316	0277	0116
2	0215	0725	0300	413	0176	00318	0280	0131
3	0356	1003	0356	441	0227	00326	0285	0141
4	0561	1329	0424	468	0284	00322	0273	0144
5	0748	1422	0528	474	0300	00314	0224	0124

最初の 4 回のテストの間は流れの深さは草丈より以下であつた。これらのテストの間は流れは全く見えなかつた。5 回目のテストの間は流れは草の約 30% を没する深さとそれに必要な

(1) Section of watershed and hydrologic studies, division of research, Soil conservation service, Spartanburg, South Carolina.

速度になつた。このために実験水路の水利学的特質に変化を生じ、そのことは n_K と n_M の値の急落となつて反映している。

地表流式の誘導 実験水路に於ける流れの特質は上記の始めの 4 回のテストに対しては降雨中の草生斜面上の薄い流れのそれと似ている。このデータは多少変えてこの種の型の地面に対する地表流の式を誘導するのに使える。

R. E. Horton [Surface runoff phenomena, Part I. Analysis of the hydrograph] は地表流の起る地域に対しては流下量の手速度は地表残留量 (Surface detention) の平均深さの函数であり両者の関係は次の如く表わされるとした。

$$q = k \delta_a^M \dots\dots\dots (1)$$

こゝで q は直接地表流下のレート、 δ_a は地表残留量の平均の深さ、 k は傾斜と表面の性質に関する係数、 M は流れの乱流度に関する指数である。

この地表流の式に地表残留量の平均深を用いてある。しかし水流の深さは地域上整一ではなく、分水界の 0 から流出点の最大の間に変わり、断面の形は流れの型に依つて変る。Dr. Horton の論文に地表残留量の平均深さの流出点に於ける深さに対する比を表わす式が与えられている。それは次の如くである。

$$\delta_a / \delta_o = M / (M + 1) \dots\dots\dots (2)$$

こゝで δ_o は流出点における深さである。実験水路における流れの深さは、地表流のおこる地域の出口における流れの深さに相当するものである。それ故に (2) 式によつて実験データを平均残留深さの項で表わすことができ、かつこの形で地表流式を表わすことができる。

(2) 式によつて δ_a の値を計算するには、まず指数 M の値を決定しなければならぬ。実験データについてその対数をプロットすることにした。このプロットで M の値は殆ど正確に $5/3$ であることを示した。これは流れは實際的に 100% 乱流であることをしめすのである。(2) 式の M に $5/3$ の値を入れて δ_a について解くと次の式を得る。

$$\delta_a = 5/8 \delta_o \dots\dots\dots (3)$$

δ_o の値に対して Table 1. に与えた径深が用いられた。 δ_a の値は (3) 式で計算され Table 2. に示してある。

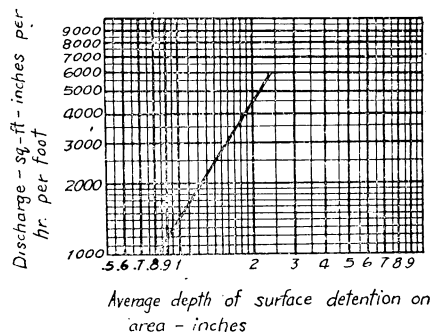


Fig.1 Equation $q = 1420 \delta_o^5$
Discharge Surface Detention Depth
Relationship For Grassed Areas on 3% Slope
Based on Experiments at the Spartanburg
Outdoor Hydraulic Laboratory U.S. Department
of Agriculture Soil Conservation Service

Table 2. 式 (3) により計算せる δ_a の値

試行	流 量 Q	潤 周 P	単位幅の 流 量 $q_b = Q/D$	単位幅の 流 量 $q_a = 43200 q_b$	潤 径 R	出口の深さ $\delta_o = 12R$	平均残留 深 $\delta_a = 5/8 \delta_o$
	cfs	ft	cfs	ft-in/hr	ft	in	in
1	0.093	3.68	0.0253	1093	0.113	1.356	0.848
2	0.215	4.13	0.0521	2250	0.176	2.111	1.320
3	0.356	4.41	0.0807	3486	0.227	2.724	1.703
4	0.561	4.68	0.1199	5180	0.284	3.408	2.130

次ぎには実験水路の全幅に対する流出レートの値を単位幅に対するものに換算しなければならない。このために潤周を以て幅としたが、この実験の場合には両者は同一と見てよい。なお流出レートを幅 1 ft 当り毎秒立方 ft から、幅 1 ft 当り毎時平方 ft-in に換算する。これらの値は Table 2. に示してある。

これらの流出レートの値を相応する平均地表残留量に対して対数的にプロットした。それを Fig. 1 にしめす。この直線の式は次の如くである。

$$q_n = 1420 \delta_n^{5/3} \dots\dots\dots (4)$$

この式はこの実験水路と同様な傾斜と地被物の区域からの流量を幅 1 ft 当り $\text{ft}^2\text{-in/hr}$ 単位で与えるものである。

同一条件の下で in/hr の流出レートに対する式をうるには (4) 式を分水界から流出点までの地表流の長さを ft で表わしたもので割らなければならない。かくて次の式を得る。

$$q = (1420/L) \delta_n^{5/3} \dots\dots\dots (5)$$

こゝで $q = \text{in/hr}$ の流出レート, $L = \text{ft}$ で表わした斜面の長さ, $\delta_n = \text{in}$ で表わした地表残留量の平均深さである。この式でこの実験水路と同様な傾斜と地被物を持つ区域に対する量水曲線を, 与えられた斜面の長さ, 降雨強度および滲透レートに対して組み合わせることを可能にする。

地表残留量と流出レートとの関係についての上記の式はこの誘導に用いられた仮定が充たされるときにのみ正しい。長い傾斜面では流れは分水界から流出点まで連続した薄い水層にならないで水路に入り込む。しかしこの報告のような他のデータや, 河道貯溜量のデータなどと共に, 各種の傾斜, 地被物, および排水路の種々の配列からなる集水地域の地表流の状態を予知することが可能である。(平田訳)

を与える式を第一に書き、これを $\rho h dx$ で割れば次の結果になる。

$$(du/dt) = g[i - (\partial h/\partial x)] - (\lambda/2)(u^2/h) - (qu/h)$$

局地的の速度で加速度の式 $(du/dt)_0 = (\partial u/\partial t) + u(\partial u/\partial x)$ を導入し、前式は次のようになる。

$$[(\partial u/\partial t) + u(\partial u/\partial x)] = g[i - (\partial h/\partial x)] - (\lambda/2)(u^2/h) - (qu/h) \dots\dots (5)$$

これが空間的に変る流量の運動方程式の最も一般的な形である。

式 (5) を開渠に於ける流れの普通の式と較べると二つの差異が注意される。第一に新しい項 $-(qu/h)$ が加えられている。この項は運動する流れと降下する雨の増加量の混合によるマサツの影響を表わす。それ故混合の影響は水の表面に加えられた見掛け上の歪力 $-(\rho qu)$ の値に等しいことになる。この項の構成は Reynolds 歪力の構成と同一である。第二に厳格な誘導法からは当然出てこなければならぬ流速分布の係数が無い。厳格な誘導法では $[u(\partial u/\partial x)]$ と (qu/h) の項はジメンションの無い α, β を乗じなければならぬ。 α と β について一言する。 α の値は乱流部分よりも層流部分に大きい。層流の部分では降雨強度 q に影響される。予期される変化は 1.20 と 1.33 の限界値の間に成る。 β については特別な制限が無い。

水深が浅く、湿めつた平面の長さが長いときは雨の混合によるマサツは固形底面のマサツに比して小である。この場合には β の正確な値は重要でなく 1 としてよい。反対に水深が深く平面の長さが短いとき、例えば排水口の短いものの如きでは底面のマサツは無視してよく、速度分布はほぼ一様であるから β はほぼ 1 である。

流出量の問題の分析的の解は運動式 (5)、マサツの法則式 (4)、および連続式 (1) から得られる。しかしこの解法の数学的困難は大きいから近似的の解に頼る方がよい。近似的で、しかも実用的の式の誘導には式 (5) の項のあるものを省略することが考えられる。この式中の二種のマサツ項の比をまず考える。この比は $(2q/\lambda u)$ で、これは式 (3) から $(2h/\lambda x)[1 - (u_0/u)(h_0/h)]$ に等しい。故に q を含む項は

$$(2h/x) < \lambda \dots\dots\dots (6)$$

ならば調和しない。

実験によると Reynolds 数が増すと λ は限界値に近づくことをしめす。なお又一般の場合のように流れの面の長さが甚だ長いときは h の距離による変化は小である。故に一定 q で長い面上の定常流の場合には、流下する雨の初の部分の外は q を含むマサツの項は捨てて差支がない。

水深と動エネルギーの項の重要性を測るには定常流の場合を考えれば充分である。けれども要求される項の比較を簡単にするためには、この問題に適するエネルギー式を得ることが望ましい。式 (5) の両側に uh を乗じ、これを x について積分し、式 (2) を用いて次の関係をうる。

$$\begin{aligned} uh[(u^2/2) + gh] &= gix \int_0^x q dx + \int_0^x [gqh - gixq - (1/2)qu^2 - (1/2)\lambda u^3] dx \\ &+ u_0 h_0 [u_0^2/2 + gh_0] + gi u_0 h_0 \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

これがエネルギー式である。左側の差は x 点に関するものである。 q は一定で u_0 は 0 と仮定すると

$$x(u^2 + 2gh) = gix^2 + 2 \int_0^x gh dx - \int_0^x u^2 dx - (1/q) \int_0^x xu^3 dx \dots\dots\dots (8)$$

次の不等式

$$u^2 < gix \dots\dots\dots (9)$$

$$2h < ix \dots\dots\dots (10)$$

は x の大なる値と流下の平面の長さが大きいときに満足されると仮定すると、式 (8) は次の如く簡略される。

$$gix^2 = (1/q) \int_0^x \lambda u^2 dx \dots\dots\dots (11)$$

不等式 (9) を吟味する必要がある。式 (11) を x について微分し、式 (3) を用いて

$$(u^2/gix) = (2/\lambda)(h/x) \dots\dots\dots (12)$$

故に不等式 (6) と (10) とが満足される場合には, 不等式 (9) もまた満足される。かゝる条件の下では式 (11) は流出量の問題の近似解の出発点として取つてよい。

これらの近似的解をうる方法はこの論じない。しかしかゝる解が企てられる前に λ の Reynolds 数 (uh/ν) に対する依存度は実験によつて確かめられなければならない。

降下雨量の直接のマサツ効果は小さいけれども, g の λ に対する擾乱の効果は認めなければならない。それは降下する雨は底部に近い速度傾度を大きくするからである。式 (5) から

$$(\lambda/2) = [i - (dh/dx)](gh/u^2) - (du/dx)(h/u) - (q/u) \dots\dots\dots (13)$$

これは u または h が x に依存する度の実験で確かめられた後に λ を決定するための関係である。(平田訳)

引用文献

- (1) H. Favre, Contribution a l'Etude des Courants Liquids, S. A. Rascher Cie., Zürich, 1933.
- (2) K. Hilding Beig, Flow in roof gutters, J. Res. Nation, Bur. Stand., v. 12, p. 193, 1934.
- (3) G. H. Keulegan and G. W. Patterson, Effect of turbulence and channel slope on translation waves, J. Res. Nation, Bur. Stand., v. 30, p. 461, 1943.

地上流の断面形

C. F. Izzard⁽¹⁾; The surface-profile of overland flow.
[Trans. Amer. Geophys. Union, 1944, 959—968]

この論文は Keulegan が「傾斜面上の空間的に変る流量」と題する論文で誘導した運動式を実験データに適用したものである。実験データは Public Roads Administration と Soil Conservation Service の協同研究計画からえたもので、前論文〔2〕に記載した人工雨による流出に基づくものである。

先きに報告 (Series III) したものの主要データを得た舗装面はアスファルトを注入した slate roofing-felt の市販のもので平滑な sand-asphalt 面に固着させたもので先きの実験〔2〕に用いたものである。その後この面は整一にするために特に選んだ Blue-grass sod で覆い、土壌の平均厚さは約 1—1/4 in とした。床には木片を釘付けして草の下の水の動きを遅らすようにした。

この論文では一定レートの降雨中の平衡した流れについての考察に限った。そして流量が後に論ずる平衡状態における降雨中の流量に等しい点における退水部の幾つかのデータの外には、量水曲線中の上昇部または退水部における流れを含まない。

Keulegan の誘導した空間的に変る流量に対する運動方程式は、水力学の米国標準記号〔3〕を用いると平衡状態については次の如くである。

$$V(dV/dl) = g[S_0 - (dy/dl)] - (\lambda/2)(V^2/y) - (Vi/l) \dots\dots\dots (1)$$

こゝで用いたものその他の記号は V = 平均速度 (断面における) ft/sec.; y = 流れの深さ ft; l = 床の上端からの距離; L = 実験区の全長 ft; S_0 = 傾斜; g = 重力の加速度 = 32.2 ft/sec²; λ = マッツ係数; i = 降雨強度 in/hr or ft³/sec/acre; D_e = 平衡状態における単位幅上の残留量 ft³; D_r = 退水部において流量 = q_e のときの単位幅上の残留量; q_e = 平衡状態において単位幅の上端から l ft の点の流量 ft³/sec.; F = Froude 数 = (V^2/gy) ; R = Reynolds 数; K = 残留係数 = $(D_e/q_e^{1/3}, \text{ft}^3 \times \text{sec}^{1/3})$; k = 深さ係数 = $(y/l)^{1/3} \text{ft}^{2/3}$.

この式で平衡状態は次の条件で決める。

$$q_e = Vy = (il/43200) \dots\dots\dots (2)$$

マッツ係数 λ は Keulegan が用いたと同様

$$\tau = (1/2)\lambda\rho V^2 \dots\dots\dots (3)$$

こゝで τ は床面における剪断力の平均強度で、 ρ は水の密度である。のちにしめすようにマッツ係数の大きさは雨滴による流れの乱れに影響される。これは水の流れる面の粗度に加えて流れの上から来る作用に関係する。

実験データによると 3.8 in/hr までの降雨強度に対し、また 72 ft までの地上流の長さに対して、平衡状態における流れの平均深さは床の下端における流量の三乗根に比例し、最小 0.001 から最大 0.04 までの床の傾斜の三乗根に逆比例する。このことは Fig. 1 に示したように舗装面に対し、また Fig. 2 に示したように芝生地 (傾斜 0.01~0.04) に対して真である。平衡状態における残留量は積算雨量と積算流出量の差であるとし、全残留量を床面積で除して平均深さをえた。芝生の場合には眞の深さを測ることができれば計算した平均深さはこれより小であろう。なんととなれば草の上部および他の部分が流れの内に入っているからである。雨の打撃で断えず乱されている水面の高さを正確に測ることは可能とは考えられない。

芝生の場合には幾分の滲透があつたろうが下の床は不透水性で 1—1/4 in の土は飽和していたと見られる。残留量の補正は各々前回試行の退水部曲線に対数方眼紙の上で引き延ばして行つた。Fig. 2 に示したデータは土が可なり一様の飽和状態にあつたことを示すものと信ずる。芝生の水理学的影響は実験中実質的に変化が無かつた。なんととなれば最後の 19 番目の試行は第 1 番目の試行の量水曲線をそのまま現わしているから始終同一状態にあつたと見られるからである。

Fig. 1 に示した残留量データのすべては 60°F の共通の温度に直した。流れに対する抵抗は Reynolds 数に逆比例することが判つたから、実測した残留量は動粘性に逆比例するとして補正したが、密度は流出水の温度が 52°F と 82°F の間に対して僅かしか変らないから無視し

(1) Public Roads Administration, Federal Works Agency, Washington, D. C.

た。芝生については温度補正は行わなかつた。蓋し計算した残留量は滲透に対して補正しても余り良くならないし、また温度変化の幅が小さかつたからである。

舗装面に対する降雨の擾乱の無いときの退水部のマサツ係数を決定するのに残留量を流量レートが降雨中の平衡流量に等しくなつた瞬間について計算した。舗装床について先きに説明したように、降雨が止んだのちに降雨の擾乱によつて生じた抵抗が無くなるために流量が一時増加する〔2〕。この時に流量は時間と共に急変するから (2) 式で定義したような眞の平衡にはならない。けれどもこの事実にもかかわらず決定したマサツ係数は、Fig. 5 に示しかつ、のちに論ずるように定常整流 (床の上端ではそう見てよい) について決定したものと良く一致する。Fig. 1 は退水部における流量が平衡流量に等しくなつた瞬間の舗装床の流量と平均深さとの関係をしめす。3.6±in/hr の降雨による残留量の比例常数は 1.8±in/hr の降雨によるものと同じであること予期される通りなることが注意されるであろう。

平均深さに対する一般式は次の如くである。

$$(D_e/L) = K(q_e)^{1/3} \dots \dots (4)$$

係数 K は Fig. 3 にしめすように傾斜の三乗根に逆比例する。この係数はマサツ係数 λ を含み、 λ はまた降雨強度と表面粗度の函数である。

マサツ係数 λ の値をきめるために式 (1) を次の如く書き直す。

$$\lambda = (2k/l)(k^2 l^2 / q_e^2) g(S_0 - (k/3 l^{2/3})) - (5/3) l^{1/3} \dots (5)$$

こゝで K は次の式で決められる。

$$y = k l^{1/3} \dots \dots \dots (6)$$

この式は (4) 式を微分して得られたまた次の式を積分して検定することが出来る。

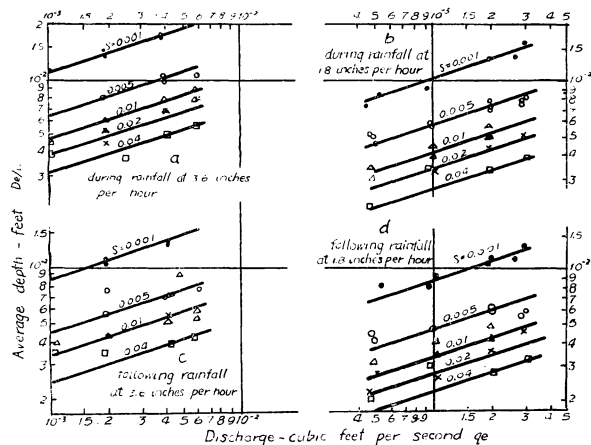


Fig. 1 Average depth as function of equilibrium-rate of discharge on paved plot (Series II)

$$D_e = \int_0^L y dl = \int_0^L k l^{1/3} dl$$

これから

$$(D_e/L) = (3/4) k L^{1/3} \dots \dots \dots (7)$$

で平均深さは L における深さの 3/4 であることをしめす。このことのほど正しいことはのちに改良した運動式から計算した断面の比較および式 (6) で与えられる略算の断面式とでしめされるであろう。

平衡式 (2) から残留量係数 K は深さの係数 k と次の関係がある。

$$k = (4/3) K (i/43200)^{1/3} \dots \dots (8)$$

式 (5) で計算した λ の値を両表面に対する Fig. 1 と 2 から誘導した K の値に対する Reynolds 数に対してプロットしたのは Fig. 4 である。舗装ならびに芝生面に於けるデータの全幅に対し積 (λR) は与えられた面上

の与えられた降雨強度に対してはほぼ一定である。傾度の小さい面、特に $S_0 = 0.001$ に対しては急傾斜上の (λR) の値から可なり異なる。これは恐らく k の計算に用いた式 (6) がこの状態における眞の断面を表わさないからであろう。

(λR) の対数を降雨強度に対してプロットしたのが Fig. 6 である。比較のために平滑な

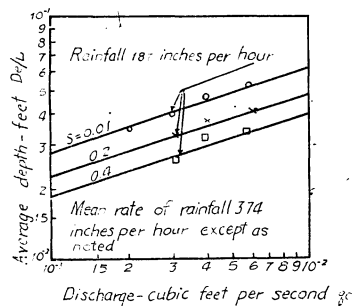


Fig. 2 Average depth as function of equilibrium-rate of discharge on turfed plot (Series III)

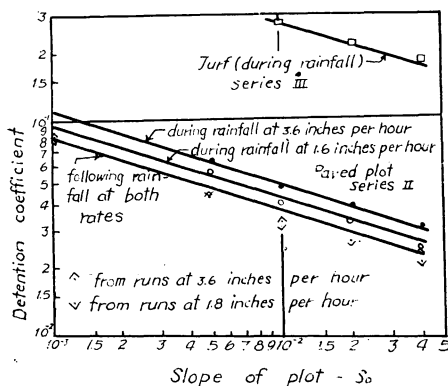


Fig. 3 Detention coefficient as function of slope of plot for paved and turfed surface (Series II and III)

ゲージで測つた断面において正常流となるのに約 50 ft の長さがあるようにして行つたものである。

Fig. 5 は粘性流の状態をしめすもので $R=1000$ 以下で成立するようである。この辺で過渡状態に入り擾乱部は約 $R=4000$ で始まるようである。データは不幸にしてこの後の部分までないで結論するわけに行かない。 $R=2000$ の限界は降雨実験ではなお過渡部である。故に 72 ft 床上の高強度降雨実験では、或は一層長い床上の同強度 (3.2 in/hr) の地上流では、流れの型の変化は退水部でおこりまた雨滴打撃で擾乱された流れに対しておこるであろう。それだから式の使用をデータの限界外に伸すことはつゝししなければならない。

式 (5) による λ の計算を吟味すると $(5/3)l^{1/3}$ の項は極く低い傾斜 (0.001) の外は無用であることを示す。この項は式 (1) において加速度の項 (+) 雨滴の運動量の項 (第一および最後の項) に相当する。

それ故に次のようにいつてよい。すなわち概略の目的に対しては 0.005 以上の急傾斜では区間の流速を早めるに要する力と、流れの方向における雨滴のため速度を与える力は無視してもよい。

式 (1) の雨滴運動量 (最後の項) を消して増加の形でレートを表わすと

$$V(\Delta V/\Delta l) = g\{S_0 - \Delta y/\Delta l\} - (\lambda/2)(V^2/y) \quad \dots (10)$$

Δl だけ距つた二区間の速度の増加 ΔV は、 y を区間の中央点における深さとして

$$\Delta V = V(\Delta l/l) - (\Delta y/y) \{1 - (\Delta y/2y)^2\}$$

この分母の二次的の項を省きこれを式 (10) の ΔV に代入し、かつ Froude 数 $F = (V^2/gy)$ を用いると (10) 式は次の如くなる。

$$(\Delta y/\Delta l) = \{S_0 - (F/l)[(\lambda l/2) + y]\}/(1-F) \quad \dots (11)$$

この式はジメンションでは、床上の変る流量、床に対して関係的水面傾斜、床の傾斜、降雨強度の函数としての流れのマサツ、水温および床面の粗度を考へに入れた平衡面の正しい式である。式は Fig. 7 と 8 とにしめしたような典型的の実験に対する断面を計算するのに用いられた。これらの断面から計算した残留量と、Table 1. に示した温度および降雨強度に対して補正した実測残留量との平均偏差は 4.9% である。

(11) 式は次のことを示している。(a) 断面の傾きは床の上端では水平である。(b) 水面の床

sand-asphalt 床 [2] の実験の最初の系列から誘導したデータもしめしてある。しかしこれらはこゝに報告した第二系列においてしめた方法の改良が行われると更正しなければならないものである。

粗な舗装床に対するデータに適する試みの式は次の如くである。

$$(\lambda R) = 27(0.211^{1/3} + 1) \quad \dots (9)$$

$i=0$ では $(\lambda R) = 27$ で退水部に対する Fig. 4 にしめたものに相応することが見られるであろう。

(λR) のこの値はほぼ定常整流になつたときの流量の種々のレートに対する流れの深さの実測からえた Fig. 5 にプロットしたものと同く相応する。これらの実測は一系列の水槽上で床の上端から水を供給し、水深を 6 ft 幅の 1/4 の点で二点

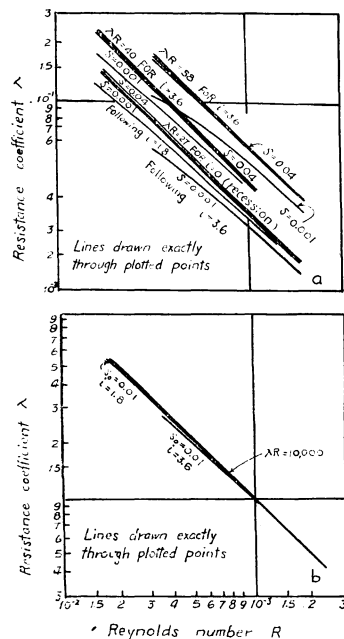


Fig. 4. Resistance coefficient as function of Reynolds number; (a) paved plot (Series II); (b) turf (Series III)

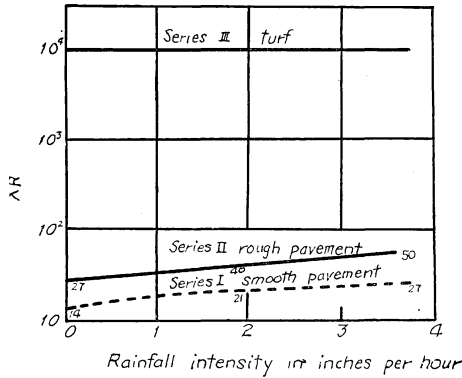


Fig. 5 Resistance-coefficient as function of Reynolds number for steady uniform flow on paved surface : Series II

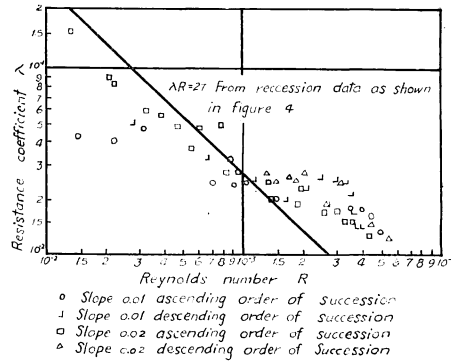


Fig. 6 Product λR as function of rainfall-intensity for the three types of surface tested

Table 1. 平衡状態における舗装及び芝生地の残留量の実際及計算値の比較

試行 No.	傾斜 S_0	斜面長 L	降雨強度 i	温度 °F	実際 残留量 D_e	同左 補正值 D'_e	計算 残留量	偏差 ^b
		feet	inches per hour		sq ft	sq ft	sq ft	%
101	.001	72	3.45	56	1.46	1.46	1.43	-2.1
103	.001	72	3.48	56	1.39	1.39	1.43	+2.9
104	.001	72	3.63	64	1.41	1.44	1.43	-0.7
106	.001	48	3.67	57	0.855	0.832	0.834	+0.2
107	.001	48	3.73	52	0.835	0.789	0.834	+5.7
110	.001	24	3.49	62	0.336	0.346	0.339	-2.0
111	.001	24	3.55	62	0.314	0.320	0.339	+5.9
114	.001	24	3.56	63	0.319	0.329	0.339	+3.0
115	.001	12	3.65	64	0.125	0.126	0.127	+0.8
118	.001	12	3.65	65	0.129	0.130	0.127	-2.3
131	.005	72	3.66	67	0.747	0.765	0.814	+6.4
132	.005	72	3.63	72	0.750	0.790	0.814	+3.0
133	.005	72	3.67	73	0.727	0.762	0.814	+6.8
119	.005	12	3.52	60	0.0820	0.083	0.075	-9.6
120	.005	12	3.52	58	0.0763	0.076	0.075	-1.3
121	.005	12	3.58	58	0.0835	0.082	0.075	-8.5
173	.04	72	3.68	68	0.394	0.401	0.404	+0.7
167	.04	12	3.66	66	0.0463	0.047	0.037	-21.3
301 c	.01	72	3.81	78	3.70	3.92	3.58	-8.7

a. 60°F 及び 3.6 in/hr に補正 b. (計算残留量/実際残留量)×100 c. Blue grass 芝生地, 他は全部舗装

に対する関係的の傾斜は正である(深さが増す)但し $(F/l)\{(\lambda l/2)+y\} < S_0$ である間。(c)上の(b)において両者が等しくなる点から外では傾斜は負で深さは減ずる。故に深さはこの点 $(\Delta y/\Delta l)=0$ で最大となるから

$$y = (\lambda/2)(V^2/2g) \dots\dots\dots (12)$$

これは一つの与えられ傾斜上の種々の長さの床に対する最大深さの点の軌跡である。

数学的には式(11)は簡単に積分することはできない。しかし必要ならば Bresse の逆水表のような函数を誘導することは出来る。計算した断面は Δl に対して解いた(11)式を用い、かつ已知の調制点から出発して限界深さとして自由落下水の点または Fig. 8 に示した流れを横切る障害物の頂点に対する関係の限界深さを採つて試めしと誤差の方法で得られる。

Fig. 8 は正常断面は図に示した 1/4 in ダムから上流僅かの距離にのみ影響があつたことを示す。一つの試行は実際に粘土で作つたか様な障害物についてなされた。この図は芝生の土堤を越える流れの逆水に影響される舗装片を流れる断面を計算するのに(11)式を用いることの

可能なことを示す。

Fig. 7にはまた k の実験値を用いて式(6)によつてプロットした断面をしめす。この方の断面は(11)式により計算した断面と最大深の点で交る。これは式(6)と(12)とは同一結果を与えることをしめすものであることに注意すべきである。簡単な断面式と(11)式で計算したものとの差異を吟味すると、両曲線下の面積はほぼ等しく交叉点から上流の面積増加は、この点から下流の面積減少と消し合うことを示す。この両曲線が良く合うことは、簡単な式(6)が実験データと良く合うのが何故であることを説明する。しかし先きの論文〔2〕の論議で Horner は正しい観測から床の上端では深さが 0 となることはできないとしている。実際的の目的には式(6)は(11)式の代りに用いても誤差は僅少である。たゞし流れは障害物に妨げられないときでまた積(iL)が約280を越えない場合にはこの式を適用することができない。先きにも述べたように深さは流量の三乗根に比例しないような状態に流れが或る範囲以外では変ることがあると信すべき充分の理由はある。

これらの計算した断面はまた断面の上端では地上流の長さに関係なくほぼ同一であることをしめす。このことは残留量と流量との関係をうるのに床の種々の異なる長さに対する残

留量データを用いることを正当化するものである。(Fig. 8, 9, 10, 11 略) (平田訳)

引 用 文 献

- (1) G. H. Keulegan, Spatially variable discharge over a sloping plane, Trans. Amer. Geophys. Union, Part VI, pp. 956—958, 1944.
- (2) C. F. Izzard and M. T. Augustine, Preliminary report on analysis of runoff resulting from simulated rainfall on a paved plot. Trans. Amer. Geophys. Union. Part II., pp. 500—511, 1943.
- (3) American Standards Association, American standard letter symbols for hydraulics. Z 10. 2, 1942.

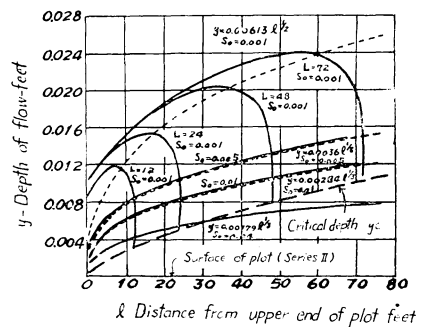
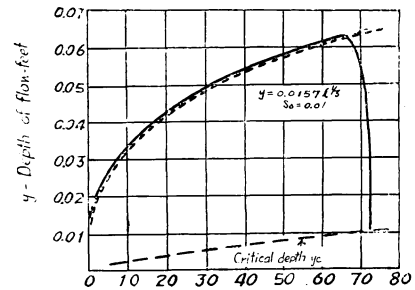


Fig. 7 Surface profiles computed by equation (11)
(a) paved plot (Series II) and (b) turfed plot (Series III)